УДК 512.774 DOI 10.25730/VSU.0536.20.013

О граничных условиях на поверхности раздела газовой и конденсированной фаз

Е. Г. Маясов
старший преподаватель, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Арзамасский филиал). Россия, г. Арзамас. E-mail: eugenemay@yandex.ru

Аннотация.Методы математической теории процессов переноса в разреженных неоднородных газах применены к изучению граничных условий на поверхности раздела газа и жидкости. Получены выражения для коэффициентов скачков тензора напряжений, температуры и концентрации для газа, находящегося у поверхности конденсированной фазы при наличии градиента температуры. Анализ основан на решении кинетического уравнения Больцмана с точным интегралом столкновений для модели молекул, взаимодействующих как твердые сферы. Решение проведено методом полупространственных моментов. Двухпоточная функция распределения молекул газа по скоростям найдена в форме разложения по ортогональным полиномам Сонина – Лагерра в приближении восьми моментов. Исследована зависимость кинетических коэффициентов от коэффициента аккомодации энергии. Проведено сравнение с результатами, полученными ранее другими авторами.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, неоднородный газ, скачок тензора напряжений, скачки температуры и концентрации.

При исследовании динамики жидких аэрозольных частиц (капель) в разреженных газах методами гидродинамики необходима корректная формулировка граничных условий на поверхности частицы. Проблема скачка температуры изучена достаточно подробно, получены надежные результаты [1–5; 11; 12]. В данной работе исследуется поведение тензора напряжений, что необходимо для анализа движения умеренно крупных капель в неоднородных по температуре газах.

Постановка задачи и метод решения. Рассматривается разреженный газ, занимающий полупространство X > 0. Поверхность жидкой фазы совпадает с плоскостью YOZ. Вдали от поверхности раздела фаз поддерживается градиент температуры. Выполняется условие малости градиента на средней длине свободного пробега молекул газа λ.

$$\nabla T = \left\{ {\partial T}/{\partial x}; {\partial T}/{\partial y}; 0 \right\}; \lambda \left| \nabla T \right| / T_s << 1,$$

где T_s – температура поверхности. Вблизи границы раздела фаз формируется слой Кнудсена. Тензор плотности потока импульса раскладывается на гидродинамическую и кинетическую компоненты. Для кинетической моды при стационарном течении газа выполняется закон сохранения импульса в форме

$$\sum_j \partial P_{ij} / \partial x_j = 0,$$

где P_{ij} – кинетическая компонент атензора напряжений. В условиях данной задачи имеем:

$$\partial P_{xy} / \partial x + \partial P_{yy} / \partial y = 0; P_{xy}\,|_{x=0} = m \int_0^{+\infty} v_y^2 f d\mathbf{v}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ – молекулярная скорость, m – масса молекул газа, f – функция распределения. Условие малости градиента позволяет линеаризовать задачу:

$$f = f_s \left[1 + K_n + \left(c^2 - {3}/{2} \right) K_T + \psi + \varphi \right]. \tag{2}$$

Здесь $f_s = n_s \left(m / 2\pi k T_s \right)^{3/2} \exp\left(-c^2 \right)$, n_s – концентрация вблизи поверхности, k – постоянная Больцмана, $\mathbf{c} = \left(2kT_s / m \right)^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость, ψ – функция распределения Чепмена – Энскога [7], φ – подлежащая определению поправочная функция, учитывающая влияние поверхности в слое Кнудсена. Движение газа описывается линеаризованным уравнением Больцмана [7; 8]:

$$\mathbf{v} \nabla f = J\left(f \right),$$

где $J(f)$ – больцмановский интеграл столкновений. Кинетическое уравнение принимает вид

$$c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -n_0 I(\varphi), \tag{3}$$

