УДК 512.644 DOI 10.25730/VSU.0536.20.016

Уравнения в алгебре множеств и методы их решения

Т. Г. Смирнова
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
Россия, г. Нижний Новгород. E-mail: smirnova-stg@yandex.ru

Аннотация. В алгебре множеств имеется своя теория решения уравнений, представляющих собой некоторые теоретико-множественные соотношения над множествами, среди которых имеется неизвестное множество X. Под решением уравнения понимается не только нахождение X, но и описание необходимых и достаточных условий существования решений данного уравнения. Теория решения уравнений естественным образом обобщается на случай системы нескольких уравнений с одним неизвестным. В данной работе систематизированы основные методы решения теоретико-множественных уравнений, используемые автором в течение ряда лет в институте информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского в курсе дискретной математики при изучении темы «Решение уравнений в алгебре множеств». Материалы могут быть полезны молодым преподавателям.

Ключевые слова: множество, уравнение в алгебре множеств, диаграмма Венна.

Курс дискретной математики является годовым и читается студентам первого курса института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Начинается курс с изучения алгебры множеств. Этот раздел дискретной математики составляет общую основу различных математических дисциплин, а детальное изучение алгебры множеств подготавливает студентов к лучшему восприятию других тем дискретной математики, таких как алгебра логики, комбинаторика, бинарные отношения.

На первой же лекции, как правило, выясняется, насколько разным является уровень подготовки вчерашних школьников. Многие из них путаются в обозначениях операций над множествами, затрудняются в использовании отношений включения и принадлежности, особенно в тех случаях, когда множество содержит в качестве элемента другое множество, например, пустое. Поэтому актуальной задачей преподавателя становится следующая проблема: научить студентов правильно использовать теоретико-множественную символику и уверенно владеть основными понятиями курса дискретной математики.

В классических задачниках по дискретной математике традиционно предлагаются стандартные задачи на выполнение теоретико-множественных операций над множествами, на доказательства и опровержения тождественных соотношений. Многие из этих задач ориентированы на студентов со скромной математической подготовкой. Однако, если уровень академической группы оказывается выше среднего, имеет смысл разнообразить типы задач по алгебре множеств. С интересом студенты воспринимают предложение научиться решать уравнения и системы уравнений в алгебре множеств, ведь теория решения таких уравнений существенно отличается от теории решения алгебраических уравнений [1; 3; 4]. В работе автор делится своим опытом преподавания этой темы студентам.

Следующие утверждения будем применять для преобразования уравнений и условий, вытекающих из уравнений. Они легко доказываются, можно предложить студентам доказать их в качестве упражнений.

Лемма 1. $A \subseteq B$ в том и только том случае, если $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Лемма 2. $A = B$ в том и только том случае, если $A \otimes B = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$.

Приступая к изучению методов решения уравнений, полезно предложить студентам решить простейшие уравнения, такие как:

1) $AX = \varnothing$;
2) $A\overline{X} = \varnothing$;
3) $AX \cup B\overline{X} = \varnothing$.

Как правило, студенты начинают перечислять частные решения первых двух уравнений, и лишь немногие из них могут дать верный ответ. Предложить решения для третьего уравнения у них уже не получается, оно по началу кажется им очень сложным.

Рассмотрим аналитический метод решения уравнения

$$\varphi(A_1, A_2, ..., A_k, X) = \psi(A_1, A_2, ..., A_k, X), \tag{1}$$

где A_1, A_2,..., A_k – подмножества универсального множества U, X – неизвестное множество.

Множество X_0 называется частным решением уравнения, если при его подстановке в уравнение (1) получается верное тождество. Совокупность всех частных решений есть общее решение уравнения (1).

Воспользуемся леммой 2 и запишем уравнение (1) в виде:

$$\varphi(A_1, A_2, ..., A_k, X) \otimes \psi(A_1, A_2, ..., A_k, X) = \varnothing. \tag{2}$$

Применяя основные тождества алгебры множеств, уравнение (2) может быть приведено к виду:

$$F_1 X \cup F_2 \overline{X} \cup F_3 = \varnothing, \tag{3}$$

где F_1, F_2 и F_3 – множества, не содержащие переменной X.

Согласно лемме 1, из первого условия $F_1 X = \varnothing$ соотношения (3) следует $X \subseteq \overline{F}_1$, из второго условия $F_2 \overline{X} = \varnothing$ получаем включение $F_2 \subseteq X$. Значит, решением является любое множество X, удовлетворяющее условиям $F_2 \subseteq X \subseteq \overline{F}_1$, которые в свою очередь имеют место в том и только том случае, если $F_2 \subseteq \overline{F}_1$, что равносильно условию $F_1 F_2 = \varnothing$.

