УДК 512.55 DOI 10.25730/VSU.0536.21.010

Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца

Е. М. Вечтомов[1], А. А. Петров[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-5877-2850. E-mail: apetrov43@mail.ru

Аннотация. В работе описаны все трехэлементные полукольца с идемпотентным умножением: показано, что с точностью до изоморфизма таких полуколец ровно 43, они заданы таблицами Кэли, а также диаграммами Хассе в случае полурешеточных редуктов. На основании полученных результатов перечислены все 46 четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца с нулем, в том числе 17 полуколец с нулем и единицей.

Ключевые слова: конечное полукольцо, идемпотентность, полурешетка, мультипликативно идемпотентное полукольцо.

Общая теория полуколец изложена в известной книге Голана [2]. Полукольцам с идемпотентным умножением посвящены наши работы [1; 3]. В статье [4] описаны все трехэлементные полукольца с идемпотентным сложением, среди полученных 61 полукольца 23 полукольца имеют идемпотентное умножение (идемпотентны).

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S,+,\cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения «+» и умножения «·», такая, что: $\langle S, +\rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо называется *коммутативным*, если на нем тождественно $xy = yx$.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ (с тождеством $x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно идемпотентное и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец развита в работах.

Полукольцо с тождеством $x + y = xy$ называется *моно-полукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если оно удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$.

Элемент θ произвольного полукольца S назовем *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x\in S$ выполняется $\theta \cdot x = x \cdot \theta = \theta$ (соответственно, $x + \theta = \theta$). Элемент $\infty\in S$, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим*.

Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно естественным образом присоединить нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S\cup\{0\}$ и $S\cup\{\infty\}$, соответственно.

Для полукольца S с нулем 0 через $r(S)$ обозначим множество всех его аддитивно обратимых элементов, образующих идеал в S. Ясно, что для мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем множество $r(S)$ будет булевым кольцом.

Полукольцо S с нулем 0 называется *антикольцом*, если $r(S)=\{0\}$, то есть на S справедливо квазитождество $x+y=0 \Rightarrow x=0$.

Для любого полукольца $\langle S,+,\cdot\rangle$ существует антиизоморфное полукольцо $\langle S,+,*\rangle$, в котором тождественно $x*y=y\cdot x$; такое *дуальное* полукольцо обозначим через S^*. Если S коммутативно, то $S^* = S$.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle S, *\rangle$ называется *полурешеткой*; при этом на S вводятся два отношения порядка $(\forall x,y\in S)$:

$$x\preccurlyeq y \Leftrightarrow x*y=x \text{ и } x\le y \Leftrightarrow x*y=y.$$

В первом случае S называется *нижней полурешеткой*, во втором – *верхней полурешеткой*.

Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма существует ровно шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец:

1. двухэлементная цепь $\mathbf{B} = \{0,1\}$;
2. двухэлементное поле $\mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$;
3. двухэлементное идемпотентное моно-полукольцо $\mathbf{D} = \{1,\infty\}$ с единицей 1;
4. двухэлементное полукольцо $\mathbf{T} = \{1,\infty\}$ с единицей 1 и константным сложением ($x+y=\infty$);
5. двухэлементное идемпотентное полукольцо $\mathbf{L} = \{a,b\}$ с тождеством $xy = x$;
6. двухэлементное идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} = \{a,b\}$ с тождеством $xy = y$.

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности ρ на S, стабильное относительно операций:

$$a\rho b \text{ и } c\rho d \text{ влекут } (a+c)\rho(b+d) \text{ и } (ac)\rho(bd) \text{ для любых } a, b, c, d \in S.$$

Множество Con S всех конгруэнций на полукольце S является ограниченной решеткой относительно включения конгруэнций:

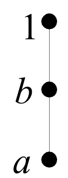
$$\rho\tau \text{ означает, что } a\rho b \Rightarrow a\tau b \text{ для любых } a, b \in S.$$

Наименьшим элементом в Con S служит *нулевая* конгруэнция $\mathbf{0}_S$ – отношение равенства, наибольшим – *единичная* конгруэнция $\mathbf{1}_S$ – одноклассовая. Полукольцо S называется *подпрямо неразложимым*, если на нем существует наименьшая ненулевая конгруэнция; *конгруэнц-простым*, если оно обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и одноклассовой.

