№2 (21) 2021 ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN
of Vyatka State University

Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал

№ 2 (21)

Киров
2021

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **А. В. Мариева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**
Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

МАТЕМАТИКА

УДК 514.126 DOI 10.25730/VSU.0536.21.008

Свойства седловых поверхностей галилеева пространства

А. Артикбаев[1], Т. Н. Сафаров[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта.
Узбекистан, г. Ташкент. E-mail: aartykbaev@mail.ru
[2]доктор философских наук по геометрии и топологии, кафедра алгебры и геометрии,
Термезский государственный университет.
Узбекистан, г. Термез. E-mail: tolqin.1986@mail.ru

Аннотация. В работе изучены седловые поверхности галилеева пространства, которые являются пространством с вырожденной метрикой. Исследованы поверхности вращения, доказано, что дефект кривизны поверхности равен нулю. Определен класс поверхностей вращения постоянной кривизны.

Изучены седловые поверхности галилеева пространства и разделены на два типа: седловая и циклическая седловая. Доказано, что не существует движение галилеева пространства, преобразующее поверхности одного типа в другой. Даны примеры седловых поверхностей разного типа, которые в евклидовом пространстве равны. Изучены седловые поверхности переноса.

Ключевые слова: галилеево пространство, вырожденная метрика, гауссова кривизна, циклическая поверхность, седловая поверхность, поверхность вращения, особая плоскость, дефект кривизны, асимптотическое направление.

1. Основные понятия теории поверхностей галилеева пространства

Теория поверхностей галилеева пространства R_3^1 изучена в работах [1–3; 8–10]. Общая теория поверхностей полуевклидовых пространств изучена в монографии Б. А. Розенфельда [5].

Для исследования поверхностей в R_3^1 использована специальная система координатных линий на поверхности. Вектор функции поверхности в специальной системе координат имеет вид:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \qquad (u,v) \in D \tag{1}$$

Если O_{xyz} – система координат галилеева пространства, то плоскости, параллельные координатной плоскости O_{yz}, называются *особыми плоскостями*. В специальной системе криволинейных координат координатная линия *u = const* принадлежит особой плоскости.

Такой выбор криволинейных координат на поверхности дает возможность определить вырожденную первую квадратичную форму поверхности [1; 2; 8].

Если поверхность, заданная уравнением (1), регулярна, то ее первая квадратичная форма:

$$ds_1^2 = du^2 \text{, когда } u = const\text{, } du = 0 \tag{2а}$$

$$ds_2^2 = G(u,v)dv^2 \tag{2б}$$

Функция *G(u,v)* называется *коэффициентом первой квадратичной формы поверхности в* R_3^1.

Известно [4], что гауссова кривизна поверхности в евклидовом пространстве выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. Но в галилеевом пространстве R_3^1 аналог гауссовой кривизны не определяется только коэффициентом первой квадратичной формы [1].

Гауссова кривизна поверхности в R_3^1 вычисляется по формуле:

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2}, \tag{3}$$

где $F = y_u y_v + z_u z_v$, $E = {y_u}^2 + {z_u}^2$ и $G = {y_v}^2 + {z_v}^2$

Выражение $D(u,v)=F_u-\frac{1}{2}E_v$ называется *дефектом кривизны поверхности*. Дефект кривизны не зависит от первой квадратичной формы поверхности [1; 6]. Поэтому гауссова кривизна поверхности не полностью выражается через коэффициент первой квадратичной формы поверхности R_3^1.

2. Поверхности вращения в R_3^1

Условие, что в R_3^1 рассматриваем поверхности, вектор-функция которых имеет вид (1), не дает возможность рассматривать произвольные поверхности. Это условие геометрически означает, что рассматриваемые поверхности не имеют особые опорные плоскости. Но класс поверхностей, вектор-функции которых имеют вид (1), достаточно широк.

В этот класс относятся поверхности вращения в R_3^1, получающиеся вращением кривой, однозначно проектирующейся на ось O_x и принадлежащей плоскости O_{xz}.

Пусть кривая g задана уравнением

$$z=\varphi(x) \qquad a\le x\le b$$

Вращая кривую g вокруг оси O_x, получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид:

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+\varphi(u)\cos v\vec{j}+\varphi(u)\sin v\vec{k}$$

Утверждение 1. Дефект кривизны поверхности вращения равен нулю.

Утверждение доказываем непосредственным вычислением дефекта кривизны. Действительно:

$$F=\left(\varphi(u)\cos v\right)_u\left(\varphi(u)\cos v\right)_v+\left(\varphi(u)\sin v\right)_u\left(\varphi(u)\sin v\right)_v=\varphi(u)\left(\varphi'(u)\right)\cos v(-\sin v)+\left(\varphi'(u)\right)\varphi(u)\sin v\cos v=0$$

$$E=\left(\varphi(u)\cos v\right)_v^2+\left(\varphi(u)\sin v\right)_v^2=\varphi^2(u)\left[\sin^2 v+\cos^2 v\right]=\varphi^2(u)$$

Следовательно:

$$D(u,v)=F_u-\frac{1}{2}E_v=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi^2(u)\right)=0$$

Значит, для поверхностей вращения дефект кривизны равен нулю. Из этого факта можно получить следующее следствие.

Следствие. Гауссова кривизна поверхности вращения выражается через коэффициент первой квадратичной формы.

Действительно, в формуле (3) гауссовой кривизны первое выражение обращается в ноль, а второе выражение зависит только от коэффициента первой квадратичной формы.

Тогда гауссова кривизна поверхности вычисляется по формуле:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G(u,v)}}\frac{\partial^2\sqrt{G(u,v)}}{du^2}=-\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)},$$

так как $G(u,v)=\varphi^2(u)$

Исследуем класс поверхностей с постоянной гауссовой кривизной.

Пусть S – регулярная поверхность вращения постоянной кривизны K и M – произвольной точкой этой поверхности. Уравнение кривой, вращением которой вокруг оси O_x получается поверхность, должно удовлетворять дифференциальное уравнение

$$\varphi''(u)+K\varphi(u)=0$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим три возможных случая и получим общее решение уравнения.

$$1)\ K<0 \qquad \varphi(u)=c_1e^{-\sqrt{k}u}+c_2e^{\sqrt{k}u}$$

$$2)\ K=0 \qquad \varphi(u)=c_1u+c_2$$

$$3)\ K>0 \qquad \varphi(u)=c_1\cos\sqrt{k}u+c_2\sin\sqrt{k}u$$

Как частное решение можно привести следующие примеры:

$$\varphi(u)=chu, \qquad \varphi(u)=pu+l, \qquad \varphi(u)=\sin u$$

Поверхность, получающаяся вращением одной арки функции $z=\sin u,\quad 0\le u\le\pi$, является аналогом сферы евклидова пространства в галилеевом пространстве. Она является аналогом полной выпуклой замкнутой поверхности, не имеющей особых касательных плоскостей. Поверхность имеет две конические точки O и A, где особые плоскости будут опорными плоскостями (Рис. 1).

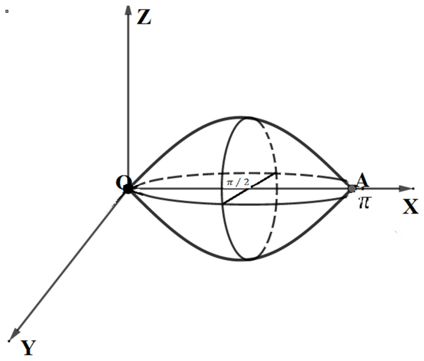


Рис. 1.

3. Седловые поверхности в R_3^1

В галилеевом пространстве, как и в евклидовом, седловыми поверхностями называются поверхности, во всех точках которых гауссова кривизна отрицательна. Среди поверхностей вращения поверхность, образованная вращением кривой *z = chu*, является примером седловой поверхности галилеева пространства (Рис. 2).

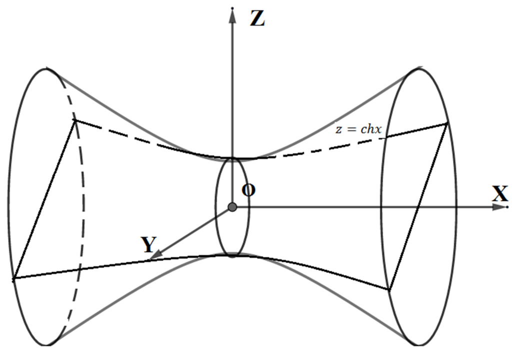


Рис. 2.

В работе [1] доказано, что если поверхность R_3 в евклидовом пространстве седловая, то она и в галилеевом пространстве также будет седловой.

Доказательство основано на принципе наложенного пространства. Принцип заключается в том, что координатная система рассматривается одновременно как в евклидовом, так и в галилеевом пространствах.

Но изучение седловых поверхностей в R_3^1 существенно отличается от евклидова пространства. Так как гиперболические точки поверхности галилеева пространства разделены на два класса: гиперболические и циклические. Причем геометрия циклических поверхностей имеет достаточно индивидуальный характер. Изучению циклических поверхностей посвящены работы [1; 10].

