УДК 51:373.5 DOI 10.25730/VSU.0536.20.015

О задачах отборочного этапа олимпиады «Шаг в будущее» по математике для 9 класса

Э. Н. Белянова[1], А. Л. Плетнев[2]

[1]кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана. Россия, г. Москва. E-mail: elv-bel@mail.ru

[2]кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана. Россия, г. Москва. E-mail: alpxy@rambler.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются задачи, предлагавшиеся учащимся девятых классов на отборочном этапе межрегиональной олимпиады «Шаг в будущее» по математике. Эта олимпиада входит в перечень олимпиад, проводимых под эгидой Российского совета олимпиад школьников и входит в перечень олимпиад школьников на 2019/20 учебный год. Статья знакомит с методами решения задач, которых нет в школьной программе и решение которых нередко вызывает трудности. Включение таких задач в программу дополнительного образования школьников повышает интерес учащихся к математике. Задачи затрагивают следующие темы: делимость целых чисел, геометрическое место точек, уравнения и системы уравнений с двумя и более неизвестными, геометрия на плоскости, методы доказательства тождеств и неравенств, задачи с параметром.

Ключевые слова: Российские олимпиады школьников по математике, олимпиадные задачи, олимпиада «Шаг в будущее» МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Выявление одаренных учащихся, работа по дальнейшему развитию их творческого потенциала, подготовка их к успешному выступлению на различных олимпиадах и соревнованиях является неотъемлемой частью работы современного учителя в школе.

Решение олимпиадных заданий является одним из проверенных способов распознать нестандартно мыслящих детей. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, но необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры. В школьных учебниках по математике таких задач недостаточно.

В данной статье представлено 10 задач отборочного этапа олимпиады по математике для учащихся 9 классов, которая ежегодно проводится в рамках олимпиады «Шаг в будущее» МГТУ им. Н. Э. Баумана. Задачи затрагивают следующие темы: делимость целых чисел, геометрическое место точек, уравнения и системы уравнений с двумя и более неизвестными, геометрия на плоскости, методы доказательства тождеств и неравенств, задачи с параметром.

1. *(2019 г.) Какое наименьшее значение может принимать функция* $F(x;y)=x^2+8y+y^2+14x-6$ *при условии, что* $x^2+y^2+25=10(x+y)$*?*

Решение. Так как $x^2+y^2+25=10(x+y)\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$, то второе уравнение задает окружность с центром (5; 5) и радиусом 5. Пусть $F(x;y)=M$, тогда $(x+7)^2+(y+4)^2=M+71$, значит, первое уравнение задает окружность с центром (-7; -4) и радиусом $(M+71)^{0,5}$.

Условие минимума функции равносильно условию минимума *M*, при котором окружности пересекутся, а это точка касания двух окружностей. То есть сумма их радиусов должна равняться расстоянию между их центрами. Получаем уравнение $(5+(M+71)^{0,5})^2=(5+7)^2+(5+4)^2\Leftrightarrow M=29$.

Ответ: 29.

2. *(2019 г.) Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35 × 35 – всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих фигуру «буква Г», обязательно была хотя бы одна закрашенная?*

Решение. Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис. 1), Таким образом будет закрашено $\left[\frac{N^2}{3}\right]$ клеток. Это минимально возможное количество, так как в любом квадрате 3 × 3 внутри данного меньше трех клеток закрашивать нельзя.

