УДК 517.5 DOI 10.25730/VSU.0536.20.019

Определение понятия «выпуклая функция», многообразие подходов

М. Р. Шабалина
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5389-3306. E-mail: usr01589@vyatsu.ru

Аннотация. Фундаментализация обучения как одно из направлений реформирования системы инженерного образования определило тенденцию к более тщательному отбору содержания обучения по математическим дисциплинам, направленного на формирование стройной и логичной системы математических знаний у студентов инженерно-технических специальностей. В связи с этим дефиниция базовых, системообразующих понятий приобретает особое значение. Необходимость глубокого понимания обучающимися сути математических понятий для успешного решения задач прикладного характера требует переосмысления некоторых вопросов, изучаемых в курсе математики. Так, многообразие подходов к определению понятия «выпуклая функция», несогласованность, в ряде случаев терминологии затрудняют восприятие студентами данной темы как целостной и логически обоснованной. Исследованию существующих подходов к определению понятия «выпуклая функция» посвящена данная статья.

Ключевые слова: выпуклая функция, неравенство Йенсена, выпуклость графика функции вниз, выпуклость графика функции вверх.

Возросшие требования образовательных стандартов к результатам обучения по дисциплине «Математика» выпускников инженерно-технических направлений подготовки определили устойчивую тенденцию к внедрению информационно-коммуникационных ресурсов при организации самостоятельной работы студентов. При реализации новых стратегий образования, нацеленных на самоорганизацию процесса познания и утверждение ценности развития индивидуальности обучающегося, особое значение приобретает формирование у студентов стройной и логичной системы математических знаний и методов, являющихся универсальным инструментом в решении естественнонаучных и технических задач. Несмотря на то что базовый курс математики, изучаемый в технических вузах, обладает устоявшимися традициями, тем не менее изложение некоторых вопросов этого курса нуждается в переосмыслении. Примером может служить тема «Производная функции одного действительного переменного и ее приложения», в частности, вопрос исследования функции на выпуклость. Студенты, использующие различные источники при изучении данного вопроса, порой сталкиваются с не согласующимися друг с другом определениями понятия «выпуклая функция». Как правило, это приводит к возникновению у студентов ощущения противоречивости определений.

Рассмотрим определение понятия «выпуклость функции» («выпуклость графика функции») в учебниках и задачниках, наиболее востребованных в технических вузах и классических университетах.

Выпуклые функции как объект исследования впервые появились в работах И. Йенсена. Вводя понятие «выпуклая функция», И. Йенсен опирался на понятие «выпуклое множество». А именно: функция действительного переменного $f(x)$, определенная на некотором интервале $(a; b)$, называется выпуклой на этом интервале, если для любых $x_1, x_2 \in (a;b)$, $a < x_1 < x_2 < b$ выполняется условие

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

С геометрической точки зрения это означает, что середина любой хорды графика выпуклой функции $f(x)$ с абсциссой $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ лежит либо над графиком, либо на нем.

Авторы университетских учебников и задачников, формулируя определение выпуклой функции, придерживаются исторически сложившегося подхода, опирающегося на понятие выпуклого множества. Так Г. М. Фихтенгольц дает следующее определение выпуклой функции.

«Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке X, называется выпуклой (выпуклой вниз), если для любых точек x_1 и x_2 из X ($x_1 < x_2$) выполняется неравенство

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \le q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2),$$

каковы бы ни были положительные числа q_1 и q_2, в сумме дающие единицу. Функция называется вогнутой (выпуклой вверх), если

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \ge q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2).$$

Таким образом, выпуклая функция характеризуется тем, что все точки любой дуги ее графика лежат под соответствующей хордой или на ней. Одновременно с самой функцией $f(x)$ выпуклой (вогнутой) называют и кривую $y = f(x)$» [7, с. 294–295].

В современных учебниках по математике для инженерно-технических направлений подготовки при определении выпуклости функции и ее графика, как правило, авторы за основу берут геометрическую интерпретацию классического определения выпуклой функции. Так, например, Л. Д. Кудрявцев дает следующее определение.

«Функция f называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a; b)$, если, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x_0 интервала $(x_1; x_2)$ выполняется неравенство $l(x_0) \le f(x_0)$ (соответственно, $l(x_0) \ge f(x_0)$), где функция $l(x) = \dfrac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_1 - x_2}$ задает на плоскости прямую, проходящую через точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; f(x_2))$» [5, с. 191].

