УДК 51 DOI 10.25730/VSU.0536.21.013

Решение задач с параметром методом выделения необходимых условий на параметр

М. Ю. Здоровенко[1], М. Н. Левин[2]
[1]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: zdorovenko.s@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

Аннотация. В статье предлагаются методические рекомендации по проведению занятий на элективном курсе по математике в 8–11 классах по теме «Решение задач с параметрами».

Рассматривается метод выделения необходимых условий на параметр для решения наиболее логически сложных задач. Формулировка таких задач содержит условия «для всех значений переменной x из некоторого множества M выполняются условия A» или «существует x, что условие A выполняется для любого y». Предлагаемые задания и разобранные примеры направлены на формирование общей математической культуры обучающихся, развития у них исследовательских навыков и умения логически мыслить, а также обобщать и применять полученные знания для решения математических задач.

Представленная работа будет интересна учащимся 8–11 классов, учителям математики, работающим в старших классах школы, студентам математических специальностей педагогических ВУЗов, методистам.

Ключевые слова: задача с параметрами, необходимое условие, математическое образование.

Решение задач с параметрами в школьном курсе математики играет важную роль. Эти задачи формируют исследовательские навыки, развивают логическое и аналитическое мышление и умение обобщать изученный на уроках математики материал. Полученные знания используются в различных, часто нестандартных ситуациях на практике. Однако решению задач с параметрами на уроках математики в школе уделяется мало внимания, а материал по этой теме нельзя назвать систематизированным и методически разработанным.

Методы решения задач с параметрами, как правило, изучаются на элективных курсах по математике в старших классах. Основной целью таких курсов является подготовка к итоговой аттестации. Однако потенциал курса по решению задач с параметрами значительно выше. Курс в первую очередь должен быть направлен на формирование математической культуры обучающихся, развитие у них исследовательских навыков, умение логически мыслить, обобщать изученный материал, применять полученные знания при решении различных математических задач.

По методам решения задачи с параметрами традиционно разделяют на три больших класса:

– задачи, решаемые графическим методом в системе «переменная–переменная»;
– задачи, решаемые графическим методом в системе «переменная–параметр»;
– задачи, решаемые аналитически.

Одна и та же задача может допускать решение различными методами [1; 2]. Нередко решение задачи требует комбинации указанных методов.

Рассмотрим еще один метод – метод выделения необходимых условий на параметр. Он непривычен для учащихся и учителей.

Задачи, решаемые указанным методом, можно разделить на 4 вида:

– задачи с симметрией;
– задачи на анализ ограниченности значений функций;
– задачи на анализ области определения;
– задачи, формулировка которых содержит условия вида: «для любого x из множества M выполняется условие A», «ни для какого x из множества M условие A не выполняется», «существует x, что условие A выполняется для любого y».

Наибольшее затруднение школьники испытывают при решении задач последнего из перечисленных видов, так как рассуждения при решении таких задач требуют развитого логического мышления, умения четко различать необходимые и достаточные условия, понятия следования и равносильности. Следует заметить, что разделу математики, в наибольшей степени развивающему логическое мышление школьников – геометрии – по мнению авторов, в настоящее время уделяется недостаточно внимания.

Разберем примеры решения задач, иллюстрирующих метод выделения необходимых условий на параметр.

Начнем с решения подготовительных заданий.

Задание 1.

Дано неравенство с параметром p:

$$x^4 - 4p^3x + (3p + 6) \geq 0. \tag{1}$$

Поставим вопросы:

а) Верно, что при $p = 0$ неравенство выполняется для всех действительных значений x?

Решение.

При $p = 0$ получим неравенство $x^4 + 6 \geq 0$. Видим, что неравенство верно при всех действительных x, поскольку оба слагаемых в левой части неравенства неотрицательны.

Рассмотрите обратное утверждение: если сумма двух слагаемых неотрицательна, то оба слагаемых неотрицательны?

б) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется для всех действительных x. Будет оно верным при $x = 0$ (при $x = 2$, $x = 40$, $x = 1$)? Рассмотрите случай $p = 1$.

в) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется при $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ и при $x = 4$. Верно, что неравенство будет справедливо для всех действительных x из промежутка $[-2; 4]$? Рассмотрите случаи, когда $p = -1$, $p = 2$.

Обращаем внимание: если неравенство выполняется для некоторых чисел из промежутка $[-2; 4]$ или даже для многих чисел из промежутка, то это еще не означает, что неравенство верно для всех значений x из указанного промежутка.

г) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется при всех значениях x из промежутка $[-3; 0]$. Можно утверждать, что неравенство справедливо для всех x из промежутка $[-2; -1]$? Можно утверждать, что неравенство справедливо для всех x из промежутка $[-2; 1]$? Можно утверждать, что неравенство не будет справедливым при $x = -3$?

д) При каких целых значениях p число $x = 0$ удовлетворяет неравенству (1)? А числа $x = 2$, $x = -1$?

е) Если $p = 1$, то будет неравенство выполняться при $x = 0$, $x = 2$ и $x = -1$? Ответ дайте, не решая неравенство.

Задание 2. При каких целых значениях параметра p неравенство

$$2x^3 - 6p^2x - 5p \geq 0 \tag{2}$$

выполняется при всех $x \in [-1; 2]$?

а) При каких из перечисленных значений переменной: $x = 0$, $x = -2$, $x = -0{,}5$ неравенство должно выполняться?

б) При $x = -2$ неравенство может быть верным?

в) Какие значения переменной x удобно подставить, чтобы найти ограничения на значения параметра p? Выберите из чисел: $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

г) Каким неравенствам должен удовлетворять параметр p, если указанные в пункте в) целые значения переменной являются решением заданного неравенства?

При подстановке в (1) вместо переменной x ее числового значения из множества $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ получаем неравенства:

$$6p^2 - 5p - 2 \geq 0;$$
$$p \geq 0;$$
$$6p^2 + 5p - 2 \leq 0;$$
$$12p^2 + 5p - 16 \leq 0.$$

Какие из полученных неравенств имеют конечное число целых решений? Обращаем внимание, что достаточно решить только одно из трех полученных неравенств, а найденные значения параметра подставить в оставшиеся неравенства и выбрать только те значения p, которые удовлетворяют всем полученным неравенствам. В результате получим единственное возможное значение параметра $p = -2$.

д) Нужно проверить, что $p = -2$ удовлетворяет условию задачи, или можно выписать ответ: $p = -2$?

Перечислим основные выводы, которые учащиеся должны сформулировать самостоятельно: чтобы найти все целые значения параметра p, при которых неравенство (2) выполняется при всех значениях $x \in [-1; 2]$, следует:

1) выбрать «подходящие» значения переменной x (в нашем примере это $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$);

2) подставить эти значения в неравенство (2) и получить соотношения на параметр p (то есть получить необходимые условия на параметр);

3) проверить все полученные значения параметра.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

В первых двух примерах множество «возможных» значений параметра конечно, а в следующих двух примерах – бесконечно.

Пример 1. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(x^2-4)^{\mathbf{2}} \geq (a+1)x^2+(3a+4)x-1+a$$

выполняется при всех действительных значения x.

Решение задачи начнем с обсуждения свойств выражений в левой и правой частях заданного неравенства и возможных методов решения указанного неравенства. Прежде всего перенесем все слагаемые в правую часть

$$(x^2-4)^{\mathbf{2}}-(a+1)x^2-(3a+4)x+1-a \geq 0. \quad (3)$$

Приходим к следующим выводам:

1) Уравнение (3) является уравнением четвертого порядка и не является биквадратным. Методы решения таких уравнений из школьного курса математики учащиеся не знают.

2) Первое слагаемое в левой части уравнения (3) всегда неотрицательно. Если выражение

$$(a+1)x^2+(3a+4)x+a-1. \quad (4)$$

при всех значениях x не положительно, то условие задачи будет выполнено. Но при этом возможны такие значения параметра, при которых выражение (4) может принимать положительные значения, а неравенство (3) выполняется при всех действительных x.

3) При $a=-1$ выражение (4) равно $(x-2)$ и принимает как положительные (при $x = 4$), так и отрицательные (при $x = 1$) значения. При $a \neq -1$ выражение (4) является квадратным трехчленом и не принимает положительные значения, если выполнены условия:

$$\begin{cases} a+1<0 \\ D=(3a+4)^2-4(a+1)(a-1) \leq 0 \end{cases}.$$

Среди целых значений параметра a указанным условиям удовлетворяют $a=-3$ и $a=-2$.

Мы получили возможные значения параметра a, но не можем гарантировать, что других значений параметра, удовлетворяющих условию задачи, нет.

