МАТЕМАТИКА

УДК 517.16 DOI 10.25730/VSU.0536.20.012

Неравенство Караматы для логарифмически выпуклых функций

С. И. Калинин
доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. В статье воспроизводится неравенство Караматы для выпуклой функции, вводится в рассмотрение аналог данного неравенства – неравенство Караматы для логарифмически выпуклой функции (логарифмически вогнутой функции). Автор предлагает читателю также осмысление неравенства Караматы для логарифмически выпуклой или логарифмически вогнутой функций в строгом (нестрогом) смысле для кортежей действительных чисел из двух элементов.

Отдельное внимание уделяется вопросу решения уравнений специального вида, порождаемых строго логарифмически выпуклыми или строго логарифмически вогнутыми функциями. Формулируется теорема, описывающая новый метод решения таких уравнений. В качестве иллюстрации применения данной теоремы в работе обсуждаются решения уравнений, которые читателю могут быть потенциально известны из различных литературных источников.

Ключевые слова: выпуклая функция, логарифмически выпуклая функция, неравенство Караматы, уравнение.

1. Выпуклость функции в классическом смысле. Напомним сначала определения понятий выпуклой и вогнутой на промежутке числовой прямой функций.

Пусть l – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (нестрого выпуклой) на *l*, если для любых точек *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 для всех различных точек *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функция *f* называется *строго выпуклой* на рассматриваемом промежутке *l*.

Очевидно, строго выпуклая функция является выпуклой.

Аналогично определяются *вогнутая* (нестрого вогнутая) и *строго вогнутая* функции – для этого неравенства (1)–(2) следует записывать со знаками $\geq$ и > соответственно.

Воспроизведем также геометрическую интерпретацию понятий выпуклой и вогнутой функций. Если функция *f* выпукла (строго выпукла) на промежутке *l*, то для любого отрезка $[a; b] \subset l$ внутренние точки графика сужения $f|_{[a;\, b]}$ данной функции на отрезок $[a; b]$ лежат не выше (ниже) соответствующих точек отрезка, соединяющего концы $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ этого графика.

Если же *f* вогнутая (строго вогнутая) на промежутке *l* функция, то для любого отрезка $[a; b] \subset l$ внутренние точки графика сужения $f|_{[a;\, b]}$ будут находиться не ниже (выше) точек отрезка, соединяющего концы $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ этого графика.

Известно (см., например, [2]), что выпуклая на промежутке функция является непрерывной внутри данного промежутка. Такая функция может иметь разрыв разве что лишь на конце промежутка, если этот конец промежутку принадлежит.

2. Логарифмически выпуклые функции. Напомним сейчас определение понятия логарифмически выпуклой функции.

Пусть $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке *l* и принимающая в точках этого промежутка положительные значения.

Определение 2. Функцию $f(x)$ назовем *логарифмически выпуклой* (нестрого логарифмически выпуклой) на *l*, если для любых точек *a* и *b* из *l* и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b). \tag{3}$$

Если в условиях определения 2 для всех различных точек *a* и *b* из *l* и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) < f^{\lambda}(a) f^{1-\lambda}(b), \tag{4}$$

то функцию *f* условимся называть *строго логарифмически выпуклой* на промежутке *l*.

Замена знаков неравенств в (3) и (4) знаками $\ge$ и > соответственно приводит к определениям *логарифмически вогнутой* (нестрого логарифмически вогнутой) и *строго логарифмически вогнутой* функций.

Ясно, что строго логарифмически выпуклая функция будет и просто логарифмически выпуклой.

Справедливо следующее почти очевидное утверждение.

Предложение 1. Функция *f* на промежутке *l* логарифмически выпукла (логарифмически вогнута) тогда и только тогда, когда ее логарифм $\ln f$ выпукл (вогнут) на этом промежутке.

Приведем примеры логарифмически выпуклых и логарифмически вогнутых функций.

Рассмотрим функцию $y = ch\, x$ $\left(ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$ – гиперболический косинус. Эта функция положительна на всей числовой прямой. Легко проверить, что $(\ln ch\, x)'' = \dfrac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} > 0,$ значит, функция $y = ch\, x$ строго логарифмически выпукла на **R**.

Рассмотрим теперь функцию $y = sh\, x$ $\left(sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$ (гиперболический синус) на интервале $(0; +\infty)$. Так как $(\ln sh\, x)'' = -\dfrac{4}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} < 0,$ то функция $y = sh\, x$, $x \in (0; +\infty)$, – строго логарифмически вогнутая.