Циклическая поверхность характерна тем, что одно из асимптотических направлений всегда параллельно особой плоскости галилеева пространства.

Следующий пример показывает, что среди циклических поверхностей существуют седловые поверхности галилеева пространства.

Рассмотрим поверхность, заданную вектор-функцией

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + vshu\vec{k} \qquad (4)$$

Вычислим первую и вторую квадратичную форму (4) поверхности:

$$I_1 = du^2,\ I_2 = ch^2 u dv^2 \quad когда \quad I_1 = 0$$

$$II = -thudu^2 + 2dudv$$

Так как во второй квадратичной форме $N = 0$, поверхность является циклической поверхностью. При этом гауссова кривизна $K = -M^2 = -4 < 0$ отрицательна.

Следовательно: седловые поверхности галилеева пространства могут быть циклическими.

Таким образом, седловые поверхности R_3^1 разделяются на два типа. Эти типы определяются тем, как располагаются асимптотические направления поверхности относительно особой плоскости. В первом случае оба асимптотических направления поверхности не параллельны особой плоскости, во втором случае одно из асимптотических направлений параллельно особой плоскости.

Определение: седловую поверхность назовем циклически седловой, если одно из асимптотических направлений всегда параллельно особой плоскости.

Вышеприведенная поверхность (4) является примером циклически седловой поверхности.

Следовательно, в галилеевом пространстве исследования седловой поверхности должны разделяться по типу поверхности. Так как справедливо следующее:

Теорема 1. Движением галилеева пространства невозможно преобразовать седловую поверхность на циклически седловую поверхность, и наоборот.

Доказательство теоремы следует из того, что при движении галилеева пространства векторы общего положения нельзя перевести на вектор, параллельный особой плоскости, и наоборот. Так как асимптотические направления определяются соответствующими векторами.

Важность этой теоремы заключается в том, что две поверхности, которые равны в евклидовом пространстве, могут быть различного типа в галилеевом пространстве R_3^1. Это утверждение покажем в следующем примере.

Пример. Поверхность $z=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$ – седловая, а поверхность *z = xy* – циклически седловая.

Очевидно, эти поверхности в евклидовом пространстве равны. Потому что, вращая координатную систему вокруг оси O_z, из первого уравнения можно получить второе.

$$x'=\frac{1}{2}(x-y)=x\cos 45^0-y\sin 45^0$$

$$y'=\frac{1}{2}(x+y)=x\sin 45^0+y\cos 45^0$$

Следовательно, эти поверхности в евклидовом пространстве равны, так как они получаются друг от друга вращением системы координат евклидова пространства на 450 вокруг оси O_z.

В галилеевом пространстве не существует вращение, которое бы преобразовало первую поверхность во вторую. Этот факт доказывается непосредственным вычислением.

$$\begin{aligned}&x'=x\\&y'=h_1x+y\cos\alpha-z\sin\alpha\\&z'=h_2x+y\sin\alpha+z\cos\alpha\end{aligned}$$

Значит, равные седловые поверхности евклидова пространства могут быть различными типами в галилеевом пространстве. Поэтому седловую и циклически седловую поверхности рассматриваем по отдельности.

Пусть в R_3^1 задана поверхность переноса [4], определенная на всей плоскости O_{xy}.

$$z=\varphi(x)+\psi(y)\quad(-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty)$$

Теорема 2. Если $\varphi_{xx}''(x)\cdot\psi_{yy}''(y)<0$, то поверхность переноса является седловой поверхностью в R_3^1.

Доказательство. Уравнение поверхности напишем в векторном виде:

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+[\varphi(u)+\psi(v)]\vec{k}$$

Уравнение имеет вид (1), значит, оно не имеет особых касательных плоскостей.

Вычислим гауссову кривизну (3) поверхности в R_3^1.

$$K=\frac{\varphi''(u)\psi''(v)}{1+\psi_v^2(v)}$$

Так как $1+\psi_v^2(v)>0$, при условии $\varphi''(u_0)\cdot\psi''(v_0)<0$, гауссова кривизна поверхности будет отрицательной.

Следовательно, поверхность седловая.

Когда $\varphi''(y)=0$, то есть $\varphi(y)=c_1(x)+c_2$ – поверхность будет циклической поверхностью галилеева пространства. Причем, $K\equiv 0$, и поверхность не является седловой поверхностью.

Список литературы

1. *Артыкбоев А., Соколов Д. Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент : Фан, 1991. 179 с.

2. *Курбонов Э. К.* О поверхности галилеева пространства // Узбекский математический журнал. 2005. № 1. С. 46–52.

3. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М. : Изд-во МГУ, 1990.

4. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 648 с. : ил.

5. *Султанов Б. М.* Поверхности, определяемые символами Кристоффеля // Modern problems of geometry and topology and its applications. 21–23 November, Toshkent, Uzbekistan. 2019. Pp. 180–181.

6. *Яглом И. М.* Принцип относительности галилеевой и неевклидовой геометрии. М. : Наука, 1969. 394 с.
7. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Invariants of surface indicatrix in a Special linear transformation // Mathematics and statistics. USA. 2019. № 7 (4). Pp. 106–115.
8. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Research of parabolic surface points in Galilean space // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 2. Is. 4.
9. *Dede M., Ekici C., Geomans W.* Surface of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14. Is. 2. Pp. 141–152.
10. *Ozturk U., Кос Ozturk E. B., Nesovic E.* On eqiform Darboux helices in Galilean 3-space // Mathematical Communications. 2018. Vol. 23. No. 2. Pp. 145–159.

Properties of saddle surfaces of Galilean space

A. Articbaev[1], T. N. Safarov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent Institute of Railway Transport Engineers. Uzbekistan, Tashkent. E-mail: aartykbaev@mail.ru

[2]Doctor of Philosophical Sciences in Geometry and Topology, Department of Algebra and Geometry, Termez State University. Uzbekistan, Termez. E-mail: tolqin.1986@mail.ru

Abstract. In this paper, saddle surfaces of Galilean space, which are a space with a degenerate metric, are studied. The surfaces of rotation are investigated, it is proved that the curvature defect of the surface is zero. A class of surfaces of rotation of constant curvature is defined.

Saddle surfaces of Galilean space are studied and divided into two types: saddle and cyclic saddle. It is proved that there is no motion of Galilean space that transforms surfaces of one type into another. Examples of saddle surfaces of different types, which are equal in Euclidean space, are given. Saddle transfer surfaces have been studied.

Keywords: Galilean space, degenerate metric, Gaussian curvature, cyclic surface, saddle surface, rotation surface, special plane, curvature defect, asymptotic direction.

References

1. *Artykboev A., Sokolov D. D. Geometriya v celom v ploskom prostranstve-vremeni* [Geometry in general in a flat space-time]. Tashkent. Fan. 1991. 179 p.
2. *Kurbonov E. K. O poverhnosti galileeva prostranstva* [On the surface of Galilean space] // *Uzbekskij matematicheskij zhurnal* – Uzbek Mathematical Journal. 2005. No. 1. Pp. 46–52.
3. *Poznyak E. G., Shikin E. V. Differencial'naya geometriya: pervoe znakomstvo* [Differential geometry: the first acquaintance]. M. Publishing House of Moscow State University. 1990.
4. *Rosenfeld B. A. Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional spaces]. M. Nauka (Science). The main editorial of the physical and mathematical literature. 1966. 648 p. : ill.
5. *Sultanov B. M. Poverhnosti, opredelyaemye simvolami Kristoffelya* [Surfaces defined by Christoffel symbols] // *Modern problems of geometry and topology and its applications* – Modern problems of geometry and topology and its applications. 21-23 November, Toshkent, Uzbekistan. 2019. Pp. 180–181.
6. *Yaglom I. M. Princip otnositel'nosti galileevoj i neevklidovoj geometrii* [The principle of relativity of Galilean and non-Euclidean geometry]. M. Nauka (Science). 1969. 394 p.
7. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Invariants of surface indicatrix in a Special linear transformation // Mathematics and statistics. USA. 2019. No. 7 (4). Pp. 106–115.
8. *Artykbayev A., Sultanov B. M.* Research of parabolic surface points in Galilean space // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Vol. 2. Is. 4.
9. *Dede M., Ekici C., Geomans W.* Surface of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14. Is. 2. Pp. 141–152.
10. *Ozturk U., Кос Ozturk E. B., Nesovic E.* On eqiform Darboux helices in Galilean 3-space // Mathematical Communications. 2018. Vol. 23. No. 2. Pp. 145–159.