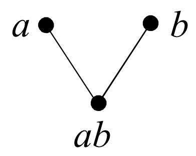
Отметим, что по классической теореме Г. Биркгофа любое неодноэлементное полукольцо изоморфно подполукольцу прямого произведения подпрямо неразложимых полуколец.

Опишем с точностью до изоморфизма все трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца S.

I. Вначале найдем трехэлементные полукольца с коммутативным идемпотентным умножением. Так как относительно умножения мы будем иметь трехэлементную нижнюю полурешетку, то возможны два варианта мультипликативного редукта:



либо



I.1. Рассмотрим случай, когда мультипликативная структура полукольца будет цепью $S = \{a \prec b \prec 1\}$.

• Ясно, что 8 таких полуколец можно получить, присоединяя к двухэлементным полукольцам $\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$ нулевой элемент 0 (сначала) или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S_1, S_2, \ldots, S_8$.

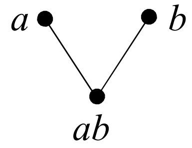
• Далее укажем все полукольца S с нулевым элементом 0 или поглощающим элементом ∞. Ясно, что роль такого элемента может играть только элемент $a = a \cdot b \cdot 1$.

Если $a = 0$ и полукольцо не получено его внешним присоединением к двухэлементному полукольцу, то сумма некоторых двух элементов из множества $\{1, b\}$ должна быть равна 0. При этом, если одним из этих элементов будет 1, то все элементы будут иметь противоположный, и мы получим трехэлементное булево кольцо, что невозможно. Поэтому $b + b = 0$, при этом $1 + b = 1$ или $1 + b = b$, откуда $b + b = b = 0$; противоречие.

Если же $a = \infty$, и сумма некоторых двух элементов из множества $\{1, b\} \subset S$ равна ∞, то в полукольце S тождественно $x + y = \infty$. Обозначим полученное полукольцо с константным сложением как S_9.

• Теперь опишем полукольца S, не имеющие нулевого и поглощающего элементов. Если $1 + a = 1$, то $a + a = a$ и $a + b = b$, поэтому a – нулевой элемент, что невозможно. Аналогично, если $1 + a = a$, то $a + a = a$ и $a + b = a$, откуда a – поглощающий элемент. Значит, $1 + a = b$, откуда $a + a = a$, $a + b = b$ и $b + 1 = a + b + 1 = b + b$. Теперь, если $1 + 1 = 1$, то $b + b = b = b + 1$. Полученный объект будет идемпотентным полукольцом, которое обозначим S_{10}. Если $1 + 1 = b$, то снова $b + b = b = b + 1$, и мы также получаем полукольцо S_{11}. Если же $1 + 1 = a$, то $b + b = a = b + 1$, и мы получаем полукольцо S_{12}.

I.2. Рассмотрим далее случай полукольца S с мультипликативным редуктом.



Заметим, что в этом случае после взаимной замены элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

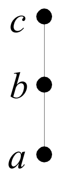
Далее легко видеть, что $a + a \neq b$, $b + b \neq a$. Кроме того, справедливо равенство $ab + ab = ab$, откуда $a + ab \neq b$, $b + ab \neq a$.

• Пусть $a + a = a$, $b + b = b$, то есть аддитивная полугруппа полукольца является полурешеткой. Если $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{13}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{14} с поглощающим элементом ab.

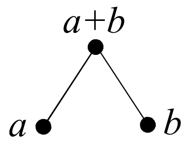
• Пусть $a + a = a$, $b + b = ab$. Если при этом $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{15}. Если $a + b = b$, то $a + ab = ab$, $b + ab = b$, и мы получаем полукольцо S_{16}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{17} с поглощающим элементом ab.

