МАТЕМАТИКА

УДК 514.126 DOI 10.25730/VSU.0536.21.008

Свойства седловых поверхностей галилеева пространства

А. Артикбаев[1], Т. Н. Сафаров[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта.
Узбекистан, г. Ташкент. E-mail: aartykbaev@mail.ru
[2]доктор философских наук по геометрии и топологии, кафедра алгебры и геометрии,
Термезский государственный университет.
Узбекистан, г. Термез. E-mail: tolqin.1986@mail.ru

Аннотация. В работе изучены седловые поверхности галилеева пространства, которые являются пространством с вырожденной метрикой. Исследованы поверхности вращения, доказано, что дефект кривизны поверхности равен нулю. Определен класс поверхностей вращения постоянной кривизны.

Изучены седловые поверхности галилеева пространства и разделены на два типа: седловая и циклическая седловая. Доказано, что не существует движение галилеева пространства, преобразующее поверхности одного типа в другой. Даны примеры седловых поверхностей разного типа, которые в евклидовом пространстве равны. Изучены седловые поверхности переноса.

Ключевые слова: галилеево пространство, вырожденная метрика, гауссова кривизна, циклическая поверхность, седловая поверхность, поверхность вращения, особая плоскость, дефект кривизны, асимптотическое направление.

1. Основные понятия теории поверхностей галилеева пространства

Теория поверхностей галилеева пространства R_3^1 изучена в работах [1–3; 8–10]. Общая теория поверхностей полуевклидовых пространств изучена в монографии Б. А. Розенфельда [5].

Для исследования поверхностей в R_3^1 использована специальная система координатных линий на поверхности. Вектор функции поверхности в специальной системе координат имеет вид:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \qquad (u,v) \in D \tag{1}$$

Если O_{xyz} – система координат галилеева пространства, то плоскости, параллельные координатной плоскости O_{yz}, называются *особыми плоскостями*. В специальной системе криволинейных координат координатная линия $u = const$ принадлежит особой плоскости.

Такой выбор криволинейных координат на поверхности дает возможность определить вырожденную первую квадратичную форму поверхности [1; 2; 8].

Если поверхность, заданная уравнением (1), регулярна, то ее первая квадратичная форма:

$$ds_1^2 = du^2 \text{, когда } u = const,\ du = 0 \tag{2а}$$

$$ds_2^2 = G(u,v)dv^2 \tag{2б}$$

Функция $G(u,v)$ называется *коэффициентом первой квадратичной формы поверхности в* R_3^1.

Известно [4], что гауссова кривизна поверхности в евклидовом пространстве выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. Но в галилеевом пространстве R_3^1 аналог гауссовой кривизны не определяется только коэффициентом первой квадратичной формы [1].

Гауссова кривизна поверхности в R_3^1 вычисляется по формуле:

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2}, \tag{3}$$

где $F = y_u y_v + z_u z_v$, $E = {y_u}^2 + {z_u}^2$ и $G = {y_v}^2 + {z_v}^2$

Выражение $D(u,v)=F_u-\frac{1}{2}E_v$ называется *дефектом кривизны поверхности*. Дефект кривизны не зависит от первой квадратичной формы поверхности [1; 6]. Поэтому гауссова кривизна поверхности не полностью выражается через коэффициент первой квадратичной формы поверхности R_3^1.

2. Поверхности вращения в R_3^1

Условие, что в R_3^1 рассматриваем поверхности, вектор-функция которых имеет вид (1), не дает возможность рассматривать произвольные поверхности. Это условие геометрически означает, что рассматриваемые поверхности не имеют особые опорные плоскости. Но класс поверхностей, вектор-функции которых имеют вид (1), достаточно широк.

В этот класс относятся поверхности вращения в R_3^1, получающиеся вращением кривой, однозначно проектирующейся на ось O_x и принадлежащей плоскости O_{xz}.

Пусть кривая *g* задана уравнением

$$z=\varphi(x) \qquad a\le x\le b$$

Вращая кривую *g* вокруг оси O_x, получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид:

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+\varphi(u)\cos v\vec{j}+\varphi(u)\sin v\vec{k}$$

Утверждение 1. Дефект кривизны поверхности вращения равен нулю.