УДК 517.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.009

Об одном методе приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой

О. Л. Бозиев
кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник,
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН.
Россия, г. Нальчик. ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Аннотация. В работе предлагается метод решения смешанной задачи для параболического уравнения с интегральной нагрузкой, которая представляет собой интеграл по пространственной переменной некоторой степени искомой функции. Первым шагом применения метода является установление априорной оценки решения задачи в пространстве Лебега подходящей степени. Она используется для линеаризации нагруженного уравнения путем замены нелинейного члена правой частью априорного неравенства. Посредством интегрирования линеаризованного уравнения по пространственной переменной производится переход к ассоциированному с ним линейному обыкновенному дифференциальному уравнению. Получено приближенное решение нагруженного уравнения, выраженное через его норму, и решение ассоциированного обыкновенного дифференциального уравнения. Оно может быть принято за начальное приближение в процессе последовательной аппроксимации точного решения сформулированной задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, априорная оценка, приближенное решение.

Согласно [2, с. 12] нагруженным дифференциальным уравнением, заданным в некоторой n-мерной области евклидова пространства, называется уравнение, содержащее след некоторых операций от искомого решения на многообразиях размерности меньших n, принадлежащих замыканию области.

Нагруженные уравнения в частных производных позволяют с удовлетворительной точностью моделировать процессы с последействием, протекающие в физических, биологических, экологических и других сложных системах [см., например, 1; 4; 5]. В таких процессах состояние, в которое система перешла под воздействием процесса, зависит от развития процесса в прошлом, то есть от того, каким образом и когда система оказалась в данном состоянии.

К такому типу относится уравнение с интегральной нагрузкой

$$u_t - u_{xx} - au + \frac{a}{l}\int_{\Omega} u^2 dx = 0, \tag{1}$$

которое будем рассматривать в области $Q = (0,T)\times\Omega,\ \Omega = [0,l]$, при условиях

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\varphi(x) \in C^1[0,l], \psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1[0,T].$$

Рассмотрим способ решения задачи (1) – (3), состоящий в использовании априорной оценки решения задачи для ее линеаризации. Заметим, что интегральная нагрузка уравнения (1) является при любом t квадратом нормы функции $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, которую обозначим как

$$\|u\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx = \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Теорема. Пусть при любом t функция $u \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (1) – (3). Тогда функция $\|u\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Запишем скалярное произведение уравнения (1) и функции u:

$$(u_t, u) - (u_{xx}, u) - a(u,u) + \left(\frac{a}{l}\|u\|_{2,\Omega}^2, u\right) = 0. \tag{4}$$

Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$(u_t, u) = \int_\Omega u_t u\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega},\ a(u,u) = a\int_\Omega u^2\, dx, \left(\frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}, u\right) = \frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega u dx,$$

$$-(u_{xx}, u) = u_x(0,t)\psi_1(t) - u_x(l,t)\psi_2(t) + \int_\Omega |u_x|^2\, dx.$$

Возвращаясь к (4), получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega} = a\|u\|^2_{2,\Omega} + u_x(l,t)\psi_2(t) - u_x(0,t)\psi_1(t) - \int_\Omega |u_x|^2\, dx - \frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega u dx,$$

от которого перейдем к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{2,\Omega} \le a\|u\|^2_{2,\Omega} + \frac{a}{l}\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega |u|\, dx + |u_x(l,t)||\psi_2(t)| + |u_x(0,t)||\psi_1(t)|.$$

Обе его части проинтегрируем по t:

$$\|u\|^2_{2,\Omega} \le 2a\int_0^t \|u\|^2_{2,\Omega} d\tau + \frac{2a}{l}\int_0^t \|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega |u|\, dx d\tau + 2\int_0^t \left(|u_x(l,t)||\psi_2(t)| + |u_x(0,t)||\psi_1(t)|\right) d\tau + \|u(x,0)\|^2_{2,\Omega}.$$

В силу вложения $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ можно записать

$$\|u\|^2_{2,\Omega}\int_\Omega |u|\, dx = \|u\|^2_{2,\Omega}\|u\|_{1,\Omega} \le \sqrt{l}\,\|u\|^2_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega} = \sqrt{l}\,\|u\|^3_{2,\Omega}.$$

С учетом этого, а также условия (2), перейдем к неравенству

$$\|u\|^2_{2,\Omega} \le 2a\int_0^t \|u\|^2_{2,\Omega} dt + \frac{2a}{\sqrt{l}}\int_0^t \|u\|^3_{2,\Omega} dt + K,$$

$$K = \|\varphi(x)\|^2_{2,\Omega} + 2\max_{t\in[0,T]}\int_0^t \left(|u_x(l,\tau)||\psi_2(\tau)| + |u_x(0,\tau)||\psi_1(\tau)|\right) d\tau.$$

К последнему неравенству применим один из нелинейных аналогов неравенства Гронуолла-Беллмана [3, с. 22], что приводит к оценке

$$\|u\|^2_{2,\Omega} \le C(t), \tag{5}$$

$$C(t) = Ke^{2at}\left(1 + \sqrt{\frac{K}{l}}\left(e^{at} - 1\right)\right)^{-2}. \tag{6}$$

При этом константа K должна удовлетворять неравенству

$$K < \frac{l}{a^2T^2}e^{-2aT}. \tag{7}$$

Таким образом, теорема доказана.

Как было сказано выше, априорная оценка (5) будет использоваться для линеаризации уравнения (1), а именно, принимая равенство в (5), перейдем от (1) к линейному уравнению

$$u_t - u_{xx} - au = -\frac{a}{l}C(t), \tag{8}$$

решение которого будем искать при первоначальных условиях (2) и (3).

Перейдем теперь к ассоциированному с (8) обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого сначала проинтегрируем (8) по пространственной переменной:

$$u_x = \int_0^x (u_t - au)d\xi + \frac{a}{l}xC(t) + \psi_1(t).$$

К интегралу в правой части применим аналог теоремы о среднем значении интеграла, для чего устремим верхнюю границу интеграла к l и разделим его на l. В результате получим

$$u_x = x\left(\overline{u}'(t) - a\overline{u}(t)\right) + \frac{ax}{l}C(t) + \psi_1(t), \tag{9}$$

где

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{l}\int_\Omega u(x,t)dx. \tag{10}$$

Интегрируя (9) по x и учитывая граничные условия, придем к формуле

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(x^2-1)\left(\overline{u}'(t)-a\overline{u}(t)\right)+\frac{a}{2}\left(\frac{x^2}{l}-l\right)C(t)+(x-l)\psi_1(t)+\psi_2(t). \qquad (11)$$

Таким образом, получено соотношение, выражающее искомую функцию через функции (10) и $C(t)$. Применяя к (11) преобразование (10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\overline{u}'+\left(\frac{3}{l^2}-a\right)\overline{u}=\frac{3}{l}\left(\frac{\psi_2}{l}-\frac{\psi_1}{2}\right)-\frac{a}{l}C(t). \qquad (12)$$

Начальное условие, необходимое для его интегрирования, легко получить из (2) с помощью преобразования (10):

$$\overline{u}(0)=\frac{1}{l}\int_\Omega u(x,0)dx=\frac{1}{l}\int_\Omega \varphi(x)dx. \qquad (13)$$

Как известно, полученная задача Коши имеет единственное решение при условии непрерывности коэффициентов и правых частей (12) и (13). Найденную в результате решения этой задачи функцию $\overline{u}$ необходимо подставить вместе с $C(t)$ в выражение (11) для получения решения задачи (1) – (3).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение описанного метода.

Примем в задаче (1) – (3) $a=1, l=1, T=1.$ Подставляя эти значения в неравенство (7), находим, что $K < 0{,}135$. Пусть $K = 0{,}1$. Тогда, согласно (6),

$$C(t)=0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2}. \qquad (14)$$

Заметим, что знаменатель правой части отличен от нуля для всех $t\ge 0$.

В условиях (2), (3) выберем $\varphi(x)=x,\ \psi_1(t)=\psi_2(t)=t,$ в силу чего (11) после подстановки $C(t)$ запишется как

$$u(x,t)=0{,}5(x^2-1)\left(\overline{u}'(t)-\overline{u}(t)+0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2}\right)+tx, \qquad (15)$$

а уравнение (12) и условие (13) соответственно принимает вид

$$\overline{u}'+2\overline{u}=1{,}5t-0{,}1e^{2t}\left(0{,}31623e^t-0{,}68377\right)^{-2},$$

$$\overline{u}(0)=0{,}5.$$

Последняя задача имеет решением функцию

$$\overline{u}(t)=\frac{e^{3t}}{0{,}31623e^t-0{,}68377}-0{,}21388e^{2t}\ln\left|\frac{0{,}31623e^t-0{,}68377}{e^t}\right|-0{,}5t-0{,}125.$$

Ее подстановка в (15) приводит к приближенному решению задачи (1) – (3):

$$u(x,t)=0{,}5(x^2-1)e^{2t}\left(\frac{0{,}63246e^{2t}-2{,}05131e^t+0{,}1}{(0{,}31623e^t-0{,}68377)^2}-\frac{1{,}93236e^t+0{,}21388}{0{,}31623e^t-0{,}68377}-\right.$$

$$\left.-0{,}21388\ln\left|\frac{0{,}31623e^t-0{,}68377}{e^t}\right|\right)+xt+0{,}5t-0{,}375.$$

Очевидно, что оно зависит от выбора значения K в решении неравенства (7). Полученное решение может быть использовано в качестве начального приближения в процессе последовательной аппроксимации точного решения сформулированной задачи.