где $I(\varphi)$ – линеаризованный оператор столкновений [7]:

$$I\left[\varphi(\mathbf{c})\right] = \pi^{-3/2} \int \exp\left(-c_1^2\right)\left[\varphi(\mathbf{c}) + \varphi(\mathbf{c}_1) - \varphi(\mathbf{c}') - \varphi(\mathbf{c}'_1)\right]\left|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}\right| bdbd\varepsilon d\mathbf{c}_1.$$

Из (1) следует, что достаточно учитывать ту часть функции распределения, которая определяется нормальным к поверхности градиентом температуры:

$$\psi = a\left(\lambda / T_s\right) c_x \left(5/2 - c^2\right) \partial T / \partial x.$$

При вязкости газа $\eta = \lambda n \left(2mkT/\pi\right)^{1/2}$ [9] для модели молекул – твердых сфер коэффициент в функции Чепмена – Энскога $a = 3/\sqrt{\pi}$.

Решение уравнения (3) ищется в форме разложения по ортогональным полиномам Сонина – Лагерра [8]:

$$\varphi(x, \mathbf{c}) = \mathbf{a}^+(x)\mathbf{s}(\mathbf{c}) + \mathbf{a}^-(x)\mathbf{s}(\mathbf{c})\operatorname{sign} c_x$$; sign – знаковая функция.

$\mathbf{a}^{\pm}(x) = \left[a_1^{\pm}(x), a_2^{\pm}(x), a_3^{\pm}(x), a_4^{\pm}(x)\right]$ – векторные функции, подлежащие определению;

$$\mathbf{s}(\mathbf{c}) = \left[1, 3/2 - c^2, c_x, c_x\left(5/2 - c^2\right)\right]^T.$$

Решение уравнения (3) проведено методом полупространственных моментов [10; 11]. После умножения (3) на компоненты векторов $\mathbf{s}(\mathbf{c})$ и $\mathbf{s}(\mathbf{c})\operatorname{sign} c_x$ и интегрирования в пространстве скоростей получается система моментных дифференциальных уравнений. Моменты оператора столкновений (bracketintegrals) рассчитаны для модели молекул газа, взаимодействующих как твердые сферы. Убывающее на бесконечности решение имеет следующий вид:

$$a_i^{\pm} = A\alpha_i^{\pm} \exp(-\alpha x) + B\beta_i^{\pm} \exp(-\beta x),$$

где α = 2.31436, β = 1.39366.

$$(\alpha_i^+) = [.5441; -.1398; -.4388; -.0010]^T; (\beta_i^+) = [-.4098; -.6264; .0296; .03090]^T;$$

$$(\alpha_i^-) = [.3409; -.0961; -.6053; .0016]^T; (\beta_i^-) = [-.1941; -.3357; .0272; .4383]^T.$$

Константы интегрирования A и B определяются из моментных граничных условий на поверхности раздела фаз.

Граничные условия. На поверхности жидкой фазы при x=0 функция распределения удовлетворяет модифицированному максвелловскому граничному условию:

$$c_x f^+(0, \mathbf{c}) = c_x q f_s + c_x(1-q) f^-(0, -c_x, c_y, c_z), \tag{4}$$

$$c_x\left[qK_n + q\left(c^2 - 3/2\right)K_T + \varphi^+ + (1-q)\varphi^-(-c_x)\right] = -c_x(2-q)\psi, \tag{5}$$

где q – коэффициент аккомодации энергии; $f_s = n_s\left(m/2\pi kT_s\right)^{3/2}\exp\left(-c^2\right)$. После умножения соотношения (5) на компоненты вектора $\mathbf{s}(\mathbf{c})$ и интегрирования по полупространству $c_x > 0$ получается система четырех моментных граничных условий, из которых находятся величины A, B, K_n и K_T как константы интегрирования.