Утверждение доказываем непосредственным вычислением дефекта кривизны. Действительно:

$$F=\left(\varphi(u)\cos v\right)_u\left(\varphi(u)\cos v\right)_v+\left(\varphi(u)\sin v\right)_u\left(\varphi(u)\sin v\right)_v=\varphi(u)\left(\varphi'(u)\right)\cos v(-\sin v)+\left(\varphi'(u)\right)\varphi(u)\sin v\cos v=0$$

$$E=\left(\varphi(u)\cos v\right)_v^2+\left(\varphi(u)\sin v\right)_v^2=\varphi^2(u)\left[\sin^2 v+\cos^2 v\right]=\varphi^2(u)$$

Следовательно:

$$D(u,v)=F_u-\frac{1}{2}E_v=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi^2(u)\right)=0$$

Значит, для поверхностей вращения дефект кривизны равен нулю. Из этого факта можно получить следующее следствие.

Следствие. Гауссова кривизна поверхности вращения выражается через коэффициент первой квадратичной формы.

Действительно, в формуле (3) гауссовой кривизны первое выражение обращается в ноль, а второе выражение зависит только от коэффициента первой квадратичной формы.

Тогда гауссова кривизна поверхности вычисляется по формуле:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G(u,v)}}\frac{\partial^2\sqrt{G(u,v)}}{du^2}=-\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)},$$

так как $G(u,v)=\varphi^2(u)$

Исследуем класс поверхностей с постоянной гауссовой кривизной.

Пусть *S* – регулярная поверхность вращения постоянной кривизны *K* и *M* – произвольной точкой этой поверхности. Уравнение кривой, вращением которой вокруг оси O_x получается поверхность, должно удовлетворять дифференциальное уравнение

$$\varphi''(u)+K\varphi(u)=0$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим три возможных случая и получим общее решение уравнения.

$$1)\ K<0 \qquad \varphi(u)=c_1e^{-\sqrt{k}u}+c_2e^{\sqrt{k}u}$$

$$2)\ K=0 \qquad \varphi(u)=c_1u+c_2$$

$$3)\ K>0 \qquad \varphi(u)=c_1\cos\sqrt{k}u+c_2\sin\sqrt{k}u$$

Как частное решение можно привести следующие примеры:

$$\varphi(u)=chu, \qquad \varphi(u)=pu+l, \qquad \varphi(u)=\sin u$$

Поверхность, получающаяся вращением одной арки функции $z=\sin u,\quad 0\le u\le\pi$, является аналогом сферы евклидова пространства в галилеевом пространстве. Она является аналогом полной выпуклой замкнутой поверхности, не имеющей особых касательных плоскостей. Поверхность имеет две конические точки *O* и *A*, где особые плоскости будут опорными плоскостями (Рис. 1).

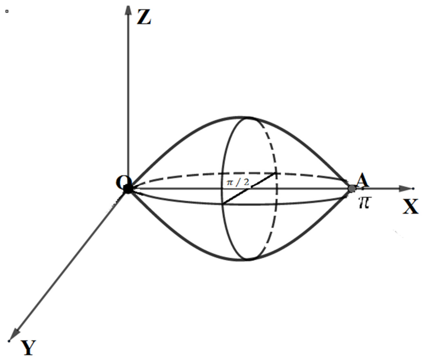

Рис. 1.

3. Седловые поверхности в R_3^1

В галилеевом пространстве, как и в евклидовом, седловыми поверхностями называются поверхности, во всех точках которых гауссова кривизна отрицательна. Среди поверхностей вращения поверхность, образованная вращением кривой *z = chu*, является примером седловой поверхности галилеева пространства (Рис. 2).

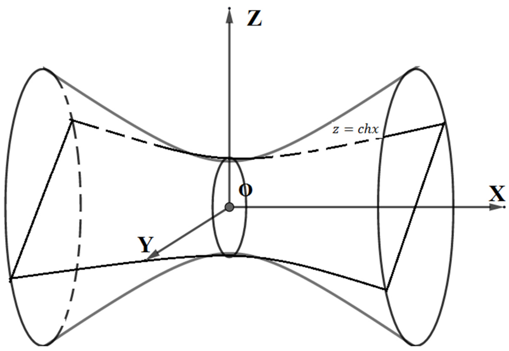

Рис. 2.

В работе [1] доказано, что если поверхность R_3 в евклидовом пространстве седловая, то она и в галилеевом пространстве также будет седловой.

Доказательство основано на принципе наложенного пространства. Принцип заключается в том, что координатная система рассматривается одновременно как в евклидовом, так и в галилеевом пространствах.