Таким образом, уравнение (3) имеет решение тогда и только тогда, когда множества F_1, F_2 и F_3 удовлетворяют соотношению

$$F_1 F_2 \cup F_3 = \varnothing. \tag{4}$$

Условия (4) будем называть необходимыми и достаточными условиями существования решения уравнения (3).

После того как записано общее решение теоретико-множественного уравнения, полезно попросить студента оценить число различных решений уравнения. Он должен понимать, что различные решения уравнения получаются, если к «наименьшему» (по числу элементов) решению $X_0 = F_2$ добавлять любые подмножества разности $\overline{F}_1 - F_2 = \overline{F}_1 \overline{F}_2$. Всего таких подмножеств будет $2^{\left|\overline{F}_1 \overline{F}_2\right|}$ – это число различных решений уравнения (3).

Очень полезной может оказаться запись общего решения в параметрической форме: $X = \overline{F}_2 \cup K \overline{F}_1 \overline{F}_2$, где параметр K – произвольное множество из $\overline{F}_1 \overline{F}_2$. Удобство записи решения уравнения в параметрической форме состоит в том, что проверку полученного решения можно выполнить непосредственной подстановкой его в исходное уравнение.

Пример 1. Решите и исследуйте уравнение $X - A = \overline{B}$. Под исследованием понимается установление условий существования и нахождение числа решений (мощности заданных множеств A, B и универса U будем считать известными).

Решение. Согласно лемме 2, уравнение равносильно следующему: $(X - A) \otimes \overline{B} = X\overline{A} \otimes \overline{B} = \varnothing$. Преобразуя левую часть, приводим его к уравнению вида (3): $(X\overline{A} - \overline{B}) \cup (\overline{B} - X\overline{A}) = \overline{A}BX \cup \overline{B}\,\overline{X} \cup \overline{B}A = \varnothing$, которое распадается на систему условий:

1) $\overline{A}BX = \varnothing$, равносильное $X \subseteq \overline{\overline{A}B} = A \cup \overline{B}$.

2) $\overline{B}\,\overline{X} = \varnothing$, равносильное $\overline{B} \subseteq X$.

3) $\overline{B}A = \varnothing$.

Решением является любое множество X, удовлетворяющее условиям $\overline{B} \subseteq X \subseteq A \cup \overline{B}$. Замечаем, что $\overline{B} \subseteq A \cup \overline{B}$ при любых A и B.

Условие $\overline{B}A=\varnothing$, по лемме 1 равносильное условию $A\subseteq B$, представляет собой необходимое и достаточное условие существования решения. Запишем решение уравнения в параметрической форме: $X=\overline{B}\cup K\left(\left(A\cup\overline{B}\right)-\overline{B}\right)=\overline{B}\cup KAB=\overline{B}\cup KA$, где K – произвольное множество из A. Различные решения получаются, если к «наименьшему» решению $X_0=\overline{B}$ добавлять различные подмножества множества A. Всего таких подмножеств будет $2^{|A|}$ – это число различных решений уравнения.

Рассмотрим теперь графический способ решения уравнения с помощью диаграмм Венна [1], которые представляют собой удобный инструмент для наглядного представления множеств и операций над ними. Иногда диаграммы Венна изображают в виде кругов Эйлера, но уже в случае системы из четырех множеств такое представление становится проблематичным.

Известно, что диаграмма Венна для системы n множеств представляет собой разбиение прямоугольника, который соответствует универсальному множеству, на 2^n клеток.

При $n=1$ диаграмма Венна состоит из двух клеток (рис. 1):

A_1	$\overline{A}_1$

Рис. 1

На рис. 2 мы видим диаграммы Венна при $n=2$ и $n=3$.

	A_1	$\overline{A}_1$
A_2		
$\overline{A}_2$		

	A_1		$\overline{A}_1$	
A_2				
$\overline{A}_2$				
	A_3	$\overline{A}_3$	A_3	$\overline{A}_3$

Рис. 2

Легко понять, как построить диаграмму Венна для любого n. Воспользуемся следующим способом построения: рассмотрим диаграмму Венна для $n-1$ множеств и разделим пополам каждую ее клетку либо вертикальной, либо горизонтальной прямой. После выполненного деления каждой клетки на две части одну из них отнесем к A_n, а другую – к $\overline{A}_n$.

Итак, было установлено, что всякое уравнение (1) равносильно уравнению вида (3). Отметим полученные условия $F_1X\cup F_2\overline{X}\cup F_3=\varnothing$ на диаграмме Венна. Договоримся коэффициенты уравнения изображать по вертикали, а неизвестное множество X – по горизонтали (рис. 3).