Обсуждение результатов. По формулам (1) находим:

$$P_{xy}|_{x=0} = K_p \lambda^2 n_s k \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, K_p = a\left(\gamma_1 A/\alpha + \gamma_2 B/\beta\right),$$

$$\gamma_1 = \alpha_1^+ - \alpha_2^+ + \alpha_3^- / \sqrt{\pi} - \alpha_4^- / 2\sqrt{\pi} = 0.34196,$$

$$\gamma_2 = \beta_1^+ - \beta_2^+ + \beta_3^- / \sqrt{\pi} - \beta_4^- / 2\sqrt{\pi} = 0.01083.$$

После перехода к макропараметрам ($\rho_s = mn_s$ – плотность газа) получаем выражение для скачка тензора напряжений у поверхности конденсированной фазы:

$$P_{xy} = C_p \frac{\eta^2}{\rho_s T_s} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}.$$

C_p – коэффициент скачка тензора напряжений:

$$C_p = -\frac{2-q}{q}\left[0.30505 + 0.05862(1-q) + 0.001109(1-q)^2\right]. \qquad (6)$$

В формуле (6) учтены только квадратичные члены с учетом близости коэффициента аккомодации q к единице. Аналогичным образом находятся коэффициенты скачков температуры C_t и концентрации C_n:

$$T_0 - T_s = C_t \lambda \frac{\partial T}{\partial x}; n_0 - n_s = C_n \lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

гдеT_0 и n_0 – температура и концентрация газа вблизи поверхности.

$$C_t = \frac{2-q}{q}\left[2.2083 - 0.27547(1-q) - 0.04778(1-q)^2\right],$$

$$C_n = -\frac{2-q}{q}\left[1.2588 + 0.26758(1-q) + 0.04474(1-q)^2\right].$$

Оценка точности метода может быть проведена путем сравнения с результатами других исследований, проведенных на основе модельного уравнения БГК [8] при полной аккомодации (q = 1).

	Данная работа	[1]	[3]	[4]
C_t	2.2083	2.2049	2.2487	2.15897
C_n	-1.2588	-1.2597	-1.1211	-1.23035

В работе [6] вычислены коэффициенты для модельного уравнения с учетом вращательных степеней свободы (Pr – число Прантля).

Хлор: Pr = 0.67; C_t= 2.157; C_p = 0.247.

Азот: Pr = 0.7; C_t = 1.973; C_p = 0.226.

Список литературы

1. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ, 2008. 280 с.

2. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитическое решение задачи о скачке температурыв металле // Журнал технической физики. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 37–45.

3. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Граничные задачи для модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Известия Академии наук. Механика жидкости и газа. 1996. № 3. С. 140–153.

4. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитическое решение задачи о скачках температуры и плотности пара над поверхностью при наличии градиента температуры // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 70–76.

5. *Поддоскин А. Б.* Влияние неупругих столкновений на скачок температуры двухатомного газа вблизи твердой поверхности // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45. № 3. С. 434–439.

6. *Поддоскин А. Б., Яламов Ю. И.* О коэффициенте скачка температуры и тензора напряжений на границе раздела двухатомного газа с вращательными степенями свободы и конденсированной фазой // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40. № 1. С. 155–159.

7. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах / пер. с англ. Д. Н. Зубарева и А. Г. Башкирова. М.: Мир, 1976. 554 с.

8. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. под ред. Р. Г. Баранцева. М. : Мир, 1978. 495с.

9. *Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.* Boundary value problems in kinetic theory of gases // Ann. Phys. 1957. V. 1. No. 2. Pp. 141–167.

10. *Gross E. P., Ziering S.* Heat flow between parallel plates // Phys. Fluids. 1959. V. 2. No. 6. Pp. 701–712.

11. The temperature jump problems for a variable collision frequencymodel / L. B.Barichello [et al.] // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 1. Pp. 383–391.

12. *Thomas J. R., jr.* Temperature jump problem with arbitrary accommodation // Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 1. Pp. 1162–1164.