Обратимся к общей степенной функции $y = x^{\alpha}$ ($x > 0$, $\alpha \in$ **R**). Поскольку $(\ln y)'' = -\dfrac{\alpha}{x^2}$, то заключаем, что данная функция на интервале $(0; +\infty)$ при $\alpha < 0$ будет строго логарифмически выпуклой, а при $\alpha > 0$ – строго логарифмически вогнутой.

Функция $y = x^x$, $x > 0$, – строго логарифмически выпуклая, ибо $(\ln y)'' = \dfrac{1}{x} > 0$ на области определения данной функции.

Поскольку функция $\ln a^x$ ($a > 0$, $a \ne 1$) является и нестрого выпуклой, и нестрого вогнутой на **R**, то функция a^x будет и логарифмически выпуклой, и логарифмически вогнутой на **R**.

Приведем геометрическую характеризацию логарифмически выпуклых функций, представленную, напр., в [2].

Если функция $f(x)$ – логарифмически выпуклая на промежутке l, то для любого отрезка $[a; b] \subset l$ и любого $x \in [a; b]$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика сужения $f\big|_{[a;\, b]}$ будет лежать не выше точки экспоненциальной дуги $y = \big(f(a)\big)^{\frac{b}{b-a}} \big(f(b)\big)^{\frac{a}{a-b}} e^{\frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b-a} x}$, $a \le x \le b$, соединяющей концы $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ этого графика, с той же абсциссой x.

Если же $f(x)$ – строго логарифмически выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b]\subset l$ и любого $x\in(a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика функции f лежит ниже точки экспоненциальной дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$, с той же абсциссой x.

Аналогично геометрически интерпретируется логарифмически вогнутая (строго логарифмически вогнутая) функция. Так, если $f(x)$ – строго логарифмически вогнутая на промежутке l функция, то внутренние точки графика $f\big|_{[a;\,b]}$ будут лежать выше соответствующих точек экспоненциальной кривой, соединяющей его концы (здесь $[a;b]\subset l$ – произвольный отрезок).

Из геометрии логарифмической выпуклости следует, что функция $y=e^{sign\,x}$ логарифмически выпукла на промежутке $(-\infty;0]$ и логарифмически вогнута на промежутке $[0;+\infty)$. Подчеркнем, данная функция является разрывной в точке $x=0$ как слева, так и справа.

Из геометрической интерпретации логарифмической выпуклости нетрудно усмотреть то, что логарифмически выпуклая на промежутке l функция является на данном промежутке также и выпуклой.

В статье [1] доказывается следующий критерий логарифмической выпуклости функции.

Теорема А. Функция $f(x)$ является логарифмически выпуклой на промежутке l тогда и только тогда, когда для любого $\alpha\in\mathbf{R}$ будет выпуклой на l функция $e^{\alpha x}\,f(x)$.

Техника доказательства теоремы А позволяет заключить, что ее можно переформулировать и для строго логарифмически выпуклой на промежутке l функции. Последнее обстоятельство позволяет легко обосновать строгую логарифмическую выпуклость функции $y=ch\,x$, поскольку для любого $\alpha\in\mathbf{R}$ функция $e^{\alpha x}\cdot\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ является строго выпуклой как сумма двух строго выпуклых функций.

3. Неравенство Караматы. Введем необходимые понятия. Пусть имеются два кортежа $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ и $\overline{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ длины *n*, составленные из действительных чисел, члены которых перенумерованы в порядке неубывания. Условимся говорить, что кортеж $\overline{u}$ *мажорирует* кортеж $\overline{v}$ (кортеж $\overline{v}$ мажорируется кортежем $\overline{u}$), если выполняются соотношения

$$\begin{cases} v_n\le u_n, \\ v_{n-1}+v_n\le u_{n-1}+u_n, \\ \ldots \\ v_2+v_3+\ldots+v_n\le u_2+u_3+\ldots+u_n, \\ v_1+v_2+\ldots+v_n=u_1+u_2+\ldots+u_n. \end{cases}$$

То, что кортеж $\overline{u}$ мажорирует кортеж $\overline{v}$ будем обозначать символом $\overline{v}\prec\overline{u}$.

В статье [7, с. 215–217] доказана следующая

Теорема Б. Пусть f – выпуклая на промежутке l функция и кортежи $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\overline{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ таковы, что $\overline{v}\prec\overline{u}$, $u_1\in l$, $u_n\in l$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}f(v_k)\le\sum_{k=1}^{n}f(u_k). \tag{5}$$

Если при этом функция *f* является строго выпуклой, то неравенство (5) обращается в равенство тогда и только тогда, когда кортежи $\overline{u}$ и $\overline{v}$ совпадают.