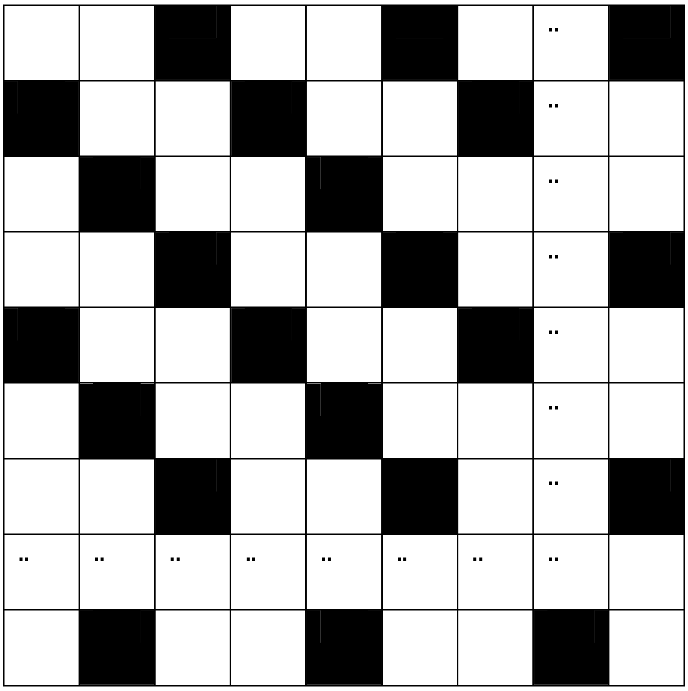

Рис. 1

Ответ: 408.

3. *(2019 г.) К исходному натуральному числу разрешается прибавить 1 или разделить его на 2, если результат – натуральное число. Нужно, пользуясь только этими правилами, из исходного числа получить 1. При этом считаются баллы по следующему правилу:*

– если операция отличается от предыдущей, то прибавляется к сумме баллов 1;

– если операция повторяется, то прибавляется к сумме число баллов в 2 раза больших, чем предыдущее число баллов.

Минимальное возможное число баллов для каждого натурального числа назовем его «ценой».

Например, для следующей цепочки преобразований $100 \to 50 \to 25 \to 26 \to 13 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ *«цена» числа 100 равна* $1+2+1+1+1+1+1+1+2+4=15$. *Найдите «цену» натурального числа 48.*

Решение. Так как «цена» числа 8 равна 7, (действительно, для цепочки преобразований $8 \to 4 \to 2 \to 1$ получаем «цену» $1+2+4=7$), то для цепочки преобразований $48 \to 24 \to 12 \to 13 \to 14 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ получаем «цену» числа 48 равную $1+2+1+2+1+1+1+2+4=15$.

Ответ: 15.

4. *(2019 г.) Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции* $f(x)$ *выполняется условие* $f(x+1)+1 = f(x)+43/((x+1)(x+2))$. *Вычислите* $101/f(2020)$, *если* $f(0)=2020$.

Решение. Заметим, что $f(x + 2020) - f(x) = (f(x + 2020) - f(x + 20019)) + (f(x + 2019) - f(x + 2018)) + \ldots + (f(x + 1) - f(x)) = 43 / ((x + 2020)(x + 2021)) - 1 + 43 / ((x + 2019)(x + 2020)) - 1 + \ldots + 43 / ((x + 1)(x + 2)) - 1$. Таким образом, $f(2020) - f(0) = 43(1/2020 - 1/2021 + \ldots + 1 - 1/2) - 2020 = 43(1 - 1/2021) - 2020$. Следовательно, $101 / f(2020) = 47 / 20 = 2{,}35$.

Ответ: 2,35.

5. *(2019 г.) Решите уравнение* $f(f(f(x))) + f(x) = 0$, *где* $f(x) = x^2 - 2$. *В ответ запишите сумму квадратов всех корней.*

Решение. Пусть $f(x) = y$, $f(y) = z$, тогда $f(f(f(x))) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f(z) = -y$. Таким образом, имеем систему уравнений $y^2 - 2 = z$; $z^2 - 2 = -y$. Вычтем из первого уравнения системы второе, получим $y^2 - z^2 = z + y$. Таким образом, либо $z = -y$, либо $z = y - 1$.

Осталось решить два квадратных уравнения: 1) $y^2 + y - 2 = 0$; 2) $y^2 - y - 1 = 0$. Учитывая равенство $y = f(x) = x^2 - 2$, получаем, что $x^2 = y + 2$, следовательно, сумма квадратов корней равна $2 \times (-1) + 8 + 2 \times 1 + 8 = 16$.

Ответ: 16.