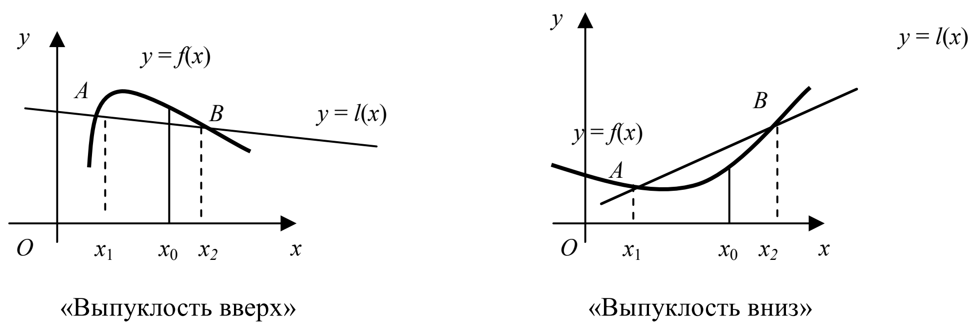

Рис. 1

Геометрически это означает, что любая точка хорды *AB* (т. е. отрезок прямой $y = l(x)$ с концами в точках *A* и *B*) лежит не выше (не ниже) точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента.

Как мы видим, функция считается выпуклой вверх для того случая, когда выпуклым множеством является часть плоскости, лежащая под графиком функции, т. е. речь идет о вогнутой функции в классическом понимании.

Придерживаясь такой же трактовки понятия «выпуклая функция», А. В. Ефимов и А. С. Поспелов дают следующее определение выпуклости графика функции.

«График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вниз (или вогнутым вверх) на интервале $(a; b)$, если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a; b)$. Если на интервале $(a;b)$ всякая касательная расположена выше дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется выпуклым вверх (или вогнутым вниз)» [2, с. 91]. Аналогичное определение выпуклой функции дают Н. С. Пискунов, В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.

Насколько это определение универсально для обучающихся, можно судить по тем задачам, решение которых рассматривается в учебниках для втузов. Например, Н. С. Пискунов в учебнике «Дифференциальное и интегральное исчисления», демонстрируя приложения теории дифференциальных уравнений высшего порядка к решению задач из курса сопротивления материалов, рассматривает упругую призматическую балку, изгибающуюся под действием внешних сил, как непрерывно распределенных (вес, нагрузка), так и сосредоточенных [6, с. 62]. Решение серии задач сопровождается рисунком 2 и комментарием: «Направим ось *Ox* горизонтально, по оси балки в ее недеформированном состоянии, ось *Oy* – вертикально вниз».

Далее следует условие задачи. «Балка наглухо закреплена в конце *O* и подвергается действию сосредоточенной вертикальной силы *P*, приложенной к концу балки *L* на расстоянии *l* от места закрепления (рис. 2). Изгибающий момент относительно сечения *N* в данном случае равен $M(x)=(l-x)P$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид $y''=\frac{P}{EJ}(l-x)$» [6, с. 62].

Анализируя значение y'' на интервале $(0;l)$, мы приходим к выводу, что $y''>0$ при $\forall x\in(0;\ l)$, следовательно, график функции $y=f(x)$, характеризующий форму балки, является выпуклым вниз согласно тому признаку выпуклости, которое было дано автором. На рисунке 2 мы видим кривую, выпуклую вверх. Конечно, все приходит в соответствие, если мы меняем направление оси ординат. Но при этом график функции не будет соответствовать реальной форме нагруженной балки.

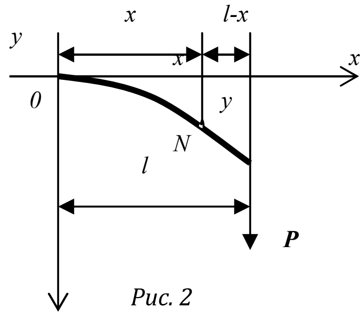

Рис. 2

Для любого инженера важна техническая сторона проблемы. С технической точки зрения логичнее рассматривать выпуклость функции в контексте выпуклости множества. Следует заметить, что Иоганн Людвиг Йенсен научному сообществу более известен как инженер, исследующий вопросы математики с точки зрения проблем, возникающих при решении инженерных задач.