Ясно, что теорема Б может быть переформулирована и для вогнутой функции, при этом следует учесть, что в таком случае вместо неравенства (5) будет записываться неравенство с противоположным знаком.

Неравенство (5) называется *неравенством Караматы* для выпуклой на промежутке *l* функции.

Предположим сейчас, что функция *f* – логарифмически выпуклая на промежутке *l*. Тогда теорему Б можно применить к функции $\ln f$, в результате будем иметь неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \ln f(v_k) \le \sum_{k=1}^{n} \ln f(u_k),$$

или

$$\prod_{k=1}^{n} f(v_k) \le \prod_{k=1}^{n} f(u_k). \tag{6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема В. Пусть f – логарифмически выпуклая на промежутке l функция и кортежи $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ таковы, что $\overline{v} \prec \overline{u}$, $u_1 \in l$, $u_n \in l$. Тогда справедливо неравенство (6).

Если в приведенных условиях функция *f* является строго логарифмически выпуклой, то неравенство (6) обращается в равенство тогда и только тогда, когда кортежи $\overline{u}$ и $\overline{v}$ совпадают.

Аналогично формулируется теорема о логарифмически вогнутой на промежутке *l* функции. В этом случае знак неравенства в (6) надо сменить на противоположный.

Неравенство (6) условимся называть *неравенством Караматы* для логарифмически выпуклой на промежутке *l* функции.

Теорема В и замечание к ней относительно логарифмически вогнутой функции позволяют сформулировать следующее важное

Следствие 1. Пусть функция *f* является логарифмически выпуклой (логарифмически вогнутой) на промежутке *l* и числа u_1, u_2, v_1, v_2 из этого промежутка таковы, что $u_1 \le v_1 \le v_2 \le u_2$ и $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$. Тогда справедливо неравенство $f(v_1) \cdot f(v_2) \le f(u_1) \cdot f(u_2)$ (соответственно, неравенство $f(v_1) \cdot f(v_2) \ge f(u_1) \cdot f(u_2)$).

Из следствия 1 имеем также

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 функция *f* является строго логарифмически выпуклой или строго логарифмически вогнутой на промежутке *l* и $u_1 < v_1 \le v_2 < u_2$, $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, то справедливы соответственно неравенства

$$f(v_1) \cdot f(v_2) < f(u_1) \cdot f(u_2), \tag{7}$$

$$f(v_1) \cdot f(v_2) > f(u_1) \cdot f(u_2). \tag{8}$$

4. Об уравнениях, порождаемых строго логарифмически выпуклыми или строго логарифмически вогнутыми функциями. В настоящем пункте речь пойдет об уравнениях вида

$$f(v_1(x)) \cdot f(v_2(x)) = f(u_1(x)) \cdot f(u_2(x)), \tag{9}$$

где *f* – либо строго логарифмически выпуклая, либо строго логарифмически вогнутая на некотором промежутке функция.

Справедлива следующая

Теорема Г. Пусть *f* – строго логарифмически выпуклая или строго логарифмически вогнутая на промежутке *l* функция, а функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ таковы, что при всех *x* из области задания *D* уравнения (9) их значения содержатся в *l* и $u_1(x) + u_2(x) = v_1(x) + v_2(x)$. Тогда уравнение (9) на множестве *D* равносильно совокупности уравнений

$$u_1(x) = v_1(x),\ u_1(x) = v_2(x). \tag{10}$$

Доказательство. Очевидно, что если x_0 есть какое-либо решение совокупности (10), принадлежащее области *D*, то оно будет и корнем уравнения (9). Покажем, что справедливо и обратное: всякий корень уравнения (9) является и решением совокупности уравнений (10).

Пусть x_0 – корень (9), не являющийся решением совокупности (10). Тогда справедливы неравенства $u_1(x_0) \ne v_1(x_0)$ и $u_1(x_0) \ne v_2(x_0)$. Для определенности условимся считать, что функция *f* – строго логарифмически выпуклая на промежутке *l*. Пусть также $u_1(x_0) \le u_2(x_0)$. Тогда справедлива одна из четырех цепочек неравенств

$$u_1(x_0) < v_1(x_0) \le v_2(x_0) < u_2(x_0),$$
$$u_1(x_0) < v_2(x_0) \le v_1(x_0) < u_2(x_0),$$
$$v_1(x_0) < u_1(x_0) \le u_2(x_0) < v_2(x_0),$$
$$v_2(x_0) < u_1(x_0) \le u_2(x_0) < v_1(x_0).$$

Отсюда в силу неравенства (7) получаем, что будет выполняться либо неравенство

$$f(v_1(x_0))\cdot f(v_2(x_0)) < f(u_1(x_0))\cdot f(u_2(x_0)),$$

либо неравенство

$$f(u_1(x_0))\cdot f(u_2(x_0)) < f(v_1(x_0))\cdot f(v_2(x_0)),$$

что противоречит предположению относительно корня x_0 уравнения (9).