Итак, процедура нахождения приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой (1) при условиях (2), (3) описанным методом состоит из следующих этапов:

1) получение априорной оценки (5) нагруженной задачи с применением известных интегральных неравенств и теорем вложения и определение ее правой части, то есть функции (6);

2) линеаризация нагруженного уравнения путем замены интегральной нагрузки правой частью неравенства (5) – уравнение (8);

3) переход от линеаризованного уравнения к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (12);

4) его решение при условии (13);

5) получение решения исходной задачи подстановкой в формулу (11) решения задачи (12), (13) и функции (6).

Среди перечисленных этапов наибольшую сложность представляет вывод необходимого априорного неравенства и определение его правой части (этап 1).

Приведенный метод может быть применен к уравнениям с интегральной нагрузкой различного типа и порядка. При этом является существенным возможность представления интегральной нагрузки в виде некоторой степени нормы искомой функции в соответствующем лебеговом пространстве.

Список литературы

1. *Лаптев Г. И.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.

3. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 152 с.

4. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. Pp. 227–244.

5. *M. Milla Miranda, A. T. Lourêdo, L. A. Medeiros* On Second-Order Differential Equations with Nonsmooth Second Member // ISRN Applied Mathematics. 2014. Pp. 1–13.

On one method of approximate solution of a parabolic equation with an integral load

O. L. Boziev

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor,
Kabardino-Balkarian State University n. a. H. M. Berbekov; Senior Researcher, Institute of Informatics
and Problems of Regional Management of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.
Russia, Nalchik. ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Abstract. The paper proposes a method for solving a mixed problem for a parabolic equation with an integral load, which is an integral over a spatial variable of some degree of the desired function. The first step in applying the method is to establish an a priori estimate of the solution of the problem in the Lebesgue space of a suitable degree. It is used to linearize a loaded equation by replacing the nonlinear term with the right-hand side of the a priori inequality. By integrating a linearized equation over a spatial variable, a transition is made to the linear ordinary differential equation associated with it. An approximate solution of the loaded equation expressed in terms of its norm and the solution of the associated ordinary differential equation is obtained. It can be taken as an initial approximation in the process of sequential approximation of the exact solution of the formulated problem.

Keywords: loaded equation, a priori estimation, approximate solution.

References

1. *Laptev G. I. Kvazilinejnye parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka s integral'nymi koefficientami* [Quasilinear parabolic equations of the second order with integral coefficients] // *DAN SSSR* – DAN USSR. 1987. Vol. 293. No. 2. Pp. 306–309.

2. *Nahushev A. M. Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie* [Loaded equations and their application]. M. Nauka (Science). 2012. 232 p.

3. *Filatov A. N., Sharova L. V. Integral'nye neravenstva i teoriya nelinejnyh kolebanij* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. M. Nauka (Science). 1976. 152 p.

4. *Grotta Ragazzo C.* Chaos and integrability in a nonlinear wave equation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1994. Vol. 6. No. 1. Pp. 227–244.

5. *M. Milla Miranda, A. T. Lourêdo, L. A. Medeiros* On Second-Order Differential Equations with Nonsmooth Second Member // ISRN Applied Mathematics. 2014. Pp. 1–13.

УДК 512.55 DOI 10.25730/VSU.0536.21.010

Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца

Е. М. Вечтомов[1], А. А. Петров[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-5877-2850. E-mail: apetrov43@mail.ru

Аннотация. В работе описаны все трехэлементные полукольца с идемпотентным умножением: показано, что с точностью до изоморфизма таких полуколец ровно 43, они заданы таблицами Кэли, а также диаграммами Хассе в случае полурешеточных редуктов. На основании полученных результатов перечислены все 46 четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца с нулем, в том числе 17 полуколец с нулем и единицей.

Ключевые слова: конечное полукольцо, идемпотентность, полурешетка, мультипликативно идемпотентное полукольцо.

Общая теория полуколец изложена в известной книге Голана [2]. Полукольцам с идемпотентным умножением посвящены наши работы [1; 3]. В статье [4] описаны все трехэлементные полукольца с идемпотентным сложением, среди полученных 61 полукольца 23 полукольца имеют идемпотентное умножение (идемпотентны).

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S,+,\cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения «+» и умножения «·», такая, что: $\langle S,+\rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S,\cdot\rangle$ – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо называется *коммутативным*, если на нем тождественно $xy = yx$.

Полукольцо с тождеством $xx = x$ (с тождеством $x + x = x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно идемпотентное и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец развита в работах.

Полукольцо с тождеством $x + y = xy$ называется *моно-полукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если оно удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$.

Элемент θ произвольного полукольца S назовем *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x\in S$ выполняется $\theta\cdot x = x\cdot\theta = \theta$ (соответственно, $x + \theta = \theta$). Элемент $\infty\in S$, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим*.

Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно естественным образом присоединить нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S\cup\{0\}$ и $S\cup\{\infty\}$, соответственно.

Для полукольца S с нулем 0 через $r(S)$ обозначим множество всех его аддитивно обратимых элементов, образующих идеал в S. Ясно, что для мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем множество $r(S)$ будет булевым кольцом.

Полукольцо S с нулем 0 называется *антикольцом*, если $r(S)=\{0\}$, то есть на S справедливо квазитождество $x+y=0 \Rightarrow x=0$.

Для любого полукольца $\langle S,+,\cdot\rangle$ существует антиизоморфное полукольцо $\langle S,+,*\rangle$, в котором тождественно $x*y = y\cdot x$; такое *дуальное* полукольцо обозначим через S^*. Если S коммутативно, то $S^* = S$.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle S, *\rangle$ называется *полурешеткой*; при этом на S вводятся два отношения порядка $(\forall x,y\in S)$:

$$x\preccurlyeq y \Leftrightarrow x*y=x \text{ и } x\le y \Leftrightarrow x*y=y.$$

В первом случае S называется *нижней полурешеткой*, во втором – *верхней полурешеткой*.

Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма существует ровно шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец:

1. двухэлементная цепь $\mathbf{B} = \{0,1\}$;
2. двухэлементное поле $\mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$;
3. двухэлементное идемпотентное моно-полукольцо $\mathbf{D} = \{1,\infty\}$ с единицей 1;
4. двухэлементное полукольцо $\mathbf{T} = \{1,\infty\}$ с единицей 1 и константным сложением ($x+y=\infty$);
5. двухэлементное идемпотентное полукольцо $\mathbf{L} = \{a,b\}$ с тождеством $xy = x$;
6. двухэлементное идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} = \{a,b\}$ с тождеством $xy = y$.

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности ρ на S, стабильное относительно операций:

$$a\rho b \text{ и } c\rho d \text{ влекут } (a + c)\rho(b + d) \text{ и } (ac)\rho(bd) \text{ для любых } a, b, c, d \in S.$$

Множество Con S всех конгруэнций на полукольце S является ограниченной решеткой относительно включения конгруэнций:

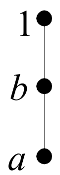
$$\rho\tau \text{ означает, что } a\rho b \Rightarrow a\tau b \text{ для любых } a, b \in S.$$

Наименьшим элементом в Con S служит *нулевая* конгруэнция $\mathbf{0}_S$ – отношение равенства, наибольшим – *единичная* конгруэнция $\mathbf{1}_S$ – одноклассовая. Полукольцо S называется *подпрямо неразложимым*, если на нем существует наименьшая ненулевая конгруэнция; *конгруэнц-простым*, если оно обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и одноклассовой.

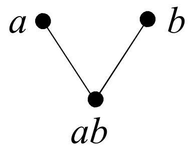
Отметим, что по классической теореме Г. Биркгофа любое неодноэлементное полукольцо изоморфно подполукольцу прямого произведения подпрямо неразложимых полуколец.

Опишем с точностью до изоморфизма все трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца S.

I. Вначале найдем трехэлементные полукольца с коммутативным идемпотентным умножением. Так как относительно умножения мы будем иметь трехэлементную нижнюю полурешетку, то возможны два варианта мультипликативного редукта:



либо



I.1. Рассмотрим случай, когда мультипликативная структура полукольца будет цепью $S = \{a \prec b \prec 1\}$.

• Ясно, что 8 таких полуколец можно получить, присоединяя к двухэлементным полукольцам $\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$ нулевой элемент 0 (сначала) или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S_1, S_2, \ldots, S_8$.

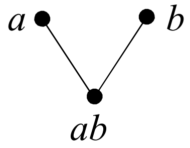
• Далее укажем все полукольца S с нулевым элементом 0 или поглощающим элементом ∞. Ясно, что роль такого элемента может играть только элемент $a = a \cdot b \cdot 1$.