Но изучение седловых поверхностей в R_3^1 существенно отличается от евклидова пространства. Так как гиперболические точки поверхности галилеева пространства разделены на два класса: гиперболические и циклические. Причем геометрия циклических поверхностей имеет достаточно индивидуальный характер. Изучению циклических поверхностей посвящены работы [1; 10].

Циклическая поверхность характерна тем, что одно из асимптотических направлений всегда параллельно особой плоскости галилеева пространства.

Следующий пример показывает, что среди циклических поверхностей существуют седловые поверхности галилеева пространства.

Рассмотрим поверхность, заданную вектор-функцией

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + vshu\vec{k} \tag{4}$$

Вычислим первую и вторую квадратичную форму (4) поверхности:

$$I_1 = du^2,\ I_2 = ch^2u dv^2 \quad \text{когда} \quad I_1 = 0$$

$$II = -thudu^2 + 2dudv$$

Так как во второй квадратичной форме *N = 0*, поверхность является циклической поверхностью. При этом гауссова кривизна $K = -M^2 = -4 < 0$ отрицательна.

Следовательно: седловые поверхности галилеева пространства могут быть циклическими.

Таким образом, седловые поверхности R_3^1 разделяются на два типа. Эти типы определяются тем, как располагаются асимптотические направления поверхности относительно особой плоскости. В первом случае оба асимптотических направления поверхности не параллельны особой плоскости, во втором случае одно из асимптотических направлений параллельно особой плоскости.

Определение: седловую поверхность назовем циклически седловой, если одно из асимптотических направлений всегда параллельно особой плоскости.

Вышеприведенная поверхность (4) является примером циклически седловой поверхности.

Следовательно, в галилеевом пространстве исследования седловой поверхности должны разделяться по типу поверхности. Так как справедливо следующее:

Теорема 1. Движением галилеева пространства невозможно преобразовать седловую поверхность на циклически седловую поверхность, и наоборот.

Доказательство теоремы следует из того, что при движении галилеева пространства векторы общего положения нельзя перевести на вектор, параллельный особой плоскости, и наоборот. Так как асимптотические направления определяются соответствующими векторами.

Важность этой теоремы заключается в том, что две поверхности, которые равны в евклидовом пространстве, могут быть различного типа в галилеевом пространстве R_3^1. Это утверждение покажем в следующем примере.

Пример. Поверхность $z=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$ – седловая, а поверхность $z = xy$ – циклически седловая.

Очевидно, эти поверхности в евклидовом пространстве равны. Потому что, вращая координатную систему вокруг оси O_z, из первого уравнения можно получить второе.

$$x'=\frac{1}{2}(x-y)=x\cos 45^0-y\sin 45^0$$

$$y'=\frac{1}{2}(x+y)=x\sin 45^0+y\cos 45^0$$

Следовательно, эти поверхности в евклидовом пространстве равны, так как они получаются друг от друга вращением системы координат евклидова пространства на 450 вокруг оси O_z.

В галилеевом пространстве не существует вращение, которое бы преобразовало первую поверхность во вторую. Этот факт доказывается непосредственным вычислением.

$$x'=x$$
$$y'=h_1x+y\cos\alpha-z\sin\alpha$$
$$z'=h_2x+y\sin\alpha+z\cos\alpha$$

Значит, равные седловые поверхности евклидова пространства могут быть различными типами в галилеевом пространстве. Поэтому седловую и циклически седловую поверхности рассматриваем по отдельности.

Пусть в R_3^1 задана поверхность переноса [4], определенная на всей плоскости O_{xy}.

$$z=\varphi(x)+\psi(y)\quad(-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty)$$

Теорема 2. Если $\varphi''_{xx}(x)\cdot\psi''_{yy}(y)<0$, то поверхность переноса является седловой поверхностью в R_3^1.

Доказательство. Уравнение поверхности напишем в векторном виде:

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\left[\varphi(u)+\psi(v)\right]\vec{k}$$

Уравнение имеет вид (1), значит, оно не имеет особых касательных плоскостей.

Вычислим гауссову кривизну (3) поверхности в R_3^1.

$$K=\frac{\varphi''(u)\psi''(v)}{1+\psi_v^2(v)}$$

Так как $1+\psi_v^2(v)>0$, при условии $\varphi''(u_0)\cdot\psi''(v_0)<0$, гауссова кривизна поверхности будет отрицательной.

Следовательно, поверхность седловая.