При условии $u_1(x_0) \geq u_2(x_0)$ рассуждения для получения противоречия выглядят точно так же.

Реализованная схема доказательства повторится и в ситуации, когда функция *f* – строго логарифмически вогнутая на промежутке *l*. В этом случае в рассуждениях придется использовать неравенство (8).

Теорема доказана.

Замечание. Из техники доказательства теоремы Г следует, что при ее формулировании вместо совокупности (10) можно брать равносильные совокупности $u_1(x)=v_1(x)$, $u_2(x)=v_1(x)$; $u_1(x)=v_2(x)$, $u_2(x)=v_2(x)$ или $u_2(x)=v_1(x)$, $u_2(x)=v_2(x)$.

5. Применения теоремы Г. В настоящем разделе мы рассмотрим несколько уравнений, решение которых может быть основано на применении теоремы Г.

Задача 1. Решите уравнение

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2.$$

Данное уравнение на страницах различных литературных источников рассматривалось неоднократно. В частности, систематизации подходов к его решению была посвящена работа [4], в которой рассмотрены 12 способов решения уравнения. Рассмотрим еще один способ нахождения корней обсуждаемого уравнения, использующий применение теоремы Г.

Р е ш е н и е. Уравнение задано на отрезке $[-1;\,1]$, перепишем его в равносильном виде

$$e^{\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}}\cdot e^{\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}}=e^{\sqrt[5]{1}}\cdot e^{\sqrt[5]{1}}. \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что функция $f(t)=e^{\sqrt[5]{t}}$ является строго логарифмически вогнутой на промежутке $[0;+\infty)$, поэтому уравнение (11) есть уравнение вида (9). Кроме того, выражения $u_1=1+\sqrt{1-x^2}$, $u_2=1-\sqrt{1-x^2}$ в области задания исходного уравнения принимают неотрицательные значения, при этом их сумма в точности равна 2 (сумме подкоренных выражений $v_1=1$ и $v_2=1$ в показателях экспоненциальных множителей правой части). Следовательно, в силу теоремы Г уравнение (11) равносильно уравнению

$$1+\sqrt{1-x^2}=1,$$

из которого легко находим искомые корни: $x=\pm 1$.

Задача 2. Решите уравнение [6]

$$\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=4.$$

Р е ш е н и е. Область определения неизвестного есть отрезок $[-15;\,17]$. Перепишем уравнение в виде

$$e^{\sqrt[4]{17-x}}\cdot e^{\sqrt[4]{x+15}}=e^{\sqrt[4]{16}}\cdot e^{\sqrt[4]{16}}. \quad (12)$$

Полагая $u_1=17-x$, $u_2=x+15$, $v_1=v_2=16$, имеем соотношение $u_1+u_2=v_1+v_2$. И так как функция $f(t)=e^{\sqrt[4]{t}}$ является строго логарифмически вогнутой на луче $[0;\,+\infty)$, то для уравнения (12) выполняются все условия теоремы Г. Следовательно, это уравнение на отрезке $[-15;\,17]$ равносильно уравнению

$$17-x=16.$$

Отсюда находим единственный искомый корень исходного уравнения $x=1$.

Задача 3. Решите уравнение [7]

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{3-2x}.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение задано на промежутке $(-\infty;\,1]$. Записав его в мультипликативном виде

$$e^{\sqrt[4]{1-x}} \cdot e^{\sqrt[4]{2-x}} = e^{\sqrt[4]{3-2x}} \cdot e^{\sqrt[4]{0}}, \tag{13}$$

приходим к выводу, что оно сводится к уравнению вида (9) с $f(t)=e^{\sqrt[4]{t}}$, $t \geq 0$; $u_1 = 1-x$, $u_2 = 2-x$, $v_1 = 3-2x$, $v_2 = 0$. На множестве $(-\infty; 1]$ выполняются все условия теоремы Г, поэтому уравнение (13) равносильно совокупности уравнений

$$1-x=3-2x;\ 1-x=0.$$

Корень первого уравнения этой совокупности не входит в область определения рассматриваемого уравнения, а корень $x=1$ второго – входит. Значит, это есть единственный искомый корень.