6. *(2015 г.) Библиотекарь физико-математического лицея заметила, что если количество учебников геометрии в школьной библиотеке увеличить в несколько (целое число) раз и добавить к полученному числу количество учебников алгебры, то получится 2015. А если количество учебников алгебры увеличить во столько же раз и прибавить к полученному числу количество учебников геометрии, то получится 1580. Сколько учебников алгебры в библиотеке?*

Решение. Обозначим количество учебников геометрии *x*, а количество учебников алгебры – *y*. Составим систему:

$$\begin{cases} xn + y = 2015, \\ yn + x = 1580. \end{cases}$$

Запишем равносильную систему, уравнения которой представляют собой сумму и разность уравнений составленной системы:

$$\begin{cases} x(n+1) + y(n+1) = 3595, \\ x(n-1) - y(n-1) = 435 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(n+1) = 3595, \\ (x-y)(n-1) = 435. \end{cases}$$

Множитель $(n+1)$ числа $3595 = 5 \times 719$ должен быть на 2 больше множителя $(n-1)$ числа $435 = 3 \times 5 \times 29$. Очевидно, это выполняется только при $n = 4$. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 719, \\ x - y = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 432, \\ y = 287. \end{cases}$$

Ответ: 287.

7. *(2015 г.) Найти множество значений параметра a, при которых дискриминант уравнения* $ax^2 + 2x + 1 = 0$ *в 9 раз больше квадрата разности двух его различных корней.*

Решение. $D = 4 - 4a$.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} = \frac{4-4a}{a^2} = \frac{D}{a^2}.$$

Получаем уравнение: $\frac{9D}{a^2} = D$. Условию $D > 0$ удовлетворяет только корень $a = -3$.

Ответ: -3.

8. *(2015 г.) Одна сторона параллелограмма в* $\sqrt{3}$ *раз больше другой стороны. Одна диагональ параллелограмма в* $\sqrt{7}$ *раз больше другой диагонали. Во сколько раз один угол параллелограмма больше другого угла?*

Решение. Пусть *x* – меньшая сторона, тогда $\sqrt{3}\,x$ – большая сторона. Пусть *y* – меньшая диагональ, тогда $\sqrt{7}\,y$ – большая диагональ. Имеем $2x^2 + 2\left(\sqrt{3}\,x\right)^2 = y^2 + \left(\sqrt{7}\,y\right)^2$, откуда $x = y$.

Получаем: острый угол параллелограмма равен 30°, тупой – 150°.

Ответ: в 5 раз.

9. *(2015 г.) В плоскости Oxy найти наименьшее и наибольшее расстояния между двумя точками* $(x; y)$, *координаты которых являются целыми числами и удовлетворяют уравнению* $y^2 = 4x^2 - 15$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $(2x - y)(2x + y) = 15$. Видим, что целочисленные точки, удовлетворяющие этому уравнению и лежащие в первой четверти, являются решениями следующих систем:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 15 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

Это соответственно точки $(4;7)$ и $(2;1)$. Остальные точки, лежащие в плоскости *Oxy*, расположены симметрично им относительно координатных осей и начала координат.

В качестве ближайших точек можно взять пару $(2;1)$ и $(2;-1)$, расстояние между ними равно 2. Как наиболее удаленные подходит пара $(4;\,7)$ и $(-4;-7)$, расстояние между которыми равно $2\sqrt{4^2+7^2}=2\sqrt{65}$.

Ответ: 2; $2\sqrt{65}$.

10. *(2015 г.) Квадрат* 10×10 *разрезали на прямоугольники, площади которых различны и выражаются натуральными числами. Какое наибольшее число прямоугольников получится?*

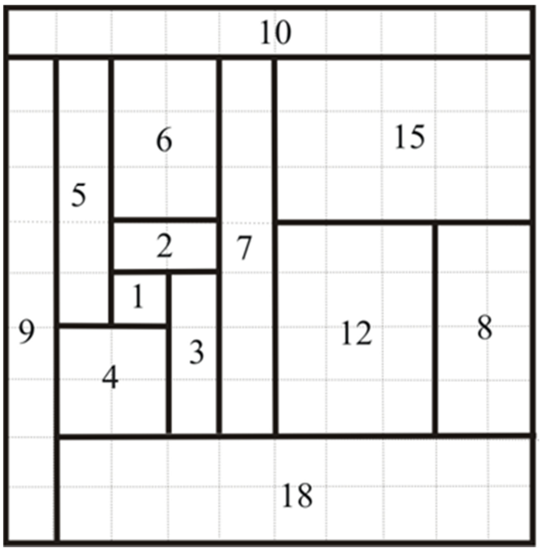

Рис. 2

Решение. Площадь квадрата равна 100. Если представить 100 в виде суммы натуральных чисел, то число слагаемых будет наибольшим, если разность между числами равна одному. Возьмем прямоугольники площадью 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Их суммарная площадь равна 55. Значит, сумма площадей остальных прямоугольников равна 45.