4) Неравенство справедливо при всех действительных значениях переменной, значит, оно выполняется и для конкретных значений переменной (например, $x=-9$, $x=0$, $x=1$). Подставив различные «удобные» значения переменной, находим значения параметра, при которых эти «удобные» значения находятся среди решений неравенства (3). Например, при $x=0$ получим:

$$17-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 17.$$

Это значит, что любое значение a, большее 17, условию задачи не удовлетворяет.

5) Какие значения переменной «удобно» подставить в заданное неравенство? В нашем случае выберем те значения переменной, при которых первое слагаемое высокой степени в правой части уравнения (3) обращается в ноль: $x=2$ и $x=-2$. В результате получим необходимые (но не достаточные) условия на параметр:

$$\begin{cases} -11a-11 \geq 0 \\ a+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq a \leq -1.$$

По условию задачи параметр принимает целые значения, поэтому возможные значения параметра равны –1, –2, –3, –4 или –5.

6) Искомые значения параметра находятся среди чисел $\{-5,-4,-3,-2,-1\}$, однако не все эти числа могут удовлетворять условию задачи. Каждое найденное значение параметра требует проверку.

7) Чтобы отвергнуть какое-либо значение параметра a, достаточно найти хотя бы одно значение переменной x, при котором левая часть (3) становится отрицательной.

8) При $a=-1$ получим неравенство

$$(x^2-4)^2-x+2 \geq 0,$$

которое не выполняется, например, при $x=2{,}01$. (Учащиеся, как правило, не могут доказать аналитически, что правая часть неравенства может принимать отрицательные значения. Поэтому можно воспользоваться калькулятором или анализом слагаемых в правой части неравенства).

При $a=-3$ и $a=-2$ получим неравенства, справедливые при всех действительных x (см. пункт 3).

При $a=-4$ получим неравенство

$$(x^2-4)^2+3x^2+8x+5 \geq 0.$$

Заметим, что

$$(x^2-4)^2+3x^2+8x+5 = x^4-8x^2+16+3x^2+8x+5 =$$
$$= x^4-7x^2+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+16+2x^2+8x+8-3 = \left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2+2(x+2)^2+\frac{3}{4},$$

поэтому неравенство справедливо при всех действительных значениях x.

При $a = -5$ получим неравенство $(x^2-4)^2+4x^2+11x+6 \geq 0$, которое не выполняется, например, при $x = -1{,}9$.

Таким образом, приходим к ответу задачи: $a = -4, a = -3, \ a = -2$.

Пример 2. При каких значениях параметра m наименьшее значение функции

$$f(x) = 2\,|x| - x^2 + |4x^2+4(m+1)x+m^2+2m| \tag{5}$$

не меньше 3/4?

1) Решение задачи начнем с обсуждения того факта, что если наименьшее значение функции не меньше некоторого числа, то и все значения функции не меньше этого числа. Это означает, что для всех действительных значений x из области определения функции (D_f) выполняется неравенство

$$f(x) \geq f_{\text{наим}} \geq {}^3/_4.$$

Таким образом, $f(x) \geq {}^3/_4$ для всех значений x из D_f. Верно и обратное утверждение: если $f(x) \geq {}^3/_4$ для всех значений x из D_f, то $f_{\text{наим}} \geq \frac{3}{4}$.

Областью определения функции (5) является множество $\mathbb{R}$, поэтому исходную задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра m неравенство

$$2\,|x| - x^2 + |4x^2+4(m+1)x+m^2+2m| \geq \frac{3}{4} \tag{6}$$

выполняется при всех действительных x?

2) Неравенство (6) справедливо для всех действительных x, поэтому оно верно и при конкретных «удобных» значениях x. Чтобы выбрать подходящие значения x, преобразуем выражение под вторым знаком модуля в (6):

$$4x^2+4(m+1)x+m^2+2m =$$
$$= (2x)^2 + 2*(m+1)*(2x) + \overline{(m+1)^2 - (m+1)^2 + m^2 + 2m} =$$
$$= (2x+(m+1))^2 - 1^2 = (2x+m+2)(2x+m).$$

В результате получим

$$2|x| - x^2 + |(2x+m+2)*(2x+m)| \geq 3/4.$$

3) В качестве «удобных» выберем те значения x, при которых выражения под знаком модуля обращаются в ноль:

$$x = 0 \Rightarrow |(m+2)*m| \geq \frac{3}{4} \tag{7}$$

$$x = -\frac{m+2}{2} \Rightarrow |m+2| - \frac{(m+2)^2}{4} + 0 \geq \frac{3}{4} \tag{8}$$

$$x = -\frac{m}{2} \Rightarrow |m| - \frac{m^2}{4} + 0 \geq \frac{3}{4}. \tag{9}$$