• Наконец, пусть $a + a = ab$, $b + b = ab$. Если при этом $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{18}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{19} с константным сложением $x + y = ab$.

II. Найдем все трехэлементные некоммутативные идемпотентные полукольца S. По сложению будем иметь верхние полурешетки:



либо



II.1. Пусть по сложению имеем цепь $S = \{a < b < c\}$.

Заметим, что при этом $ab \neq c$, иначе, домножив равенство $a + b = b$ справа на b, получили бы $c + b = b$, противоречие. Аналогично, $ba \neq c$, $bc \neq a$ и $cb \neq a$.

Отметим также, что из равенства $a + b = b$ следует $ac + bc = bc$, поэтому если $ac = c$, то и $bc = c$. Аналогично, $ca = c$ влечет $cb = c$. А равенство $b + c = c$ влечет $ab + ac = ac$, откуда если $ac = a$, то и $ab = a$. Аналогично, из $ca = a$ следует $ba = a$.

• Ясно, что такими будут полукольца, полученные присоединением к двухэлементным полукольцам $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ нулевого элемента 0 (сначала) или поглощающего элемента ∞. Обозначим полученные полукольца S_{20}, S_{21}, S_{22}, S_{23}. При этом полукольцо $\mathbf{L} \cup \{0\}$ дуально полукольцу $\mathbf{R} \cup \{0\}$, а дуально $\mathbf{L} \cup \{\infty\}$. Кроме того, отметим, что остальные полукольца не могут содержать нулевой или поглощающий элемент. Выше мы показали, что $bc \neq 0 \neq cb$. Но и $b + c = c \neq 0$. А это означает, что $\{b,c\}$ является двухэлементным некоммутативным полукольцом, то есть изоморфно $\mathbf{L}$ или $\mathbf{R}$. Аналогично для полукольца $\{\infty,a,b\}$ с цепным сложением $a < b < \infty$.

Далее опишем полукольца S, не имеющие нулевого и поглощающего элементов.

• Пусть $ab = a = ba$. Предположим, что $ac = c$, откуда $bc = c$. При этом $ca \neq c$, иначе $cb = c$ и $c = \infty$. Если $ca = a$, то при $cb = c$ получаем полукольцо S_{24} и дуальное к нему полукольцо S_{25} ($ab = a = ba$, $bc = c = cb$, $ac = a$, $ca = c$). А при $cb = b$ имеем $(ac)b = cb = b \neq a = ab = a(cb)$, противоречие. Теперь рассмотрим случай $ca = b$. Здесь $(ca)a = ba = a \neq b = ca = c(aa)$, противоречие. Пусть далее $ac = b$. Но тогда $(aa)c = ac = b \neq a = ab = a(ac)$, противоречие.

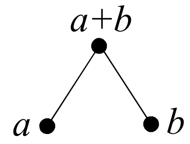
• Пусть $ab = b = ba$. При этом, как показано выше, $ac \neq a \neq ca$. Предположим, что $ac = c$, откуда $bc = c$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$ и $c = \infty$, противоречие. Предположим, что $ca = b$. Тогда при $cb = b$ имеем полукольцо S_{26} и дуальное к нему полукольцо S_{27} ($ab = b = ba$, $ac = b$, $ca = c$, $bc = b$, $cb = c$). А при $cb = c$ получаем $(cc)a = ca = b \neq c = cb = c(ca)$, что невозможно.

• Пусть $ab = a$, $ba = b$, откуда $ca \neq a$.

Предположим, что $ac = c$, что влечет $bc = c$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$ и $c = \infty$, противоречие. Значит, $ca = b$. Но тогда $(ac)a = ca = b \neq a = ab = a(ca)$, противоречие.