	F_1				$\overline{F}_1$			
	F_2		$\overline{F}_2$		F_2		$\overline{F}_2$	
X	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$	
$\overline{X}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	
	F_3	$\overline{F}_3$	F_3	$\overline{F}_3$	F_3	$\overline{F}_3$	F_3	$\overline{F}_3$

Рис. 3

Теперь можно полностью исследовать наше уравнение по диаграмме Венна. В силу того, что необходимые и достаточные условия существования решения представляют собой соотношения, не зависящие от неизвестной переменной X, на диаграмме Венна эти условия задаются столбиком из двух пустых клеток. Для уравнения (3) получили пять пустых столбцов, которые могут быть описаны условием $F_1F_2 \cup F_3 = \varnothing$.

Решение X образуют непустые клетки диаграммы $\overline{F}_1F_2\overline{F}_3X$ и $\overline{F}_1\overline{F}_2\overline{F}_3X$. Заметим, что все элементы из первой клетки всегда принадлежат решению X, так как $\overline{F}_1 F_2 \overline{F}_3 \overline{X} = F_2 \overline{X} = \varnothing$, и образуют наименьшее по включению решение уравнения. Таким образом, $F_2 \subseteq X$. Наибольшее по включению решение образуют все элементы из объединения обеих клеток, т. е. $\overline{F}_1$. Заключаем, что решением является любое множество X, удовлетворяющее условиям $F_2 \subseteq X \subseteq \overline{F}_1$.

Пример 2. Покажем теперь, как применяется графический метод для решения уравнения из примера 1.

Решение. Уравнение $X - A = \overline{B}$ после упрощений было приведено к виду $\overline{A}BX \cup \overline{B}\,\overline{X} \cup \overline{B}A = \varnothing$. Отметим далее полученные условия на диаграмме Венна (рис. 4).

Необходимое и достаточное условие существования решения задается условием $A\overline{B} = \varnothing$, которому соответствует пустой столбик диаграммы.

	A		$\overline{A}$	
X		$\varnothing$	$\varnothing$	
$\overline{X}$		$\varnothing$		$\varnothing$
	B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$

Рис. 4

Наименьшее по включению решение $X_0 = \overline{B}$, а наибольшее – $A \cup \overline{B}$. Получаем, что решением является любое множество *X*, удовлетворяющее условиям $\overline{B} \subseteq X \subseteq A \cup \overline{B}$.

Рассмотрим решение исходного уравнения для конкретных множеств A, B, для которых имеет место $A\overline{B} = \varnothing$ или $A \subseteq B$. Пусть $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$. Заполним диаграмму Венна для этого уравнения (см. рис. 5).

	A		$\overline{A}$	
X		$\varnothing$	$\varnothing$	b
$\overline{X}$		$\varnothing$	d, e	$\varnothing$
	B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$

Рис. 5

Имеем четыре способа разместить элементы множества A в клетку ABX, так как $2^{|A|} = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, значит, решением уравнения является любой элемент из множества $\{\{b\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{b, a, c\}\}$.

Пример 3. Решите и исследуйте уравнение $AX \cup B\overline{X} = \varnothing$.

Решение. Будем решать это простейшее уравнение с помощью графического метода решения. На рис. 6 представлена диаграмма Венна, заполненная требуемыми условиями для решения уравнения.

	A		$\overline{A}$	
X	$\varnothing$	$\varnothing$		
$\overline{X}$	$\varnothing$		$\varnothing$	
	B	$\overline{B}$	B	$\overline{B}$

Рис. 6

Необходимое и достаточное условие существования решения задается условием $AB = \varnothing$, которому соответствует пустой столбик диаграммы.

Наименьшее по включению решение $X_0 = \overline{A}B$, а наибольшее – $\overline{A}$. Получаем, что решением является любое множество *X*, удовлетворяющее условиям $\overline{A}B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Решение в параметрической форме будет иметь вид: $X = \overline{A}B \cup K\overline{A}\overline{B}$, где параметр K – произвольное подмножество из $\overline{A}\overline{B}$. Число различных решений равно $2^{\left|\overline{A}\overline{B}\right|}$.

Описанные методы решения уравнений можно применять и для решения систем уравнений с одним неизвестным.

Пример 4. Решите и исследуйте систему уравнений

$$\begin{cases} AX = B \cup X, \\ A \cup X = CX. \end{cases}$$

Решение. С помощью равносильных преобразований приведем каждое уравнение исходной системы к уравнению вида (3).

$$\begin{cases} AX \otimes \left(B \cup X\right) = \varnothing, \\ \left(A \cup X\right) \otimes CX = \varnothing. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}X \cup B\overline{X} \cup \overline{A}B = \varnothing, \\ \overline{C}X \cup A\overline{X} \cup A\overline{C} = \varnothing. \end{cases}$$

Все полученные условия отметим на диаграмме Венна, которая представлена на рис. 7, и воспользуемся графическим методом решения.