Итак, параметр m необходимо должен удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} |(m+2)m| \geq \frac{3}{4} \\ |m+2| - \frac{(m+2)^2}{4} \geq \frac{3}{4} \\ |m| - \frac{m^2}{4} \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

4) Неравенство (9) решим методом интервалов, учитывая равенство $m^2 = |m|^2$:

$$|m| - \frac{|m|^2}{4} \geq \frac{3}{4} \ \Leftrightarrow 1 \leq |m| \leq 3 \ \Leftrightarrow m \in [-3;-1] \vee [1;3].$$

5) Неравенство (8) получается из неравенства (9) заменой m на $m+2$, поэтому его решение имеет вид

$$1 \leq |m+2| \leq 3 \Leftrightarrow (m+2) \in [-3;-1] \vee [1;3] \Leftrightarrow m \in [-5;-3] \vee [-1;1].$$

6) Соотношениям (8), (9) удовлетворяют только целые значения $m = -3; \ m = -1; \ m = 1$.

Все указанные значения параметра удовлетворяют неравенству (7), что проверяется непосредственной подстановкой.

Находим целые решения неравенства (8): $m \in \{-3; \ -2; \ -1; 1; 2; 3\}$ и, подставив эти значения в неравенства (7) и (9), можем найти общие целые решения неравенств (7) – (9).

7) Далее проверяем найденные «возможные» значения параметра m:

Если , то

$$f(x) = f_1(x) = 2|x| - x^2 + |(2x-1)(2x-3)|.$$

При $x \leq 0$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$, абсцисса вершины которой $x_0 = \frac{10}{3} > 0$, поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и

$$f(x) \geq f(0) = 3 > \frac{3}{4}.$$

При $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3(x-1)^2$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 > \frac{1}{2}$, поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

При $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, у параболы ветви направлены вниз, поэтому наименьшее значение достигается в точке $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{3}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Поэтому $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

При $x \geq \frac{3}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3(x-1)^2$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 < \frac{3}{2}$, поэтому $f(x)$ возрастает на $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ и $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Итак, $f(x) \geq \frac{3}{4}$ при всех действительных значениях *x*, $m = -3$ удовлетворяет условию задачи.

Если $m = -1$, то

$$f(x) = 2|x| - x^2 + |4x^2 - 1|.$$

Проверка случая $m = -3$ заняла немало времени. Обсудим возможность «сократить» проверку случая $m = -1$. Заметим, что функция $f(x)$ четная, поэтому достаточно ее исследовать при неотрицательных *x*. Исследование производим аналогично случаю $m = -3$. Получим, что значение $m = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Если $m = 1$, то

$$f(x) = f_3(x) = 2|x| - x^2 + |(2x+3)(2x+1)|.$$

На первый взгляд «сократить» проверку не удастся и придется рассматривать значения функции на четырех промежутках. Однако заметим, что

$$f_3(-x) = 2\,|x| - x^2 + |(3-2x)(1-2x)| =$$
$$= 2|x| - x^2 + |(2x-1)(2x-3)| = f_1(x),$$

то есть график функции $f_3(x)$ симметричен графику функции $f_1(x)$ относительно оси *Oy*, поэтому наименьшее значение у обеих функций одинаково и равно $\frac{3}{4}$. Следовательно, значение $m = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Заметим, что еще ни разу в нашей практике учащиеся не увидели зависимости

$$f_3(-x) = f_1(x).$$

Этот прием становится для них открытием.

Натолкнуть на мысль воспользоваться симметрией графиков функций $f_1(x)$ и $f_3(x)$ может симметричность промежутков, на которые разбивается числовая прямая *Ox* при «раскрытии» модулей.

Ответ: $m = -3, m = \pm 1$.

Пример 3. Найти все значения параметра *p*, при которых неравенство

$$sin^4 x + cos^4 x > p * sin\, x * cos\, x \tag{10}$$

верно, при всех действительных *x.*

Решение.