Пусть теперь $ac = a$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$. При $bc = c$ имеем $(ba)c = bc = c \neq b = ba = b(ac)$, противоречие. Если же $bc = b$, то получаем полукольцо S_{28}, на котором тождественно $xy = x$. Дуальным к нему будет полукольцо S_{29} с тождеством $xy = y$. Если же $ca = b$, то возможны случаи $cb = b$ и $cb = c$. В первом случае получаем полукольцо S_{30} и дуальное к нему полукольцо S_{31} ($ab = ac = b$, $ba = ca = a$, $bc = b = cb$). Во втором случае операция умножения не ассоциативна, так как $(cc)a = ca = b \neq c = cb = c(ca)$.

II.2. Далее пусть аддитивный редукт полукольца S является верхней полурешеткой



Заметим, что в этом случае после взаимной замены элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

Ясно, что если $ab = ba$, то полукольцо S будет коммутативным, так как $a(a + b) = a + ab = a + ba = (a + b)a$ и аналогично $b(a + b) = (a + b)b$. Значит, в нашем случае $ab \neq ba$.

• Пусть $ab = a$, $ba = b$. Тогда $a(a + b) = a + ab = a + a = a$, $(a + b)a = a + ba = a + b$, $b(a + b) = ba + b = b + b = b$, $(a + b)b = ab + b = a$, и мы имеем полукольцо S_{32}, на котором тождественно $xy = x$. Дуальным к нему будет полукольцо S_{33}, удовлетворяющее тождеству $xy = y$.

• Пусть $ab = a$, $ba = a + b$. Тогда $a(a + b) = a$, $(a + b)a = a +b$, $b(a + b) = a + b$, $(a + b)b = a + b$, и мы получаем полукольцо S_{34}. Дуальное к нему полукольцо обозначим как S_{35}.

III. Найдем все трехэлементные некоммутативные неидемпотентные мультипликативно идемпотентные полукольца S.

Так как S не идемпотентно, то в нем должен найтись элемент a, для которого $2a = a + a \neq a$. Тогда S будет иметь вид $S = \{a, 2a, b\}$. При этом, если $2b = a$, то $2a = 4b = 2b = a$, что невозможно. Значит, либо $2b = 2a$, либо $2b = b$. Ясно также, что $ab \neq ba$ в силу некоммутативности полукольца S.

III.1. Пусть в полукольце $S = \{a, 2a, b\}$ выполняется $2b = 2a$. Заметим, что в этом случае при перестановке элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

• Предположим, что в S справедливо $ab = a$, $ba = 2a$. Тогда $(ab)a = a \neq 2a = a(ba)$, противоречие. Если же $ab = b$, $ba = 2a$, то, как легко видеть, $(ba)b \neq b(ab)$.

• Пусть теперь $ab = a$, $ba = b$. Тогда если $a + b = a$, то $a + a = a + ab = a(a + b) = aa = a$, противоречие. Аналогично, $a + b \neq b$. Значит, должно выполняться $a + b = 2a$, откуда $a + 2b = 2a + b$, что с учетом $2b = 2a$ дает $3a = 3b$. Теперь если $3a = a$, то $b = ba = b \cdot 3a = 3b \cdot a = 3aa = 3a = a$, противоречие. Если же $3a = b$, то $b = 3a = a \cdot 3a = ab = a$, что также невозможно. Остается случай $3a = 2a$. И мы получаем полукольцо S_{36} и дуальное к нему полукольцо S_{37} с условиями $ab = b$, $ba = a$. Заметим, что данные полукольца обладают константным сложением: $(\forall x,y \in T)\ x + y = 2a$, поэтому элемент $2a$ является поглощающим: $2a = \infty$.

III.2. Пусть в полукольце $S = \{a, 2a, b\}$ справедливо $2b = b$. Тогда идемпотентами также будут элементы $ab = 2ab$ и $ba = 2ba$. Поскольку $ab \neq ba$, то возможен либо случай $ab = 2a$, $ba = b$, либо случай $ab = b$, $ba = 2a$, дуальный к первому. Итак, пусть $ab = 2a$, $ba = b$, то есть мультипликативная полугруппа полукольца S имеет вид:

$\cdot$	a	$2a$	b
a	a	$2a$	$2a$
$2a$	$2a$	$2a$	$2a$
b	b	b	b

1. Пусть $a + b = a$. Тогда $a + 2a = a + ab = a(a + b) = a$, $2a + b = 2a$. Полученное полукольцо обозначим как S_{38}, а дуальное к нему S_{39}.