	A				$\overline{A}$			
	B		$\overline{B}$		B		$\overline{B}$	
X		$\varnothing$		$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\overline{X}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$		
	C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$

Рис. 7

Необходимым и достаточным условиям существования решения системы уравнений соответствуют пустые столбики диаграммы: $A\overline{C} \cup \overline{A}B = \varnothing$, что равносильно условиям $B \subseteq A \subseteq C$.

Наименьшее по включению решение $X_0 = ABC \cup A\overline{B}C$ в силу полученных условий существования решения приводится к виду $X_0 = A$, оно же является и наибольшим по включению.

Получаем, что система уравнений имеет единственное решение $X = A$ тогда и только тогда, когда множества A, B, C удовлетворяют условиям $B \subseteq A \subseteq C$.

В заключение приведем вариант контрольной работы, которую студенты должны выполнить после изучения алгебры множеств. Полный комплект этой контрольной работы из 30 вариантов можно найти в статье [2], там же приведены и ответы на задания.

Вариант 1.

1. Доказать или опровергнуть утверждение $(A \otimes BC) \otimes (BC \otimes (A \otimes B)) = B$.

2. В универсе $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ заданы множества $A = \{x \mid x \le 4\}$, $B = \{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $C = \{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$, $D = \{x \mid x$ – простое$\}$, $E = \{1,\ 2,\ 6,\ 7\}$. Найдите множества: $A \otimes B\overline{D}E$; $C\overline{A} \times (E - D)$; $2^{AC} - 2^{\overline{E}}$.

3. Упростите систему условий

$$\begin{cases} A \subseteq \overline{B} \otimes \overline{C}; \\ AD \subseteq B \otimes \overline{C}; \\ AB \subseteq C \cup D; \\ AC \subseteq C\,(B \cup D). \end{cases}$$

4. Решите и исследуйте уравнение $(A \otimes B) \otimes X = AB$.

5. Решите и исследуйте систему уравнений

$$\begin{cases} AX = AC, \\ BX = BC, \\ CX = AB. \end{cases}$$

6. Равносильны ли системы условий:

$$\begin{cases} A \cup B \subseteq C; \\ C \cup B \subseteq A \cup D; \\ C \cup A \subseteq D \cup B; \\ AC \subseteq B; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B; \\ B \subseteq C \subseteq B \cup D. \end{cases}$$

Список литературы

1. *Киселева Л. Г., Смирнова Т. Г.* Диаграммы Венна в курсе дискретной математики // Математика в высшем образовании. 2008. № 6. С. 53–66.

2. *Киселева Л. Г., Смирнова Т. Г.* В помощь преподавателю: контрольные задания по алгебре множеств // Математика в высшем образовании. 2013. № 11. С. 21–30.

3. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 256 с.

4. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М. : Просвещение, 1968. 231 с.

Equations in set algebra and methods for solving them

T. G. Smirnova
PhD of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of algebra,
geometry and discrete mathematics, Institute of information technologies, mathematics and mechanics,
National Research Nizhny Novgorod State University n. a. N. I. Lobachevsky.
Russia, Nizhny Novgorod. E-mail: smirnova-stg@yandex.ru

Abstract. The algebra of sets has its own theory of solving equations, which are some set-theoretic relations over sets, among which there is an unknown set. The solution of an equation is understood not only to find but also to describe the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to this equation. The theory of solving equations is naturally generalized to the case of a system of several equations with one unknown. This paper systematizes the main methods for solving set-theoretic equations used by the author for a number of years at the Institute of information technologies, mathematics and mechanics of Lobachevsky Nizhny Novgorod State University in the course of discrete mathematics when studying the topic "Solving equations in the algebra of sets". The materials may be useful for young teachers.

Keywords: set, equation in the algebra of sets, Venn diagram.

References

1. *Kiseleva L. G., Smirnova T. G. Diagrammy Venna v kurse diskretnoj matematiki* [Venn diagrams in the course of discrete mathematics] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2008. No. 6. Pp. 53–66.

2. *Kiseleva L. G., Smirnova T. G. V pomoshch' prepodavatelyu: kontrol'nye zadaniya po algebre mnozhestv* [To help the teacher: control tasks on set algebra] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2013. No. 11. Pp. 21–30.

3. *Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoj logiki i teorii algoritmov* [Problems in set theory, mathematical logic and algorithm theory]. M. FIZMATLIT. 2004. 256 p.

4. *Stoll R. Mnozhestva. Logika. Aksiomaticheskie teorii* [Sets. Logic. Axiomatic theories]. M. Prosveshchenie. 1968. 231 p.