УДК 517.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.009

Об одном методе приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой

О. Л. Бозиев
кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник,
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН.
Россия, г. Нальчик. ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Аннотация. В работе предлагается метод решения смешанной задачи для параболического уравнения с интегральной нагрузкой, которая представляет собой интеграл по пространственной переменной некоторой степени искомой функции. Первым шагом применения метода является установление априорной оценки решения задачи в пространстве Лебега подходящей степени. Она используется для линеаризации нагруженного уравнения путем замены нелинейного члена правой частью априорного неравенства. Посредством интегрирования линеаризованного уравнения по пространственной переменной производится переход к ассоциированному с ним линейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Получено приближенное решение нагруженного уравнения, выраженное через его норму, и решение ассоциированного обыкновенного дифференциального уравнения. Оно может быть принято за начальное приближение в процессе последовательной аппроксимации точного решения сформулированной задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, априорная оценка, приближенное решение.

Согласно [2, с. 12] нагруженным дифференциальным уравнением, заданным в некоторой *n*-мерной области евклидова пространства, называется уравнение, содержащее след некоторых операций от искомого решения на многообразиях размерности меньших *n*, принадлежащих замыканию области.

Нагруженные уравнения в частных производных позволяют с удовлетворительной точностью моделировать процессы с последействием, протекающие в физических, биологических, экологических и других сложных системах [см., например, 1; 4; 5]. В таких процессах состояние, в которое система перешла под воздействием процесса, зависит от развития процесса в прошлом, то есть от того, каким образом и когда система оказалась в данном состоянии.

К такому типу относится уравнение с интегральной нагрузкой

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l}\int_{\Omega} u^2 dx = 0, \tag{1}$$

которое будем рассматривать в области $Q = (0,T)\times\Omega,\ \Omega = [0,l]$, при условиях

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,l], \psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1[0,T].$$

Рассмотрим способ решения задачи (1) – (3), состоящий в использовании априорной оценки решения задачи для ее линеаризации. Заметим, что интегральная нагрузка уравнения (1) является при любом *t* квадратом нормы функции $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, которую обозначим как

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx = \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Теорема. Пусть при любом *t* функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (1) – (3). Тогда функция $\|u\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от *t*.

Доказательство. Запишем скалярное произведение уравнения (1) и функции *u*:

$$(u_t, u) - (u_{xx}, u) - a(u,u) + \left(\frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2, u\right) = 0. \tag{4}$$

Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(u_t,u)=\int_\Omega u_t u\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega},\ a(u,u)=a\int_\Omega u^2\,dx,\left(\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega},u\right)=\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega udx,$$

$$-(u_{xx},u)=u_x(0,t)\psi_1(t)-u_x(l,t)\psi_2(t)+\int_\Omega|u_x|^2\,dx.$$

Возвращаясь к (4), получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega}=a\|u\|^2_{2,\Omega}+u_x(l,t)\psi_2(t)-u_x(0,t)\psi_1(t)-\int_\Omega|u_x|^2\,dx-\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega udx,$$

от которого перейдем к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega}\le a\|u\|^2_{2,\Omega}+\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega|u|\,dx+|u_x(l,t)||\psi_2(t)|+|u_x(0,t)||\psi_1(t)|.$$

Обе его части проинтегрируем по t:

$$\|u\|^2_{2,\Omega}\le 2a\int_0^t\|u\|^2_{2,\Omega}d\tau+\frac{2a}{l}\int_0^t\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega|u|\,dxd\tau+2\int_0^t\left(|u_x(l,t)||\psi_2(t)|+|u_x(0,t)||\psi_1(t)|\right)d\tau+\|u(x,0)\|^2_{2,\Omega}.$$

В силу вложения $L_2(\Omega)\subset L_1(\Omega)$ можно записать

$$\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega|u|\,dx=\|u\|^2_{2,\Omega}\|u\|_{1,\Omega}\le\sqrt{l}\,\|u\|^2_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}=\sqrt{l}\,\|u\|^3_{2,\Omega}.$$