Когда $\varphi''(y)=0$, то есть $\varphi(y)=c_1(x)+c_2$ – поверхность будет циклической поверхностью галилеева пространства. Причем, $K\equiv 0$, и поверхность не является седловой поверхностью.

Список литературы

1. *Артыкбоев А., Соколов Д. Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент : Фан, 1991. 179 с.
2. *Курбонов Э. К.* О поверхности галилеева пространства // Узбекский математический журнал. 2005. № 1. С. 46–52.
3. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М. : Изд-во МГУ, 1990.
4. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 648 с. : ил.
5. *Султанов Б. М.* Поверхности, определяемые символами Кристоффеля // Modern problems of geometry and topology and its applications. 21–23 November, Toshkent, Uzbekistan. 2019. Pp. 180–181.

6. *Яглом И. М.* Принцип относительности галилеевой и неевклидовой геометрии. М. : Наука, 1969. 394 с.

7. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Invariants of surface indicatrix in a Special linear transformation // Mathematics and statistics. USA. 2019. № 7 (4). Pp. 106–115.

8. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Research of parabolic surface points in Galilean space // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 2. Is. 4.

9. *Dede M., Ekici C., Geomans W.* Surface of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14. Is. 2. Pp. 141–152.

10. *Ozturk U., Koc Ozturk E. B., Nesovic E.* On eqiform Darboux helices in Galilean 3-space // Mathematical Communications. 2018. Vol. 23. No. 2. Pp. 145–159.

Properties of saddle surfaces of Galilean space

A. Articbaev[1], T. N. Safarov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Railway Transport Engineers. Uzbekistan, Tashkent. E-mail: aartykbaev@mail.ru

[2]Doctor of Philosophical Sciences in Geometry and Topology, Department of Algebra and Geometry, Termez State University. Uzbekistan, Termez. E-mail: tolqin.1986@mail.ru

Abstract. In this paper, saddle surfaces of Galilean space, which are a space with a degenerate metric, are studied. The surfaces of rotation are investigated, it is proved that the curvature defect of the surface is zero. A class of surfaces of rotation of constant curvature is defined.

Saddle surfaces of Galilean space are studied and divided into two types: saddle and cyclic saddle. It is proved that there is no motion of Galilean space that transforms surfaces of one type into another. Examples of saddle surfaces of different types, which are equal in Euclidean space, are given. Saddle transfer surfaces have been studied.

Keywords: Galilean space, degenerate metric, Gaussian curvature, cyclic surface, saddle surface, rotation surface, special plane, curvature defect, asymptotic direction.

References

1. *Artykboev A., Sokolov D. D. Geometriya v celom v ploskom prostranstve-vremeni* [Geometry in general in a flat space-time]. Tashkent. Fan. 1991. 179 p.

2. *Kurbonov E. K. O poverhnosti galileeva prostranstva* [On the surface of Galilean space] // *Uzbekskij matematicheskij zhurnal* – Uzbek Mathematical Journal. 2005. No. 1. Pp. 46–52.

3. *Poznyak E. G., Shikin E. V. Differencial'naya geometriya: pervoe znakomstvo* [Differential geometry: the first acquaintance]. M. Publishing House of Moscow State University. 1990.

4. *Rosenfeld B. A. Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. M. Nauka (Science). The main editorial of the physical and mathematical literature. 1966. 648 p. : ill.

5. *Sultanov B. M. Poverhnosti, opredelyaemye simvolami Kristoffelya* [Surfaces defined by Christoffel symbols] // *Modern problems of geometry and topology and its applications* – Modern problems of geometry and topology and its applications. 21-23 November, Toshkent, Uzbekistan. 2019. Pp. 180–181.

6. *Yaglom I. M. Princip otnositel'nosti galileevoj i neevklidovoj geometrii* [The principle of relativity of Galilean and non-Euclidean geometry]. M. Nauka (Science). 1969. 394 p.

7. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Invariants of surface indicatrix in a Special linear transformation // Mathematics and statistics. USA. 2019. No. 7 (4). Pp. 106–115.

8. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Research of parabolic surface points in Galilean space // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 2. Is. 4.

9. *Dede M., Ekici C., Geomans W.* Surface of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14. Is. 2. Pp. 141–152.

10. *Ozturk U., Koc Ozturk E. B., Nesovic E.* On eqiform Darboux helices in Galilean 3-space // Mathematical Communications. 2018. Vol. 23. No. 2. Pp. 145–159.