1) Неравенство верно для всех действительных значений *x*, значит, оно верно и при некоторых «удобных» значениях *x.* Какие значения переменной удобно взять? Заметим, что функции $sin\, x$ и $cos\, x$ входят в неравенство симметрично, поэтому выберем те значения переменной, при которых значения $cos\, x$ и $cos\, x$ равны или противоположны, например, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\frac{\pi}{4}$. В результате получим ограничения на параметр:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 > p * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\,p \Leftrightarrow p < 1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 > p * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}\,p \Leftrightarrow p > -1\,.$$

Искомые значения параметра *p* находятся среди значений $-1 < p < 1$. Другие значения параметра *p* не подходят, так как неравенство не будет выполняться при всех действительных значениях переменной, а именно, либо $x = \frac{\pi}{4}$, либо $x = -\frac{\pi}{4}$ не является решением неравенства.

2) Подстановка других значений переменной найденное множество значений параметра не сужает ($x = \pm\frac{\pi}{6}$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\pi$). Возникает предположение, что все значения параметра удовлетворяют условию задачи.

3) Покажем, что при любом $p \in (-1; 1)$ неравенство (10) выполняется при всех действительных значениях *x*. В левой части неравенства (10) добавим и вычтем выражение $2Sin^2x\ Cos^2x$. В результате преобразований получим:

$$Sin^2 2x + \ p\ Sin\ 2x < 2.$$

Последнее неравенство верно при всех действительных значениях переменной, так как справедливы оценки:

$$0 \leq Sin^2 2x \leq 1, \qquad -1 \leq Sin2x \leq 1, \qquad -1 < p < 1,$$

поэтому

$$-1 < p * Sin\ 2x\ < 1 \quad \text{и} -1 < \ Sin^2 2x + p\ Sin\ 2x < 2.$$

Ответ: $p \in (-1; 1)$**.**

Пример 4. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{3^x + 3^{-x} - a}{a + 5} > 0$$

выполняется для всех действительных *x*?

1) Сделаем замену переменной:

$$t\ =\ 3^x + 3^{-x}.$$

Подчеркнем, что если *x* «пробегает» все действительные значения, то «пробегает» все значения из промежутка $[2; +\infty)$. Следовательно, можем переформулировать исходную задачу: при каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{t - a}{a + 5} > 0 \tag{11}$$

выполняется для всех действительных значений $t \in [2; +\infty)$?

2) Заметим, что $a\ =\ -5$ не удовлетворяет условию задачи, так как левая часть неравенства при этом значении параметра не имеет смысла.

3) Неравенство $\frac{t-a}{a+5} > 0$ должно быть верным при всех $t \geq 2$, значит, и при $t\ =\ 2$, то есть справедливо неравенство $\frac{2-a}{5+a} > 0$. Получаем необходимое условие для значения параметра: $a \in (-5; 2)$.

4) Остается доказать, что любое значение a из промежутка (–5; 2) удовлетворяет условию задачи. Действительно, если $a \in (-5; 2)$, то $a + 5 > 0$, поэтому

$$\frac{3^x + 3^{-x} - a}{a + 5} > 0, \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} - a > 0 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} > a.$$

Заметим, что $3^x + 3^{-x} \geq 2$ при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому

$$3^x + 3^{-x} \geq 2 > a \text{ при } a \in (-5; 2).$$

Таким образом, любое значение $a \in (-5; 2)$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in (-5; 2)$**.**

Пример 5. При каких *x* для любого *y* существует *z* такое, что

$$Sin(x + y + z)\ =\ Cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) * \left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2Cosx}? \tag{12}$$

Решение.

1) Уравнение содержит три переменных. Предположим, что требуемое значение *x* найдено. Тогда уравнение (12) должно иметь решения *z* при любом конкретном значении *y*. Рассмотрим значения *y*, при которых одно из слагаемых в левой части уравнения (12) обращается в ноль: $y\ =\ -\frac{1}{2}$ и $y\ =\ \frac{3}{2}$.

При $y\ =\ -\frac{1}{2}$ уравнение (12) примет вид

$$Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right)\ =\ \frac{1}{Cosx}, \tag{13}$$

а при $y\ =\ \frac{3}{2}$ уравнение (12) примет вид

$$Sin\left(x + \frac{1}{2} + z\right)\ =\ 2Cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \tag{14}$$

2) Простого решения уравнения (14) не видно. Рассмотрим подробнее уравнение (13). Заметим, что его левая часть принимает значения из промежутка $[-1; 1]$, а правая – $(-\infty;\ -1] \cup [1; +\infty)$, поэтому уравнение (13) равносильно совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right)\ =\ 1 \\ Cosx\ =\ 1 \end{cases} \vee \begin{cases} Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right)\ =\ -1 \\ Cosx\ =\ -1 \end{cases},$$

из которой получим возможные значения $x\ =\ \pi n$.