Если $a = 0$ и полукольцо не получено его внешним присоединением к двухэлементному полукольцу, то сумма некоторых двух элементов из множества $\{1, b\}$ должна быть равна 0. При этом, если одним из этих элементов будет 1, то все элементы будут иметь противоположный, и мы получим трехэлементное булево кольцо, что невозможно. Поэтому $b + b = 0$, при этом $1 + b = 1$ или $1 + b = b$, откуда $b + b = b = 0$; противоречие.

Если же $a = \infty$, и сумма некоторых двух элементов из множества $\{1, b\} \subset S$ равна ∞, то в полукольце S тождественно $x + y = \infty$. Обозначим полученное полукольцо с константным сложением как S_9.

• Теперь опишем полукольца S, не имеющие нулевого и поглощающего элементов. Если $1 + a = 1$, то $a + a = a$ и $a + b = b$, поэтому a – нулевой элемент, что невозможно. Аналогично, если $1 + a = a$, то $a + a = a$ и $a + b = a$, откуда a – поглощающий элемент. Значит, $1 + a = b$, откуда $a + a = a$, $a + b = b$ и $b + 1 = a + b + 1 = b + b$. Теперь, если $1 + 1 = 1$, то $b + b = b = b + 1$. Полученный объект будет идемпотентным полукольцом, которое обозначим S_{10}. Если $1 + 1 = b$, то снова $b + b = b = b + 1$, и мы также получаем полукольцо S_{11}. Если же $1 + 1 = a$, то $b + b = a = b + 1$, и мы получаем полукольцо S_{12}.

I.2. Рассмотрим далее случай полукольца S с мультипликативным редуктом.



Заметим, что в этом случае после взаимной замены элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

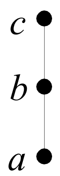
Далее легко видеть, что $a + a \neq b$, $b + b \neq a$. Кроме того, справедливо равенство $ab + ab = ab$, откуда $a + ab \neq b$, $b + ab \neq a$.

• Пусть $a + a = a$, $b + b = b$, то есть аддитивная полугруппа полукольца является полурешеткой. Если $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{13}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{14} с поглощающим элементом ab.

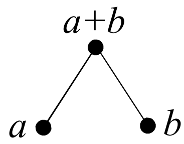
• Пусть $a + a = a$, $b + b = ab$. Если при этом $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{15}. Если $a + b = b$, то $a + ab = ab$, $b + ab = b$, и мы получаем полукольцо S_{16}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{17} с поглощающим элементом ab.

• Наконец, пусть $a + a = ab$, $b + b = ab$. Если при этом $a + b = a$, то $a + ab = a$, $b + ab = ab$, и мы получаем полукольцо S_{18}. Если же $a + b = ab$, то $a + ab = ab = b + ab$, и мы получаем полукольцо S_{19} с константным сложением $x + y = ab$.

II. Найдем все трехэлементные некоммутативные идемпотентные полукольца S. По сложению будем иметь верхние полурешетки:



либо



II.1. Пусть по сложению имеем цепь $S = \{a < b < c\}$.

Заметим, что при этом $ab \neq c$, иначе, домножив равенство $a + b = b$ справа на b, получили бы $c + b = b$, противоречие. Аналогично, $ba \neq c$, $bc \neq a$ и $cb \neq a$.

Отметим также, что из равенства $a + b = b$ следует $ac + bc = bc$, поэтому если $ac = c$, то и $bc = c$. Аналогично, $ca = c$ влечет $cb = c$. А равенство $b + c = c$ влечет $ab + ac = ac$, откуда если $ac = a$, то и $ab = a$. Аналогично, из $ca = a$ следует $ba = a$.

• Ясно, что такими будут полукольца, полученные присоединением к двухэлементным полукольцам **L** и **R** нулевого элемента 0 (сначала) или поглощающего элемента ∞. Обозначим полученные полукольца S_{20}, S_{21}, S_{22}, S_{23}. При этом полукольцо $\mathbf{L} \cup \{0\}$ дуально полукольцу $\mathbf{R} \cup \{0\}$, а дуально $\mathbf{L} \cup \{\infty\}$. Кроме того, отметим, что остальные полукольца не могут содержать нулевой или поглощающий элемент. Выше мы показали, что $bc \neq 0 \neq cb$. Но и $b + c = c \neq 0$. А это означает, что $\{b,c\}$ является двухэлементным некоммутативным полукольцом, то есть изоморфно **L** или **R**. Аналогично для полукольца $\{\infty,a,b\}$ с цепным сложением $a < b < \infty$.

Далее опишем полукольца S, не имеющие нулевого и поглощающего элементов.

• Пусть $ab = a = ba$. Предположим, что $ac = c$, откуда $bc = c$. При этом $ca \neq c$, иначе $cb = c$ и $c = \infty$. Если $ca = a$, то при $cb = c$ получаем полукольцо S_{24} и дуальное к нему полукольцо S_{25} ($ab = a = ba$, $bc = c = cb$, $ac = a$, $ca = c$). А при $cb = b$ имеем $(ac)b = cb = b \neq a = ab = a(cb)$, противоречие. Теперь рассмотрим случай $ca = b$. Здесь $(ca)a = ba = a \neq b = ca = c(aa)$, противоречие. Пусть далее $ac = b$. Но тогда $(aa)c = ac = b \neq a = ab = a(ac)$, противоречие.

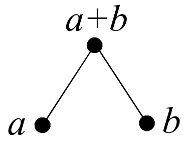
• Пусть $ab = b = ba$. При этом, как показано выше, $ac \neq a \neq ca$. Предположим, что $ac = c$, откуда $bc = c$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$ и $c = \infty$, противоречие. Предположим, что $ca = b$. Тогда при $cb = b$ имеем полукольцо S_{26} и дуальное к нему полукольцо S_{27} ($ab = b = ba$, $ac = b$, $ca = c$, $bc = b$, $cb = c$). А при $cb = c$ получаем $(cc)a = ca = b \neq c = cb = c(ca)$, что невозможно.

• Пусть $ab = a$, $ba = b$, откуда $ca \neq a$.

Предположим, что $ac = c$, что влечет $bc = c$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$ и $c = \infty$, противоречие. Значит, $ca = b$. Но тогда $(ac)a = ca = b \neq a = ab = a(ca)$, противоречие.

Пусть теперь $ac = a$. Если при этом $ca = c$, то $cb = c$. При $bc = c$ имеем $(ba)c = bc = c \neq b = ba = b(ac)$, противоречие. Если же $bc = b$, то получаем полукольцо S_{28}, на котором тождественно $xy = x$. Дуальным к нему будет полукольцо S_{29} с тождеством $xy = y$. Если же $ca = b$, то возможны случаи $cb = b$ и $cb = c$. В первом случае получаем полукольцо S_{30} и дуальное к нему полукольцо S_{31} ($ab = ac = b$, $ba = ca = a$, $bc = b = cb$). Во втором случае операция умножения не ассоциативна, так как $(cc)a = ca = b \neq c = cb = c(ca)$.

II.2. Далее пусть аддитивный редукт полукольца S является верхней полурешеткой



Заметим, что в этом случае после взаимной замены элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

Ясно, что если $ab = ba$, то полукольцо S будет коммутативным, так как $a(a + b) = a + ab = a + ba = (a + b)a$ и аналогично $b(a + b) = (a + b)b$. Значит, в нашем случае $ab \neq ba$.

• Пусть $ab = a$, $ba = b$. Тогда $a(a + b) = a + ab = a + a = a$, $(a + b)a = a + ba = a + b$, $b(a + b) = ba + b = b + b = b$, $(a + b)b = ab + b = a$, и мы имеем полукольцо S_{32}, на котором тождественно $xy = x$. Дуальным к нему будет полукольцо S_{33}, удовлетворяющее тождеству $xy = y$.

• Пусть $ab = a$, $ba = a + b$. Тогда $a(a + b) = a$, $(a + b)a = a +b$, $b(a + b) = a + b$, $(a + b)b = a + b$, и мы получаем полукольцо S_{34}. Дуальное к нему полукольцо обозначим как S_{35}.

III. Найдем все трехэлементные некоммутативные неидемпотентные мультипликативно идемпотентные полукольца S.

Так как S не идемпотентно, то в нем должен найтись элемент a, для которого $2a = a + a \neq a$. Тогда S будет иметь вид $S = \{a, 2a, b\}$. При этом, если $2b = a$, то $2a = 4b = 2b = a$, что невозможно. Значит, либо $2b = 2a$, либо $2b = b$. Ясно также, что $ab \neq ba$ в силу некоммутативности полукольца S.

III.1. Пусть в полукольце $S = \{a, 2a, b\}$ выполняется $2b = 2a$. Заметим, что в этом случае при перестановке элементов a и b получим полукольцо, изоморфное S.

• Предположим, что в S справедливо $ab = a$, $ba = 2a$. Тогда $(ab)a = a \neq 2a = a(ba)$, противоречие. Если же $ab = b$, $ba = 2a$, то, как легко видеть, $(ba)b \neq b(ab)$.