Справедливости ради, следует отметить, что в ряде учебников по математике для технических вузов выпуклость графика функции трактуют в соответствии с первоначально сложившейся классической терминологией. Так, например, Л. Берс выпуклость функции определяет следующим образом. «Если в некотором интервале $f''>0$, то f' возрастает. Это означает, что при движении вдоль кривой слева направо *наклон касательной к графику возрастает*: касательная поворачивается в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки».

График при этом «изгибается вверх», «выпячивается вниз». Такая функция называется выпуклой, а график ее – выпуклым вниз, или вогнутым вверх. Аналогично, если в некотором интервале $f''<0$, то f' убывает, касательная вращается по часовой стрелке. Такая функция называется вогнутой, а ее график – вогнутым вниз, или выпуклым вверх [1, с. 212].

Наиболее полное и системное исследование класса выпуклых функций содержится в монографии Г. Харди, Дж. Литвулд и Г. Пойа «Неравенства». Рассматривая выпуклую функцию как функцию, удовлетворяющую в некотором интервале условию $\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$, авторы обращают внимание на то, что геометрически это неравенство «выражает, что середина любой хорды кривой $y=\varphi(x)$ лежит над этой кривой или на ней; под кривой здесь следует понимать любой, не обязательно непрерывный, график». Неравенство $\varphi(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1\varphi(x_1)+q_2\varphi(x_2)$ (для всех *q*) выражает, что вся хорда лежит над кривой или на ней, а общее неравенство $\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}q_k\varphi(x_k)$ (неравенство Йенсена) для любых чисел $q_k>0,\ \sum_{k=1}^{n}q_k=1,\ n\in N$, утверждает то же самое относительно центра тяжести любого числа произвольно взвешенных точек. «Геометрически очевидно, что если кривая непрерывна, то из самого слабого условия $\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$ следует более сильное $\varphi(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1\varphi(x_1)+q_2\varphi(x_2)$» [8, с. 91]. Именно это условие Г. Харди, Дж. Литвулд и Г. Пойа считают наиболее «естественным» определением выпуклости функции.

Несогласованность в трактовке понятия выпуклости функции заставляет некоторых вузовских преподавателей математики искать компромиссные решения. Так, например, в своей статье «Подходы к определению понятия выпуклости и вогнутости графика функции» И. К. Зубова и Е. Н. Рассоха утверждают, что «многие авторы учебников для физико-математических специальностей определяют эти понятия с аналитической точки зрения». А именно: «график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(a;\,b)$, называется выпуклым вверх в данном интервале, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a;\,b)$ и любого числа $l \in (0;\,1)$ имеет место неравенство $f(lx_1 + (1-l)x_2) > l\,f(x_1) + (1-l)f(x_2)$, в частности имеет место неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Выпуклость вниз определяется аналогично, но при этом изменяется знак неравенства на противоположный» [3]. На лицо попытка совместить классический подход к определению выпуклости функции с общепринятой в большинстве учебников и сборников задач по математике для технических вузов терминологией. Некорректность этой попытки заключается в том, что неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ по Йенсену определяет строго вогнутую функцию. У авторов статьи данное неравенство имеет место для точек графика функции, выпуклой вверх.

Таким образом, отсутствие единства математического сообщества в определении понятия «выпуклая функция» не способствует формированию у студентов логичной и стройной системы знаний по данной теме, столь необходимой для успешного решения задач прикладного характера и требующих более глубокого понимания сути математических понятий.

На наш взгляд, для формирования у студентов целостного представления о выпуклости функции на заданном интервале, как минимум, преподавателям математики в процессе изучения данной темы стоит обратить внимание на существование многообразия подходов к определению этого понятия. В какой-то мере это позволит студентам при обращении к различным информационным ресурсам не воспринимать определения выпуклости функции как противоречащие друг другу.