С учетом этого, а также условия (2), перейдем к неравенству

$$\|u\|^2_{2,\Omega}\le 2a\int_0^t\|u\|^2_{2,\Omega}dt+\frac{2a}{\sqrt{l}}\int_0^t\|u\|^3_{2,\Omega}dt+K,$$

$$K=\|\varphi(x)\|^2_{2,\Omega}+2\max_{t\in[0,T]}\int_0^t\left(|u_x(l,\tau)||\psi_2(\tau)|+|u_x(0,\tau)||\psi_1(\tau)|\right)d\tau.$$

К последнему неравенству применим один из нелинейных аналогов неравенства Гронуолла-Беллмана [3, с. 22], что приводит к оценке

$$\|u\|^2_{2,\Omega}\le C(t),\tag{5}$$

$$C(t)=Ke^{2at}\left(1+\sqrt{\frac{K}{l}}\left(e^{at}-1\right)\right)^{-2}.\tag{6}$$

При этом константа K должна удовлетворять неравенству

$$K<\frac{l}{a^2T^2}e^{-2aT}.\tag{7}$$

Таким образом, теорема доказана.

Как было сказано выше, априорная оценка (5) будет использоваться для линеаризации уравнения (1), а именно, принимая равенство в (5), перейдем от (1) к линейному уравнению

$$u_t-u_{xx}-au=-\frac{a}{l}C(t),\tag{8}$$

решение которого будем искать при первоначальных условиях (2) и (3).

Перейдем теперь к ассоциированному с (8) обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого сначала проинтегрируем (8) по пространственной переменной:

$$u_x=\int_0^x(u_t-au)d\xi+\frac{a}{l}xC(t)+\psi_1(t).$$

К интегралу в правой части применим аналог теоремы о среднем значении интеграла, для чего устремим верхнюю границу интеграла к l и разделим его на l. В результате получим

$$u_x=x\left(\overline{u}'(t)-a\overline{u}(t)\right)+\frac{ax}{l}C(t)+\psi_1(t),\tag{9}$$

где

$$\overline{u}(t)=\frac{1}{l}\int_\Omega u(x,t)dx.\tag{10}$$

Интегрируя (9) по x и учитывая граничные условия, придем к формуле

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(x^2-1)\left(\overline{u}'(t)-a\overline{u}(t)\right)+\frac{a}{2}\left(\frac{x^2}{l}-l\right)C(t)+(x-l)\psi_1(t)+\psi_2(t). \qquad (11)$$

Таким образом, получено соотношение, выражающее искомую функцию через функции (10) и $C(t)$. Применяя к (11) преобразование (10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\overline{u}'+\left(\frac{3}{l^2}-a\right)\overline{u}=\frac{3}{l}\left(\frac{\psi_2}{l}-\frac{\psi_1}{2}\right)-\frac{a}{l}C(t). \qquad (12)$$

Начальное условие, необходимое для его интегрирования, легко получить из (2) с помощью преобразования (10):

$$\overline{u}(0)=\frac{1}{l}\int_{\Omega}u(x,0)dx=\frac{1}{l}\int_{\Omega}\varphi(x)dx. \qquad (13)$$

Как известно, полученная задача Коши имеет единственное решение при условии непрерывности коэффициентов и правых частей (12) и (13). Найденную в результате решения этой задачи функцию $\overline{u}$ необходимо подставить вместе с $C(t)$ в выражение (11) для получения решения задачи (1) – (3).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение описанного метода.

Примем в задаче (1) – (3) $a=1,\, l=1,\, T=1.$ Подставляя эти значения в неравенство (7), находим, что $K < 0{,}135$. Пусть $K = 0{,}1$. Тогда, согласно (6),

$$C(t)=0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2}. \qquad (14)$$

Заметим, что знаменатель правой части отличен от нуля для всех $t\geq 0$.