• Пусть теперь $ab = a$, $ba = b$. Тогда если $a + b = a$, то $a + a = a + ab = a(a + b) = aa = a$, противоречие. Аналогично, $a + b \neq b$. Значит, должно выполняться $a + b = 2a$, откуда $a + 2b = 2a + b$, что с учетом $2b = 2a$ дает $3a = 3b$. Теперь если $3a = a$, то $b = ba = b \cdot 3a = 3b \cdot a = 3aa = 3a = a$, противоречие. Если же $3a = b$, то $b = 3a = a \cdot 3a = ab = a$, что также невозможно. Остается случай $3a = 2a$. И мы получаем полукольцо S_{36} и дуальное к нему полукольцо S_{37} с условиями $ab = b$, $ba = a$. Заметим, что данные полукольца обладают константным сложением: $(\forall x,y \in T)$ $x + y = 2a$, поэтому элемент $2a$ является поглощающим: $2a = \infty$.

III.2. Пусть в полукольце $S = \{a, 2a, b\}$ справедливо $2b = b$. Тогда идемпотентами также будут элементы $ab = 2ab$ и $ba = 2ba$. Поскольку $ab \neq ba$, то возможен либо случай $ab = 2a$, $ba = b$, либо случай $ab = b$, $ba = 2a$, дуальный к первому. Итак, пусть $ab = 2a$, $ba = b$, то есть мультипликативная полугруппа полукольца S имеет вид:

$\cdot$	a	$2a$	b
a	a	$2a$	$2a$
$2a$	$2a$	$2a$	$2a$
b	b	b	b

1. Пусть $a + b = a$. Тогда $a + 2a = a + ab = a(a + b) = a$, $2a + b = 2a$. Полученное полукольцо обозначим как S_{38}, а дуальное к нему S_{39}.

2. Пусть $a + b = b$, откуда $a + 2a = 2a$, $2a + b = b$. Мы имеем полукольцо S_{40} и дуальное к нему полукольцо S_{41}.

3. Наконец, пусть $a + b = 2a$, откуда $a + 2a = 2a$, $2a + b = 2a$. Получаем полукольцо S_{42} и дуальное к нему полукольцо S_{43}.

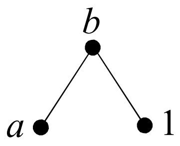
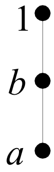
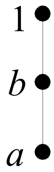
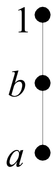
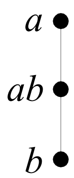
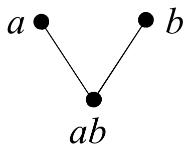
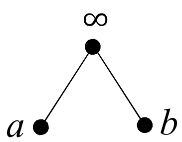
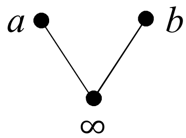
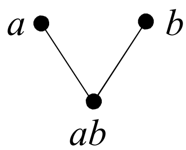
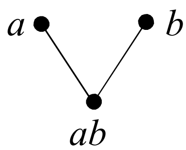
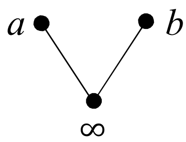
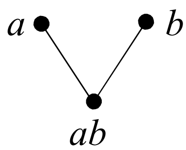
В результате доказана следующая

Теорема 1. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 43 *трехэлементное мультипликативно идемпотентное полукольцо* $S_1 - S_{43}$ (*которые представлены в следующей таблице*).

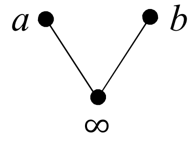
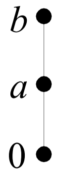
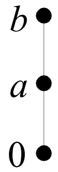
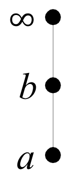
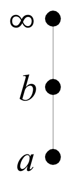
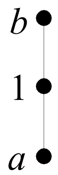
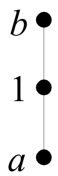
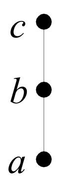
Таблица 1

<table>
<tr><th></th><th>$\langle S, +\rangle$</th><th>$\langle S, \cdot\rangle$</th><th>Свойства</th><th>Разложимость</th></tr>
<tr><td colspan="5">I. Коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца</td></tr>
<tr><td>S_1</td><td>1
a
0</td><td>1
a
0</td><td>трехэлементная цепь,
$S \cong \mathbf{B} \cup \{0\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{B}$</td></tr>
<tr><td>S_2</td><td><table><tr><th>+</th><th>0</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>a</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>1</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
0</td><td>$S \cong \mathbf{Z}_2 \cup \{0\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{Z}_2$</td></tr>
<tr><td>S_3</td><td>a
1
0</td><td>1
a
0</td><td>идемпотентное полукольцо,
$S \cong \mathbf{D} \cup \{0\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_4</td><td><table><tr><th>+</th><th>0</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
0</td><td>$S \cong \mathbf{T} \cup \{0\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_5</td><td>∞
1
a</td><td>1
a
∞</td><td>идемпотентное полукольцо,
$S \cong \mathbf{B} \cup \{\infty\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_6</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>a</td><td>1</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>1</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>$S \cong \mathbf{Z}_2 \cup \{\infty\}$</td><td>подпрямо неразложимо</td></tr>
<tr><td>S_7</td><td>∞
a
1</td><td>1
a
∞</td><td>идемпотентное моно-полукольцо,
$S \cong \mathbf{D} \cup \{\infty\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_8</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>$S \cong \mathbf{T} \cup \{\infty\}$</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_9</td><td><table><tr><th>+</th><th>∞</th><th>1</th><th>a</th></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>1</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>a</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table></td><td>1
a
∞</td><td>обладает константным сложением</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{T}$</td></tr>
</table>

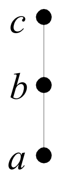
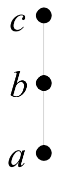
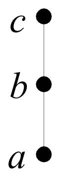
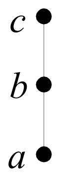
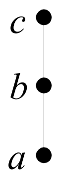
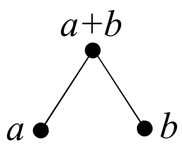
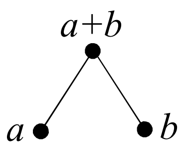
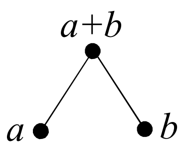
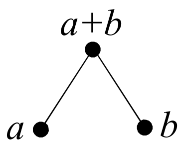
Продолжение табл. 1

<table>
<tr><th></th><th>$\langle S, +\rangle$</th><th>$\langle S, \cdot\rangle$</th><th>Свойства</th><th>Разложимость</th></tr>
<tr><td>S_{10}</td><td></td><td></td><td>идемпотентное полукольцо</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{11}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & 1 & a & b \\ \hline 1 & b & b & b \\ a & b & a & b \\ b & b & b & b \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{12}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & 1 & a & b \\ \hline 1 & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{Z}_2\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{13}</td><td></td><td></td><td>идемпотентное дистрибутивное полукольцо</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{14}</td><td></td><td></td><td>идемпотентное моно-полукольцо</td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D}\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{15}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & ab \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & ab & ab \\ ab & a & ab & ab \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{16}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & ab \\ \hline a & a & b & ab \\ b & b & ab & b \\ ab & ab & b & ab \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{Z}_2\times\mathbf{D}$</td></tr>
<tr><td>S_{17}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{D}\times\mathbf{T}$</td></tr>
<tr><td>S_{18}</td><td>$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & ab \\ \hline a & ab & a & a \\ b & a & ab & ab \\ ab & a & ab & ab \end{array}$</td><td></td><td></td><td>$S \hookrightarrow \mathbf{Z}_2\times\mathbf{T}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

	⟨*S*, +⟩	**⟨*S*, ·⟩**	**Свойства**	**Разложи-мость**
S_{19}	$\begin{array}{c\|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$		обладает константным сложением	$S \hookrightarrow \mathbf{B}\times\mathbf{T}$
II. Некоммутативные идемпотентные полукольца				
S_{20}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & 0 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & a \\ b & 0 & b & b \end{array}$	$S \cong \mathbf{L} \cup \{0\}$	подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{B}$
S_{21}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & 0 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & b \\ b & 0 & a & b \end{array}$	$S \cong \mathbf{R} \cup \{0\}$, S_{20}^*	подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{B}$
S_{22}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & a \\ b & \infty & b & b \end{array}$	$S \cong \mathbf{L} \cup \{\infty\}$	подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{D}$
S_{23}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & b \\ b & \infty & a & b \end{array}$	$S \cong \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, S_{22}^*	подпрямо неразложимо, $S/\rho \cong \mathbf{D}$
S_{24}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & a & a \\ b & b & b & b \end{array}$		конгруэнц-простое
S_{25}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & a & a & b \\ b & b & a & b \end{array}$	S_{24}^*	конгруэнц-простое
S_{26}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & b & b & c \\ c & b & b & c \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{D}$