2. Пусть $a + b = b$, откуда $a + 2a = 2a$, $2a + b = b$. Мы имеем полукольцо S_{40} и дуальное к нему полукольцо S_{41}.

3. Наконец, пусть $a + b = 2a$, откуда $a + 2a = 2a$, $2a + b = 2a$. Получаем полукольцо S_{42} и дуальное к нему полукольцо S_{43}.

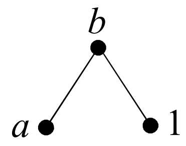
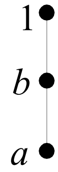
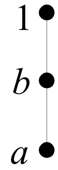
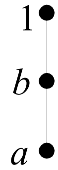
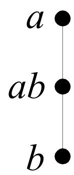
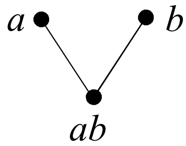
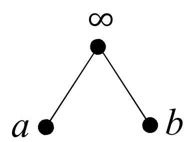
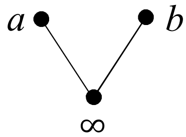
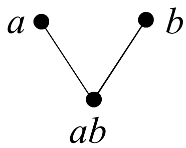
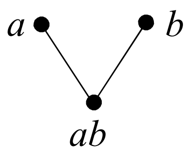
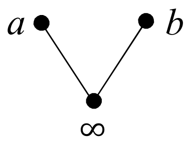
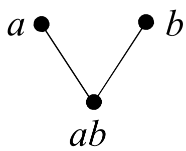
В результате доказана следующая

Теорема 1. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 43 *трехэлементное мультипликативно идемпотентное полукольцо* $S_1 - S_{43}$ (*которые представлены в следующей таблице*).

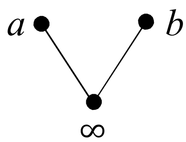
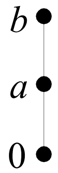
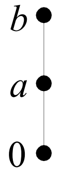
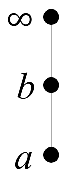
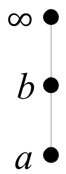
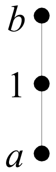
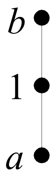
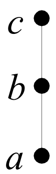
Таблица 1

<table>
<tr><th></th><th>$\langle S, +\rangle$</th><th>$\langle S, \cdot\rangle$</th><th>Свойства</th><th>Разложимость</th></tr>
<tr><td colspan="5">I. Коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца</td></tr>
<tr><td>S_1</td><td>1
a
0</td><td>1
a
0</td><td>трехэлементная цепь,
$S \cong \mathbf{B} \cup \{0\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td>S_2</td><td><table><tr><th>+</th><th>0</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>a</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>1</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
0</td><td>$S \cong \mathbf{Z}_2 \cup \{0\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times \mathbf{Z}_2$</td></tr>
<tr><td>S_3</td><td>a
1
0</td><td>1
a
0</td><td>идемпотентное полукольцо,
$S \cong \mathbf{D} \cup \{0\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_4</td><td><table><tr><th>+</th><th>0</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
0</td><td>$S \cong \mathbf{T} \cup \{0\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_5</td><td>∞
1
a</td><td>1
a
∞</td><td>идемпотентное полукольцо,
$S \cong \mathbf{B} \cup \{\infty\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_6</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>a</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>1</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>$S \cong \mathbf{Z}_2 \cup \{\infty\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_7</td><td>∞
a
1</td><td>1
a
∞</td><td>идемпотентное моно-полукольцо,
$S \cong \mathbf{D} \cup \{\infty\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_8</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>$S \cong \mathbf{T} \cup \{\infty\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_9</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>обладает константным сложением</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{T}\times\mathbf{T}$</td></tr>
</table>