Список литературы

1. *Берс Л.* Математический анализ : учеб. пособие для втузов : в 2 т. Т. 1 / пер. с англ. Л. И. Головиной ; под ред. И. М. Яглома. М. : Высшая школа, 1975. 519 с.
2. *Ефимов А. В.* Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов : в 4 ч. Ч. 2 / под общ. ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. М. : Физматлит, 2004. 432 с.
3. *Зубова И. К.*, *Рассоха Е. Н.* Подходы к определению понятия выпуклости и вогнутости графика функции // Вестник ОГУ № 9 (115) / Оренбургский государственный ун-т. Оренбург, 2010. С. 30–34.
4. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: учеб. пособие для втузов : в 2 ч. Ч. 1. Изд. 3-е. М. : Наука, 1971. 600 с.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ : в 2 т. Т. 1. М. : Высшая школа, 1970. 571 с.
6. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : учеб. пособие для втузов : в 2 т. Т. 1. Изд. 13-е. М. : Наука, 1985. 432 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. Т. 1. М. : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961. 600 с.
8. *Харди Г. Г., Литвулд Дж. К., Пойа Г.* Неравенства : пер. с англ. Изд. 3-е. URSS, 2008. 456 с.

Definition of the concept "convex function", variety of approaches

M. R. Shabalina

PhD of Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5389-3306. E-mail: usr01589@vyatsu.ru

Abstract. The fundamentalization of training as one of the directions of reforming the system of engineering education has determined the trend towards a more thorough selection of the content of training in mathematical disciplines, aimed at forming a coherent and logical system of mathematical knowledge among students of engineering and technical specialties. In this regard, the definition of basic, system-forming concepts is of particular importance. The need for a deep understanding of the essence of mathematical concepts for students to successfully solve applied problems requires rethinking some of the issues studied in the course of mathematics. Thus, the variety of approaches to the definition of the concept of "convex function", inconsistency, and in some cases terminology make it difficult for students to perceive this topic as a holistic and logically sound. This article is devoted to the study of existing approaches to the definition of the concept of "convex function".

Keywords: convex function, Jensen's inequality, convexity of the function graph down, convexity of the function

graph up.

References

1. *Bers L. Matematicheskij analiz : ucheb. posobie dlya vtuzov : v 2 t. T. 1* [Mathematical analysis : manual for higher technical schools : in 2 vols. Vol. 1] / transl. from English by L. I. Golovina ; ed. by I. M. Yaglom. M. Vysshaya shkola. 1975. 519 p.

2. *Efimov A. V. Sbornik zadach po matematike dlya vtuzov : ucheb. posobie dlya vtuzov : v 4 ch. Ch. 2* [Collection of problems in mathematics for higher education institutions : manual for higher technical schools : in 4 parts. Part 2] / under the general ed. by A.V. Efimov, A. S. Pospelov. M. Fizmatlit. 2004. 432 p.

3. *Zubova I. K., Rassoha E. N. Podhody k opredeleniyu ponyatiya vypuklosti i vognutosti grafika funkcii* [Approaches to defining the concept of convexity and concavity of a function graph] // *Vestnik OGU № 9 (115)* – Herald of OSU No. 9 (115) / Orenburg State University. Orenburg. 2010. Pp. 30–34.

4. *Il'in V. A., Poznyak E. G. Osnovy matematicheskogo analiza: ucheb. posobie dlya vtuzov : v 2 ch. Ch. 1. Izd. 3-e* [Fundamentals of mathematical analysis : manual for higher technical schools : in 2 parts. Part 1. Ed. 3d] M. Nauka. 1971. 600 p.

5. *Kudryavcev L. D. Matematicheskij analiz : v 2 t. T. 1* [Mathematical analysis : in 2 vols. Vol. 1]. M. Vysshaya shkola. 1970. 571 p.

6. *Piskunov N. S. Differencial'noe i integral'noe ischisleniya dlya vtuzov : ucheb. posobie dlya vtuzov : v 2 t. T. 1. Izd. 13-e* [Differential and integral calculus for higher technical education institutions : textbook for higher technical schools : in 2 vols. Vol. 1. Ed. 13d]. M. Nauka. 1985. 432 p.

7. *Fichtenholz G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya : v 2 t. T. 1* [Course of differential and integral calculus : in 2 vols. Vol. 1]. M. State publishing house of physical and mathematical literature. 1961. 600 p.

8. *Hardy G. G., Litvuld Dzh. K., Poya G. Neravenstva : per. s angl. Izd. 3-e* [Inequalities : transl. from English]. Ed. 3d. URSS. 2008. 456 p.