3) Необходима проверка найденных значений переменной x.

При $x = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) уравнение (12) примет вид

$$2Sin(y+z) = \left|y+\frac{1}{2}\right| + \left|y-\frac{3}{2}\right|. \tag{15}$$

Левая часть (15) принимает значения $[-2; 2]$, а правая часть не меньше 2, поэтому

$$\begin{cases} 2Sin(y+z) = 2 \\ \left|y+\frac{1}{2}\right| + \left|y-\frac{3}{2}\right| = 2 \end{cases},$$

второе уравнение которой справедливо только при $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Итак, $x = 2\pi n$ условию задачи не удовлетворяют.

При $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) уравнение (12) примет вид

$$2\,Sin(y+z) = \left|y-\frac{3}{2}\right| - \left|y+\frac{1}{2}\right|. \tag{16}$$

Правая часть (16) при $y \in \mathbb{R}$ принимает значения из промежутка $[-2; 2]$, поэтому при любом фиксированном значении y уравнение (16) имеет решения.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Список литературы

1. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. Киев : Текст ; ОКО, 1992. 290 с.

2. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Использование различных методов решения задач с параметром на едином государственном экзамене по математике // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2016. № 8. С. 139–160. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id = 26935738 (дата обращения: 14.03.2021).

3. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Обучение школьников различным способам решения задач с параметрами // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2017. № V7. С. 62–71. URL: http://e–koncept.ru/2017/170161.htm (дата обращения: 26.02.2021).

4. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А.* Замена переменной в задачах с параметрами // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2018. № V7. С. 82–92. URL: http://e–koncept.ru/2018/186066.htm (дата обращения: 26.02.2021).

5. *Рыжик В. И.* 25 000 уроков математики : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1993. 240 с. : ил.

Solving problems with a parameter by the method of allocating the necessary conditions for the parameter

M. Yu. Zdorovenko[1], M. N. Levin[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: zdorovenko.s@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

Abstract. The article offers methodological recommendations for conducting classes on an elective course in mathematics in grades 8–11 on the topic "Solving problems with parameters".

The method of allocating the necessary conditions to a parameter for solving the most logically complex problems is considered. The formulation of such problems contains the conditions "for all values of the variable x from some set M, conditions A are satisfied" or "there exists x that condition A is satisfied for any y". The proposed tasks and analyzed examples are aimed at forming a general mathematical culture of students, developing their research skills and the ability to think logically, as well as generalize and apply the knowledge gained to solve mathematical problems.

The presented work will be of interest to students of grades 8–11, mathematics teachers working in high school, students of mathematical specialties of pedagogical universities, methodologists.

Keywords: problem with parameters, necessary condition, mathematical education.

References

1. *Gornshtejn P. I., Polonskij V. B., Yakir M. S. Zadachi s parametrami* [Problems with parameters]. Kiev. Text; OKO. 1992. 290 p.

2. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A., Krutihina M. V. Ispol'zovanie razlichnyh metodov resheniya zadach s parametrom na edinom gosudarstvennom ekzamene po matematike* [The use of various methods for solving problems with a parameter on the unified state exam in mathematics] // *Koncept : nauch.-metod. elektron. zhurnal* – Concept : scient. method. electron. journal. 2016. No. 8. Pp. 139–160. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id = 26935738 (date accessed: 14.03.2021).

3. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A., Krutihina M. V. Obuchenie shkol'nikov razlichnym sposobam resheniya zadach s parametrami* [Teaching schoolchildren various ways to solve problems with parameters] // *Koncept : nauch.-metod.*

elektron. zhurnal – Concept : scient. method. electron. journal. 2017. No. V7. Pp. 62–71. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170161.htm (date accessed: 26.02.2021).

4. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A. Zamena peremennoj v zadachah s parametrami* [Variable replacement in problems with parameters] // *Koncept : nauch.-metod. elektron. zhurnal* – Concept : scient. method. electron. journal. 2018. No. V7. Pp. 82–92. Available at: http://e-koncept.ru/2018/186066.htm (date accessed: 26.02.2021).

5. *Ryzhik V. I. 25 000 urokov matematiki : kn. dlya uchitelya* [25,000 math lessons : book for teachers]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1993. 240 p. : ill.