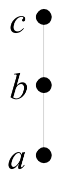
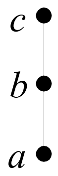
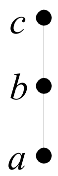
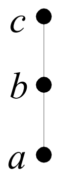
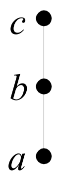
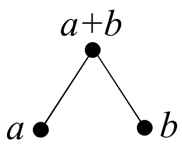
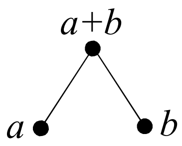
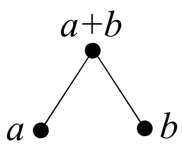
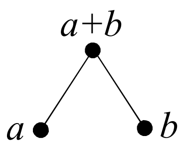
Продолжение табл. 1

<table>
<tr><th></th><th>⟨S, +⟩</th><th>⟨S, ·⟩</th><th>Свойства</th><th>Разложи-мость</th></tr>
<tr><td>S_{10}</td><td>
</td><td>
</td><td>идемпотентное полукольцо</td><td>S ς $\mathbf{B}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{11}</td><td><table><tr><td>+</td><td>1</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>1</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{B}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{12}</td><td><table><tr><td>+</td><td>1</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>1</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{13}</td><td>
</td><td>
</td><td>идемпотентное дистрибутивное полукольцо</td><td>S ς $\mathbf{B}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{14}</td><td>
</td><td>
</td><td>идемпотентное моно-полукольцо</td><td>S ς $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{15}</td><td><table><tr><td>+</td><td>a</td><td>b</td><td>ab</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>a</td><td>ab</td><td>ab</td></tr><tr><td>ab</td><td>a</td><td>ab</td><td>ab</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{B}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{16}</td><td><table><tr><td>+</td><td>a</td><td>b</td><td>ab</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>b</td><td>ab</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td><td>ab</td><td>b</td></tr><tr><td>ab</td><td>ab</td><td>b</td><td>ab</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{17}</td><td><table><tr><td>+</td><td>∞</td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>a</td><td>∞</td></tr><tr><td>b</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{D}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{18}</td><td><table><tr><td>+</td><td>a</td><td>b</td><td>ab</td></tr><tr><td>a</td><td>ab</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>a</td><td>ab</td><td>ab</td></tr><tr><td>ab</td><td>a</td><td>ab</td><td>ab</td></tr></table></td><td>
</td><td></td><td>S ς $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{T}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

<table>
<tr><th></th><th>⟨S, +⟩</th><th>⟨S, ·⟩</th><th>Свойства</th><th>Разложимость</th></tr>
<tr><td>S_{19}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$</td><td></td><td>обладает константным сложением</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">II. Некоммутативные идемпотентные полукольца</td></tr>
<tr><td>S_{20}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & a \\ b & 0 & b & b \end{array}$</td><td>$S \cong \mathbf{L}\cup\{0\}$</td><td>подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td>S_{21}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & b \\ b & 0 & a & b \end{array}$</td><td>$S \cong \mathbf{R}\cup\{0\}$, S_{20}^{*}</td><td>подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td>S_{22}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & a \\ b & \infty & b & b \end{array}$</td><td>$S \cong \mathbf{L}\cup\{\infty\}$</td><td>подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{23}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & b \\ b & \infty & a & b \end{array}$</td><td>$S \cong \mathbf{R}\cup\{\infty\}$, S_{22}^{*}</td><td>подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{24}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & a & a \\ b & b & b & b \end{array}$</td><td></td><td>конгруэнц-простое</td></tr>
<tr><td>S_{25}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & a & b \\ b & b & a & b \end{array}$</td><td>$S_{24}^{*}$</td><td>конгруэнц-простое</td></tr>
<tr><td>S_{26}</td><td></td><td>$\begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & c \\ c & b & b & c \end{array}$</td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{D}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