On boundary conditions at the interface between gas and condensed phases

E. G. Mayasov
senior lecturer, State University of Nizhny Novgorod n. a. N. I. Lobachevsky (Arzamas branch).
Russia, Arzamas. E-mail: eugenemay@yandex.ru

Abstract. Methods of the mathematical theory of transport processes in rarefied inhomogeneous gases are applied to the study of boundary conditions at the gas-liquid interface. Expressions are obtained for the jump coefficients of the stress tensor, temperature, and concentration for a gas located at the surface of the condensed phase in the presence of a temperature gradient. The analysis is based on solving the Boltzmann kinetic equation with an exact collision integral for the model of molecules interacting as solid spheres. The solution is carried out by the method of half-space moments. The two – flow velocity distribution function of gas molecules is found in the form of an orthogonal Sonin-Laguerre polynomial expansion in the eight-moment approximation. The dependence of kinetic coefficients on the energy accommodation coefficient is investigated. The results obtained earlier by other authors are compared.

Keywords: kinetic Boltzmann equation, non-uniform gas, the jump of stress tensor fluctuations of temperature and concentration.

References

1. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Analiticheskie metody v kineticheskoj teorii* [Analytical methods in kinetic theory]. M. Moscow State University. 2008. 280 p.

2. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Analiticheskoe reshenie zadachi o skachkah temperatury i plotnosti para nad poverhnost'yu pri nalichii gradienta temperatury* [Analytical solution of the problem of temperature jumps and vapor density over the surface in the presence of a temperature gradient] // *Prikladnaya matematika i mekhanika* – Applied mathematics and mechanics. 1994. Vol. 58. Is. 2. Pp. 70–76.

3. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Analiticheskoe reshenie zadachi o skachke temperatury v metalle* [Analytical solution of the problem of temperature jump in metal] // *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki* – Journal of technical physics. 2003. Vol. 73. Is. 7. Pp. 37–45.

4. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A. Granichnye zadachi dlya model'nogo uravneniya Bol'cmana s chastotoj, proporcional'noj skorosti molekul* [Boundary value problems for the model Boltzmann equation with a frequency proportional to the speed of molecules] // *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* – Proceedings of the Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas, 1996. No. 3. Pp. 140–153.

5. *Poddoskin A. B. Vliyanie neuprugih stolknovenij na skachok temperatury dvuhatomnogo gaza vblizi tverdoj poverhnosti* [Influence of inelastic collisions on the temperature jump of a diatomic gas near a solid surface] // *Teplofizika vysokih temperatur* – Thermophysics of high temperatures. 2007. Vol. 45. No. 3. Pp. 434–439.

6. *Poddoskin A. B., Yalamov Yu. I. O koefficiente skachka temperatury i tenzora napryazhenij na granice razdela dvuhatomnogo gaza s vrashchatel'nymi stepenyami svobody i kondensirovannoj fazoj* [Rate zone of the temperature jump and of the stress tensor at the interface diatomic gas with rotational degrees of freedom and the condensed phase] // *Teplofizika vysokih temperatur* – Thermophysics of high temperatures. 2002. Vol. 40. No. 1. Pp. 155–159.

7. *Ferziger J., Kaper G. Matematicheskaya teoriya processov perenosa v gazah* [Mathematical theory of transport processes in gases] / transl. from English by D. N. Zubarev and A. G. Bashkirov. M. Mir. 1976. 554 p.

8. *Cercignani K. Teoriya i prilozheniya uravneniya Bol'cmana* [Theory and applications of the Boltzmann equation] / transl. from Eng. under ed. of R. G. Barantsev. M. Mir. 1978. 495 p.

9. *Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.* Boundary value problems in kinetic theory of gases // Ann. Phys. 1957. V. 1. No. 2. Pp. 141–167.

10. *Gross E. P., Ziering S.* Heat flow between parallel plates // Phys. Fluids. 1959. V. 2. No. 6. Pp. 701–712.

11. The temperature jump problems for a variable collision frequency model / L. B. Barichello [et al.] // Phys. Fluids. 2002. V. 14. No. 1. Pp. 383–391.

12. *Thomas J. R., jr.* Temperature jump problem with arbitrary accommodation // Phys. Fluids. 1973. V. 16. No. 1. Pp. 1162–1164.