Задача 4. Решите уравнение [6]

$$x^{2x^2}(x-2)^{x-2} = 27 \cdot \left(x^2 + x - 5\right)^{x^2+x-5}.$$

Р е ш е н и е. Областью определения неизвестного является интервал $(2; +\infty)$, и уравнение, очевидно, имеет вид (9), при этом $f(t)=t^t$, $t \geq 0$; $u_1 = x^2$, $u_2 = x-2$, $v_1 = 3$, $v_2 = x^2 + x - 5$. Поскольку показательно-степенная функция *f* строго логарифмически выпуклая, а также для величин u_1, u_2, v_1, v_2 выполняются условия теоремы Г, то рассматриваемое уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^2 = 3,\ x-2=3.$$

Отсюда, учитывая область задания уравнения, находим его единственный корень $x=5$.

Список литературы

1. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3. Вып. 5. С. 158–163.
2. *Виноградов О. Л.* Математический анализ : учебник. СПб. : БХВ-Петербург, 2017. 752 с.
3. *Калинин С. И.* Логарифмически выпуклые функции, их свойства и некоторые применения // Математика в школе. 2007. № 7. С. 41–50, 76.
4. *Калинин С. И.* Уравнение одно, а сколько решений … целая дюжина! // Математика в профильной школе. Фрактал. 2016. № 1. С. 20–27.
5. *Олехник С. Н.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств : справочник / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. М. : Изд-во МГУ, 1991.
6. *Чучаев И. И., Денисова Т. В.* Выпуклые функции и уравнения // Математика в школе. 2005. № 5. С. 41–47.
7. *Чучаев И. И., Денисова Т. В.* Нетрадиционные задачи по теме «Выпуклые функции» (из опыта преподавания) // Математика в образовании : сб. статей. Вып. 2 / под. ред. И. С. Емельяновой. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2006. С. 189–222.

Karamata inequality for logarithmically convex functions

S. I. Kalinin

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The article reproduces the Karamata inequality for a convex function, and introduces an analog of this inequality – the Karamata inequality for a logarithmically convex function (a logarithmically concave function). The author also offers the reader an understanding of the Karamata inequality for logarithmically convex or logarithmically concave functions in the strict (non-strict) sense for tuples of real numbers consisting of two elements.

Special attention is paid to the problem of solving special-type equations generated by strictly logarithmically convex or strictly logarithmically concave functions. A theorem describing a new method for solving such equations is formulated. As an illustration of the application of this theorem, the paper discusses solutions of equations that the reader may potentially know from various literature sources.

Keywords: convex function, logarithmically convex function, Karamata inequality, equation.

References

1. *Anosov D. V. O summe logarifmicheski vypuklyh funkcij* [On the sum of logarithmically convex functions] // *Matematicheskoe prosveshchenie* – Mathematical education. 2001. Ser. 3. Is. 5. Pp. 158–163.
2. *Vinogradov O. L. Matematicheskij analiz : uchebnik* [Mathematical analysis : textbook]. SPb. BHV-Petersburg. 2017. 752 p.

3. *Kalinin S. I. Logarifmicheski vypuklye funkcii, ih svojstva i nekotorye primeneniya* [Logarithmically convex functions, their properties and some applications] // *Matematika v shkole* – Mathematics in school. 2007. No. 7. Pp. 41–50, 76.

4. *Kalinin S. I. Uravnenie odno, a skol'ko reshenij ... celaya dyuzhina!* [The equation is one, and how many solutions are there... a whole dozen!] // *Matematika v profil'noj shkole* – Mathematics in a specialized school. Fractal. 2016, No. 1. Pp. 20–27.

5. *Olehnik S.N. Nestandartnye metody resheniya uravnenij i neravenstv : spravochnik* [Nonstandard methods for solving equations and inequalities : handbook] / S. N. Olekhnik, M. K. Potapov, P. I. Pasichenko. M. MSU. 1991.

6. *Chuchaev I. I., Denisova T. V. Vypuklye funkcii i uravneniya* [Convex functions and equations] // *Matematika v shkole* – Mathematics in school. 2005. No. 5. Pp. 41–47.

7. *Chuchaev I. I., Denisova T. V. Netradicionnye zadachi po teme "Vypuklye funkcii" (iz opyta prepodavaniya)* [Nontraditional problems on the topic "Convex functions" (from the teaching experience)] // *Matematika v obrazovanii : sb. statej.* – Mathematics in education : collection of articles. Is. 2 / ed. by I. S. Emelyanova. Cheboksary. Chuvash University. 2006. Pp. 189–222.