	$\langle S, +\rangle$	$\langle S, \cdot\rangle$	**Свойства**	**Разложимость**
S_{27}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$	S_{26}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{D}$
S_{28}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$	$xy=x$	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{L}$
S_{29}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$	$xy=y$, S_{28}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}$
S_{30}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & b & b & c \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{B}$
S_{31}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$	S_{30}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{B}$
S_{32}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ a+b & a+b & a+b & a+b \end{array}$	$xy=x$	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{L}$
S_{33}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & b & a+b \\ b & a & b & a+b \\ a+b & a & b & a+b \end{array}$	$xy=y$, S_{32}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}$
S_{34}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a & a \\ b & a+b & b & a+b \\ a+b & a+b & a+b & a+b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{D}$
S_{35}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a+b & a+b \\ b & a & b & a+b \\ a+b & a & a+b & a+b \end{array}$	S_{34}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{D}$

Окончание табл. 1

	$\langle S, +\rangle$	$\langle S, \cdot\rangle$	**Свойства**	**Разложимость**
III. Некоммутативные неидемпотентные полукольца				
S_{36}	$\begin{array}{c\|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & a \\ b & \infty & b & b \end{array}$	обладает константным сложением	подпрямо неразложимо, $S/\rho\cong\mathbf{T}$
S_{37}	$\begin{array}{c\|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & b \\ b & \infty & a & b \end{array}$	обладает константным сложением, S_{36}^{*}	подпрямо неразложимо, $S/\rho\cong\mathbf{T}$
S_{38}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & a & a \\ 2a & a & 2a & 2a \\ b & a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{Z}_2$
S_{39}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & a & a \\ 2a & a & 2a & 2a \\ b & a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{38}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{Z}_2$
S_{40}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & b & b & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{T}$
S_{41}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & b & b & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{40}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{T}$
S_{42}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{T}$
S_{43}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{42}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{T}$

Замечание 1. Как видно по таблице, во множестве всех 43 попарно неизоморфных трехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец имеется:

• 19 коммутативных (S_i при i = 1, 2, …, 19), среди которых 7 идемпотентных полуколец (S_i при i = 1, 3, 5, 7, 10, 13, 14);

• 24 некоммутативных (S_i при i = 20, 21, …, 43), разбитых на пары взаимно дуальных полуколец;

• 23 идемпотентных полукольца, в том числе 16 некоммутативных (S_i при i = 20, 21, …, 35);

• 14 полуколец с единицей 1 (S_i при i = 1, 2, …, 12, 24, 25);

• 6 полуколец с нулем 0 (S_i при i = 1, 2, 3, 4, 20, 21);

• 4 полукольца с 0 и 1 (S_i при i = 1, 2, 3, 4);

• 9 полуколец с поглощающим элементом ∞ (S_i при i = 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 36, 37);

• 5 полуколец с 1 и ∞ (S_i при i = 5, 6, 7, 8, 9);

• 12 подпрямо неразложимых полуколец (S_i при i = 3, 4, 5, 6, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 36, 37);

• 2 конгруэнц-простых полукольца S_{24} и S_{25}.

Теорема 2. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 46 *четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца с нулем:* $S_i\cup\{0\}$, i = 1, 2, …, 43 (*из таблицы*), $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $S = \{0, a, b, c\}$ – четырехэлементное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем 0. В силу теоремы 4.1.1 [1] идеал $r(S)$ всех аддитивно обратимых элементов из S выделяется прямым слагаемым в полукольце S:$S = r(S)\oplus J$, где идеал J – мультипликативно идемпотентное антикольцо. Если $r(S) = \{0\}$, то $S = J$. Если $r(S)$ двухэлементно, то $r(S)$ изоморфно $\mathbf{Z_2}$ и J изоморфно $\mathbf{B}$, то есть S изоморфно $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$. Если же $r(S) = S$, то S изоморфно $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$.

Поэтому можно считать, что $S = \{0, a, b, c\}$ является мультипликативно идемпотентным антикольцом. Возможны два случая: S не имеет ненулевых делителей нуля; $ab = 0$ в S (без ограничения общности).

• В первом случае множество $\{a, b, c\}$ будет подполукольцом в S, и полукольцо S получено присоединением к трехэлементному мультипликативно идемпотентному полукольцу $\{a, b, c\}$ нуля, то есть по теореме 1 S изоморфно одному из полуколец S_i при i = 1, 2, …, 43.