В условиях (2), (3) выберем $\varphi(x)=x,\ \psi_1(t)=\psi_2(t)=t,$ в силу чего (11) после подстановки $C(t)$ запишется как

$$u(x,t)=0{,}5(x^2-1)\left(\overline{u}'(t)-\overline{u}(t)+0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2}\right)+tx, \qquad (15)$$

а уравнение (12) и условие (13) соответственно принимает вид

$$\overline{u}'+2\overline{u}=1{,}5t-0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2},$$

$$\overline{u}(0)=0{,}5.$$

Последняя задача имеет решением функцию

$$\overline{u}(t)=\frac{e^{3t}}{0{,}31623e^t-0{,}68377}-0{,}21388e^{2t}\ln\left|\frac{0{,}31623e^t-0{,}68377}{e^t}\right|-0{,}5t-0{,}125.$$

Ее подстановка в (15) приводит к приближенному решению задачи (1) – (3):

$$u(x,t)=0{,}5(x^2-1)e^{2t}\left(\frac{0{,}63246e^{2t}-2{,}05131e^t+0{,}1}{(0{,}31623e^t-0{,}68377)^2}-\frac{1{,}93236e^t+0{,}21388}{0{,}31623e^t-0{,}68377}-\right.$$

$$\left.-0{,}21388\ln\left|\frac{0{,}31623e^t-0{,}68377}{e^t}\right|\right)+xt+0{,}5t-0{,}375.$$

Очевидно, что оно зависит от выбора значения K в решении неравенства (7). Полученное решение может быть использовано в качестве начального приближения в процессе последовательной аппроксимации точного решения сформулированной задачи.

Итак, процедура нахождения приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой (1) при условиях (2), (3) описанным методом состоит из следующих этапов:

1) получение априорной оценки (5) нагруженной задачи с применением известных интегральных неравенств и теорем вложения и определение ее правой части, то есть функции (6);

2) линеаризация нагруженного уравнения путем замены интегральной нагрузки правой частью неравенства (5) – уравнение (8);

3) переход от линеаризованного уравнения к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (12);

4) его решение при условии (13);

5) получение решения исходной задачи подстановкой в формулу (11) решения задачи (12), (13) и функции (6).

Среди перечисленных этапов наибольшую сложность представляет вывод необходимого априорного неравенства и определение его правой части (этап 1).

Приведенный метод может быть применен к уравнениям с интегральной нагрузкой различного типа и порядка. При этом является существенным возможность представления интегральной нагрузки в виде некоторой степени нормы искомой функции в соответствующем лебеговом пространстве.

Список литературы

1. *Лаптев Г. И.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.

3. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 152 с.

4. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. Pp. 227–244.

5. *M. Milla Miranda, A. T. Lourêdo, L. A. Medeiros* On Second-Order Differential Equations with Nonsmooth Second Member // ISRN Applied Mathematics. 2014. Pp. 1–13.

On one method of approximate solution of a parabolic equation with an integral load

O. L. Boziev

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor,
Kabardino-Balkarian State University n. a. H. M. Berbekov; Senior Researcher, Institute of Informatics and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.
Russia, Nalchik. ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Abstract. The paper proposes a method for solving a mixed problem for a parabolic equation with an integral load, which is an integral over a spatial variable of some degree of the desired function. The first step in applying the method is to establish an a priori estimate of the solution of the problem in the Lebesgue space of a suitable degree. It is used to linearize a loaded equation by replacing the nonlinear term with the right-hand side of the a priori inequality. By integrating a linearized equation over a spatial variable, a transition is made to the linear ordinary differential equation associated with it. An approximate solution of the loaded equation expressed in terms of its norm and the solution of the associated ordinary differential equation is obtained. It can be taken as an initial approximation in the process of sequential approximation of the exact solution of the formulated problem.

Keywords: loaded equation, a priori estimation, approximate solution.

References

1. *Laptev G. I. Kvazilinejnye parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka s integral'nymi koefficientami* [Quasilinear parabolic equations of the second order with integral coefficients] // *DAN SSSR* – DAN USSR. 1987. Vol. 293. No. 2. Pp. 306–309.

2. *Nahushev A. M. Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie* [Loaded equations and their application]. M. Nauka (Science). 2012. 232 p.

3. *Filatov A. N., Sharova L. V. Integral'nye neravenstva i teoriya nelinejnyh kolebanij* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. M. Nauka (Science). 1976. 152 p.

4. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. Pp. 227–244.

5. *M. Milla Miranda, A. T. Lourêdo, L. A. Medeiros* On Second-Order Differential Equations with Nonsmooth Second Member // ISRN Applied Mathematics. 2014. Pp. 1–13.