Продолжение табл. 1

	$\langle S, +\rangle$	$\langle S, \cdot\rangle$	Свойства	Разложимость
S_{27}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$	S_{26}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{D}$
S_{28}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$	$xy=x$	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{L}$
S_{29}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array}$	$xy=y$, S_{28}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}$
S_{30}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & b & b & c \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{B}$
S_{31}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & a & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$	S_{30}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{B}$
S_{32}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ a+b & a+b & a+b & a+b \end{array}$	$xy=x$	$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{L}$
S_{33}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & b & a+b \\ b & a & b & a+b \\ a+b & a & b & a+b \end{array}$	$xy=y$, S_{32}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}$
S_{34}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a & a \\ b & a+b & b & a+b \\ a+b & a+b & a+b & a+b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{D}$
S_{35}		$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & b & a+b \\ \hline a & a & a+b & a+b \\ b & a & b & a+b \\ a+b & a & a+b & a+b \end{array}$	S_{34}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{D}$

Окончание табл. 1

	$\langle S, +\rangle$	$\langle S, \cdot\rangle$	**Свойства**	**Разложимость**
III. Некоммутативные неидемпотентные полукольца				
S_{36}	$\begin{array}{c\|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & a \\ b & \infty & b & b \end{array}$	обладает константным сложением	подпрямо неразложимо, $S/\rho\cong\mathbf{T}$
S_{37}	$\begin{array}{c\|ccc} + & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & \infty & \infty \\ b & \infty & \infty & \infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & \infty & a & b \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty \\ a & \infty & a & b \\ b & \infty & a & b \end{array}$	обладает константным сложением, S_{36}^{*}	подпрямо неразложимо, $S/\rho\cong\mathbf{T}$
S_{38}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & a & a \\ 2a & a & 2a & 2a \\ b & a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{Z}_2$
S_{39}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & a & a \\ 2a & a & 2a & 2a \\ b & a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{38}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{Z}_2$
S_{40}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & b & b & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{T}$
S_{41}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & b & b & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{40}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{T}$
S_{42}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & b & b & b \end{array}$		$S \hookrightarrow \mathbf{L}\times\mathbf{T}$
S_{43}	$\begin{array}{c\|ccc} + & a & 2a & b \\ \hline a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a & 2a \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} \cdot & a & 2a & b \\ \hline a & a & 2a & b \\ 2a & 2a & 2a & b \\ b & 2a & 2a & b \end{array}$	S_{42}^{*}	$S \hookrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{T}$

Замечание 1. Как видно по таблице, во множестве всех 43 попарно неизоморфных трехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец имеется:

• 19 коммутативных (S_i при $i = 1, 2, \ldots, 19$), среди которых 7 идемпотентных полуколец (S_i при $i = 1, 3, 5, 7, 10, 13, 14$);

• 24 некоммутативных (S_i при $i = 20, 21, \ldots, 43$), разбитых на пары взаимно дуальных полуколец;

• 23 идемпотентных полукольца, в том числе 16 некоммутативных (S_i при $i = 20, 21, \ldots, 35$);

• 14 полуколец с единицей 1 (S_i при $i = 1, 2, \ldots, 12, 24, 25$);

• 6 полуколец с нулем 0 (S_i при $i = 1, 2, 3, 4, 20, 21$);

• 4 полукольца с 0 и 1 (S_i при $i = 1, 2, 3, 4$);

• 9 полуколец с поглощающим элементом ∞ (S_i при $i = 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23, 36, 37$);

• 5 полуколец с 1 и ∞ (S_i при $i = 5, 6, 7, 8, 9$);

• 12 подпрямо неразложимых полуколец (S_i при $i = 3, 4, 5, 6, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 36, 37$);

• 2 конгруэнц-простых полукольца S_{24} и S_{25}.

Теорема 2. *С точностью до изоморфизма существует ровно* 46 *четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца с нулем:* $S_i \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, 43$ (*из таблицы*), $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $S = \{0, a, b, c\}$ – четырехэлементное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем 0. В силу теоремы 4.1.1 [1] идеал $r(S)$ всех аддитивно обратимых элементов из S выделяется прямым слагаемым в полукольце S:$S = r(S)\oplus J$, где идеал J – мультипликативно идемпотентное антикольцо. Если $r(S) = \{0\}$, то $S = J$. Если $r(S)$ двухэлементно, то $r(S)$ изоморфно $\mathbf{Z_2}$ и J изоморфно $\mathbf{B}$, то есть S изоморфно $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$. Если же $r(S) = S$, то S изоморфно $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$.

Поэтому можно считать, что $S = \{0, a, b, c\}$ является мультипликативно идемпотентным антикольцом. Возможны два случая: S не имеет ненулевых делителей нуля; $ab = 0$ в S (без ограничения общности).

• В первом случае множество $\{a, b, c\}$ будет подполукольцом в S, и полукольцо S получено присоединением к трехэлементному мультипликативно идемпотентному полукольцу $\{a, b, c\}$ нуля, то есть по теореме 1 S изоморфно одному из полуколец S_i при $i = 1, 2, \ldots, 43$.

• Рассмотрим случай антикольца S, когда $ab = 0$. Откуда $ba = (ba)(ba) = b(ab)a = 0$. Имеем $a + b \neq a$ и $a + b \neq b$, значит, $a + b = c$. Далее $a + a \neq b$ и $a + a \neq a + b$, значит, $a + a = a$. Аналогично, $b + b = b$. Кроме того, $a(a + b) = a = (a + b)a$ и $b(a + b) = b = (a + b)b$, то есть элемент $a + b$ служит единицей в S. Тогда $S = \{0, a\}\oplus\{0, b\}$ и полукольца $\{0, a\}$, $\{0, b\}$ изоморфны $\mathbf{B}$. Стало быть, S изоморфно $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Следствие. *С точностью до изоморфизма существует* 17 *четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей*: $S_i \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, 12, 24, 25$ (*из таблицы*), $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$, $\mathbf{Z_2}\times\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Замечание 2. Всего четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец заметно больше (с точностью до изоморфизма). Так, в силу теоремы 1 существует не менее 43 четырехэлементного мультипликативно идемпотентного полукольца с поглощающим элементом ∞.

Замечание 3. К мультипликативно идемпотентному полукольцу S присоединим внешним образом единичный элемент 1 ($\forall x \in S\cup\{1\}$ $1 \cdot x = x = x \cdot 1$). Доопределим операцию сложения в $S\cup\{1\}$, положив тождественно: 1) $1 + x = 1 = x + 1$; 2) $1 + x = x = x + 1$. Алгебраическая структура $\langle S\cup\{1\}, +, \cdot\rangle$ будет полукольцом тогда и только тогда, когда полукольцо S является дистрибутивной решеткой в случае 1) и идемпотентным моно-полукольцом в случае 2); [см. 2, лемма 2.2.4 и предложение 2.3.1]. При этом полученное полукольцо $S\cup\{1\}$ само станет дистрибутивной решеткой в первом случае и идемпотентным моно-полукольцом во втором случае. Например, $\mathbf{B}\cup\{1\}$ изоморфно S_1, $\mathbf{D}\cup\{1\}$ изоморфно S_7, $S_7\cup\{1\}$ изоморфно $S_7\cup\{\infty\}$, а полукольцо $S_{14}\cup\{1\}$ не изоморфно ни одному из 89 четырехэлементных полуколец, перечисленных в теореме 2 и замечании 2.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.

2. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers : Dordrecht-Boston-London, 1999. 380 p.

3. *Vechtomov E. M., Petrov A. A.* Multiplicatively Idempotent Semirings // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 206. Is. 6. Pp. 634–653.

4. *Zhao X., Ren M., Crvenković S., Shao Y., Dapić P.* The variety generated by an ai-semiring of order three // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Is. 2. Pp. 117–132.

Three-element multiplicative idempotent semirings

E. M. Vechtomov[1], A. A. Petrov[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-5877-2850. E-mail: apetrov43@mail.ru

Abstract. The paper describes all three-element semirings with idempotent multiplication: it is shown that up to the isomorphism there are exactly 43 of such semirings, they are given by Cayley tables, as well as Hasse diagrams in the case of semilattice reducts. Based on the results obtained, all 46 four-element multiplicatively idempotent semirings with zero are listed, including 17 semirings with zero and one.

Keywords: finite semiring, idempotence, semilattice, multiplicatively idempotent semiring.

References

1. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem* [Semirings with idempotent multiplication]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

2. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers : Dordrecht-Boston-London, 1999. 380 p.

3. *Vechtomov E. M.*, *Petrov A. A.* Multiplicatively Idempotent Semirings // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 206. Is. 6. Pp. 634–653.

4. *Zhao X.*, *Ren M.*, *Crvenković S.*, *Shao Y.*, *Dapić P.* The variety generated by an ai-semiring of order three // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Is. 2. Pp. 117–132.