• Рассмотрим случай антикольца S, когда $ab = 0$. Откуда $ba = (ba)(ba) = b(ab)a = 0$. Имеем $a + b \neq a$ и $a + b \neq b$, значит, $a + b = c$. Далее $a + a \neq b$ и $a + a \neq a + b$, значит, $a + a = a$. Аналогично, $b + b = b$. Кроме того, $a(a + b) = a = (a + b)a$ и $b(a + b) = b = (a + b)b$, то есть элемент $a + b$ служит единицей в S. Тогда $S = \{0, a\}\oplus\{0, b\}$ и полукольца $\{0, a\}$, $\{0, b\}$ изоморфны $\mathbf{B}$. Стало быть, S изоморфно $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Следствие. *С точностью до изоморфизма существует* 17 *четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей*: $S_i\cup\{0\}$, i = 1, 2, …, 12, 24, 25 (*из таблицы*), $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Замечание 2. Всего четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец заметно больше (с точностью до изоморфизма). Так, в силу теоремы 1 существует не менее 43 четырехэлементного мультипликативно идемпотентного полукольца с поглощающим элементом ∞.

Замечание 3. К мультипликативно идемпотентному полукольцу S присоединим внешним образом единичный элемент 1 ($\forall x\in S\cup\{1\}$ $1\cdot x = x = x\cdot 1$). Доопределим операцию сложения в $S\cup\{1\}$, положив тождественно: 1) $1 + x = 1 = x + 1$; 2) $1 + x = x = x + 1$. Алгебраическая структура $\langle S\cup\{1\}, +, \cdot\rangle$ будет полукольцом тогда и только тогда, когда полукольцо S является дистрибутивной решеткой в случае 1) и идемпотентным моно-полукольцом в случае 2); [см. 2, лемма 2.2.4 и предложение 2.3.1]. При этом полученное полукольцо $S\cup\{1\}$ само станет дистрибутивной решеткой в первом случае и идемпотентным моно-полукольцом во втором случае. Например, $\mathbf{B}\cup\{1\}$ изоморфно S_1, $\mathbf{D}\cup\{1\}$ изоморфно S_7, $S_7\cup\{1\}$ изоморфно $S_7\cup\{\infty\}$, а полукольцо $S_{14}\cup\{1\}$ не изоморфно ни одному из 89 четырехэлементных полуколец, перечисленных в теореме 2 и замечании 2.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.

2. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers : Dordrecht-Boston-London, 1999. 380 p.

3. *Vechtomov E. M., Petrov A. A.* Multiplicatively Idempotent Semirings // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 206. Is. 6. Pp. 634–653.

4. *Zhao X., Ren M., Crvenković S., Shao Y., Dapić P.* The variety generated by an ai-semiring of order three // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Is. 2. Pp. 117–132.

Three-element multiplicative idempotent semirings

E. M. Vechtomov[1], A. A. Petrov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-5877-2850. E-mail: apetrov43@mail.ru

Abstract. The paper describes all three-element semirings with idempotent multiplication: it is shown that up to the isomorphism there are exactly 43 of such semirings, they are given by Cayley tables, as well as Hasse diagrams in the case of semilattice reducts. Based on the results obtained, all 46 four-element multiplicatively idempotent semirings with zero are listed, including 17 semirings with zero and one.

Keywords: finite semiring, idempotence, semilattice, multiplicatively idempotent semiring.

References

1. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem* [Semirings with idempotent multiplication]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

2. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers : Dordrecht-Boston-London, 1999. 380 p.

3. *Vechtomov E. M.*, *Petrov A. A.* Multiplicatively Idempotent Semirings // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 206. Is. 6. Pp. 634–653.

4. *Zhao X.*, *Ren M.*, *Crvenković S.*, *Shao Y.*, *Dapić P.* The variety generated by an ai-semiring of order three // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Is. 2. Pp. 117–132.