Заметим, что если площадь прямоугольника больше 10, то она не может быть простым числом, иначе такой прямоугольник имеет сторону больше 10 и не помещается в квадрат 10×10. Составными числами больше десяти являются числа 12, 14, 15, 16, 18, 19, … Любые четыре из них в сумме дают число больше 45. Сумму, равную 45, дают, например, такие три числа: 12, 15, 18 или 14, 15, 16.

Получаем, что число прямоугольников меньше или равно 13. Пример возможного расположения для 13 прямоугольников приведен на рис. 2.

Ответ: 13.

К участию в заключительном этапе олимпиады допускались только победители и призеры отборочного этапа. Задания и решения заключительного этапа печатались ранее (например, [1; 2]). Все задания, а также актуальную информацию об олимпиаде можно найти на сайте олимпиады http://olymp.bmstu.ru.

Список литературы

1. *Власова О. В., Ткач Л. И., Шишкина Л. А.* Олимпиада «Шаг в будущее» по математике (9 класс, заключительный этап, 2018) // Трансформация мирового научно-технического знания : материалы науч.-практ. конф. Белгород, 2018. С. 5–12.

2. Олимпиада «Шаг в будущее» по математике для 9 класса, очный тур / О. В. Власова, И. А. Грицай, Е. В. Евстропова, Е. В. Михайлова // Общество, экономика, культура: перспективы научных исследований в информационную эпоху : материалы науч.-практ. конф. Белгород, 2019. С. 42–47.

On the problems of the qualifying stage of the Olympiad "Step into the future" in mathematics for 9 grade

E. N. Belyanova[1], A. L. Pletnev[2]

[1]PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Bauman Moscow State Technical University. Russia, Moscow. E-mail: elv-bel@mail.ru

[2]PhD of Physical and Mathematical Sciences, Bauman Moscow State Technical University. Russia, Moscow. E-mail: alpxy@rambler.ru

Abstract. This article discusses the problems offered to ninth-grade students at the qualifying stage of the interregional Olympiad "Step into the future" in mathematics. This Olympiad is included in the list of Olympiads held under the auspices of the Russian Council of school Olympiads and is included in the list of school Olympiads for the 2019/20 academic year. The article introduces methods for solving problems that are not in the school curriculum and the solution of which often causes difficulties. The inclusion of such tasks in the program of additional education of schoolchildren increases students ' interest in mathematics. The problems cover the following topics: divisibility of integers, geometric position of points, equations and systems of equations with two or more unknowns, geometry on a plane, methods for proving identities and inequalities, problems with a parameter.

Keywords: Russian school Olympiads in mathematics, Olympiad problems, Olympiad "Step into the future" of Bauman Moscow State Technical University.

References

1. *Vlasova O. V., Tkach L. I., Shishkina L. A. Olimpiada "Shag v budushchee" po matematike (9 klass, zaklyuchitel'nyj etap, 2018)* [Olympiad "Step into the future" in mathematics (grade 9, final stage, 2018)] // *Transformaciya mirovogo nauchno-tekhnicheskogo znaniya : materialy nauch.-prakt. konf.* – Transformation of world scientific and technical knowledge : materials of scientific and practical conf. Belgorod. 2018. Pp. 5–12.

2. *Olimpiada "Shag v budushchee" po matematike dlya 9 klassa, ochnyj tur* – The Olympiad "Step into the future" in mathematics for grade 9 final tour / O. V. Vlasova, I. A., Gricay E. V. Evstropov, E. V. Mihailova // *Obshchestvo, ekonomika, kul'tura: perspektivy nauchnyh issledovanij v informacionnuyu epohu :materialy nauch.-prakt. konf.* – Society, economy, culture: the prospects of scientific research in the information age : proceedings of the scientific-pract. conf. Belgorod. 2019. Pp. 42–47.