УДК 373.3+51-8 DOI 10.25730/VSU.0536.21.011

Применение игр в обучении математике учеников 5–7 классов

В. И. Варанкина[1], К. В. Варанкина[2]
[1]кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: veravarankina@gmail.com
[2]магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: veravarankina@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос применения игровых технологий на уроках математики в 5–7 классах. Раскрыты значение и роль игры в обучении младших школьников. Указаны новые возможности игровых технологий, возникшие с появлением компьютера. Приведен пример разработки урока-игры для 6 класса по теме «Деление рациональных чисел» с использованием компьютеров.

Ключевые слова: обучение математике учеников 5–7 классов, игровые технологии, урок-игра.

С древних времен одним из важных достоинств человека считалось владение математическими знаниями. Значение и роль математики в развитии нашей цивилизации непрерывно возрастают. Поэтому на уроках математики в средней школе важно не только пробудить и поддержать у учащихся интерес к предмету, но и повысить их активность и самостоятельность в освоении математики. Особенно актуально эта проблема стоит перед учителем на уроках математики в 5–7 классах, когда дети только начинают осваивать основные разделы школьного курса математики.

Одним из методов, способствующих активизации мыслительной деятельности школьников и стимулированию их к самостоятельному приобретению знаний, является применение игровых технологий в обучении математике. Этот метод хорошо известен [1; 2; 3], он широко применялся в советской школе как на уроках математики, так и во внеклассной работе.

В процессе игры у детей развивается внимание, повышается стремление к новым знаниям, вырабатывается умение мыслить самостоятельно. Использование игр повышает качество знаний и интерес к предмету, позволяя лучше усваивать трудный материал. Кроме того, игры на уроке имеют здоровьесберегающую направленность: снимают усталость и напряженность, повышают работоспособность учащихся на уроке. В игре дети лучше запоминают новое, легче ориентируются в необычных ситуациях, развивают фантазию. Даже самые пассивные дети включаются в игру с большим удовольствием.

«Игра – это огромное светлое окно, через которое в духовный мир ребенка вливается живительный поток представлений, понятий об окружающем мире. Игра – это искра, зажигающая огонек пытливости и любознательности», – сказал педагог-новатор В. А. Сухомлинский [5]. Советский психолог Д. Б. Эльконин пишет, что игра влияет на развитие психических процессов: «Значение игры не ограничивается тем, что у ребенка возникают новые по своему содержанию мотивы деятельности и связанные с ними задачи. В игре возникает новая психологическая форма мотивов» [6]. По мнению выдающегося психолога Л. С. Выготского, игра – пространство «внутренней социализации» ребенка, средство усвоения социальных установок [4].

Игру можно использовать в учебном процессе на разных этапах урока. На этапе актуализации знаний игра позволяет зарядить энергией детей на весь урок. Изучение нового материала с применением игры помогает школьникам лучше усваивать новые знания. В конце урока при подведении итогов у детей обычно снижается активность, а математическая игра оживит их и даст возможность эффективно закрепить полученные знания.

В настоящее время с развитием IT-технологий появляется возможность применения игр на уроках математики на качественно новом уровне. И современным детям игры с использованием компьютера очень интересны.

В Интернете существует множество сервисов для создания математических игр в виде квестов, тренажеров и др.

Приведем пример разработки урока-игры по математике в 6 классе с применением компьютеров. Она была проведена в 6 «Б» классе МБОУ СОШ с. Гордино Афанасьевского района Кировской области.

Тема урока: «Деление рациональных чисел».

Тип урока: урок-игра «Компьютерный математик», повторение и закрепление материала.

Цели:

1. Образовательные – обобщить знания обучающихся по теме «Деление рациональных чисел»;
2. Развивающие – формировать навыки самостоятельной работы, развития логического мышления, вычислительных навыков;
3. Воспитательные – воспитание познавательного интереса к предмету.

Оборудование: листы самооценки, доска, компьютеры.

Ход урока-игры

1. Организационный момент. Приветствие, разъяснение порядка проведения урока, выдача листов самооценки участникам (Рис. 1).

Лист самооценки ____________________ Фамилия Имя	
Тема урока «Деление рациональных чисел»	
Название игры	*Оценка*
1. «Чей ряд быстрее»	
2. «Компьютерный математик»	
3. Итоговая оценка	

Рис. 1.

2. Актуализация знаний. Игра «Чей ряд быстрее»

Подготовка. Учителем на доске заранее написаны три столбика примеров для рядов-команд (Рис. 2):

Вычислить

1 ряд	2 ряд	3 ряд
$-54:(-6)=$	$-36:9=$	$-12:6=$
$8:(-2)=$	$-12:4=$	$-26:(-2)=$
$0{,}16:(-4)=$	$0{,}25:(-5)=$	$-0{,}81:9=$
$-\frac{4}{15}:\frac{4}{15}=$	$\frac{3}{16}:\left(-\frac{3}{16}\right)=$	$-\frac{7}{17}:\left(-\frac{7}{17}\right)=$
$-5{,}4:0{,}6=$	$3{,}2:(-8)=$	$-4{,}8:(-6)=$
$0:757=$	$0:(-356)=$	$0:1=$

Рис. 2.

Правила игры. Ученики по очереди выходят к доске и решают по одному примеру. Побеждает та команда, которая быстрее решит все примеры верно. Каждый учащийся оценивает свое решение на этом этапе в листах самооценки.

3. Повторение материала. Игра «Компьютерный математик»

Подготовка. Для проведения игры потребуется четыре компьютера с доступом в Интернет. Учащимся выдаются маршрутные листы, на которых написаны этапы игры и их описание. Упражнения для игры созданы учителем заранее на сайте LearningApps.org

Описание используемого ресурса. LearningApps.org – бесплатный русифицированный онлайн-сервис из Германии, позволяющий создавать интерактивные задания по математике.

Работать с LearningApps можно двумя способами:

1. Создать упражнение, выбрав один из 20 вариантов игровых шаблонов. Далее заполнить все предоставленные поля и загрузить нужные изображения. Все формы снабжены подсказками.
2. Использовать готовые работы других авторов в качестве шаблонов, изменив в них внесенные данные на свои. Приложения в галерее сгруппированы по темам.

Когда приложение создано, его нужно сохранить и при желании сделать общедоступным для пользователей LearningApps. Оно появится в разделе «Все упражнения» личного кабинета.

Правила игры. Игра проходит в четыре этапа. Учащиеся делятся на четыре команды. На каждом этапе будет предложено задание, которое предстоит выполнить одному ученику из каждой команды.

Четверо участников садятся за компьютеры и по команде приступают к выполнению задания, переходя по указанной учителем ссылке. После завершения решений им нужно позвать учителя. Если есть ошибки, то их исправить. Тот ученик, который завершит задание первым, побеждает на этапе. Его команде дается 5 баллов, второму ученику – 4 балла, третьему – 3 балла, четвертому – 2 балла.

Каждый этап сложнее предыдущего. Поэтому нужно, чтобы дети сами распределили между собой этапы по силам.

1 этап. Ссылка: https://learningapps.org/watch?v=pubz4djik21. Требуется выполнить тест, состоящий из десяти примеров на деление рациональных чисел.

2 этап. Ссылка: https://learningapps.org/watch?v=p23uczptk21. Задание содержит шесть уравнений.

Физкультминутка. Заранее нужно выбрать ученика, который выйдет перед классом и будет зачитывать примеры для устного счета на деление рациональных чисел по очереди каждому из учеников. Остальные хлопают, если ответ положительный, топают, если ответ отрицательный.

3 этап. Ссылка: https://learningapps.org/watch?v=p8esfk59321. Задание состоит из трех задач, которые нужно решить с помощью уравнений.

4 этап. Ссылка: https://learningapps.org/watch?v=p3pjmwhyc21. Выполнить задание, состоящее из десяти примеров на действия с рациональными числами.

После завершения игры каждый участник записывает заработанные баллы в лист самооценки.

4. Подведение итогов урока. Подсчет баллов и объявление победителей. Им выставляются пятерки в журнал.

5. Рефлексия. Обсуждение итоговых оценок по листам самооценки. Выявление трудностей учащихся.

Выводы. По результатам проведения урока-игры в 6 классе было отмечено: у детей повышается интерес к предмету, улучшается концентрация внимания, дети чувствуют ответственность, которая лежит на них перед командой, поэтому они сосредоточены и внимательны. Учащиеся лучше раскрываются, переживают за свою команду и сплачиваются.

Таким образом, игры на уроках математики в 5–7 классах помогают:

– повышать интерес учащихся к предмету;

– приучать к самостоятельной деятельности;

– обеспечивать обратную связь;

– повышать интенсивность учебного процесса;

– сделать урок разнообразнее, а материал интереснее и понятнее для учеников разного уровня подготовки.

Список литературы

1. *Бобровский А. А., Бобровская З. А.* О применении игровых технологий на уроке математики // Актуальные вопросы современной педагогики : мат. IX Междунар. науч. конф. (г. Самара, сентябрь 2016 г.). Самара : АСГАРД, 2016. С. 1–4. URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/206/10990/ (дата обращения: 08.09.2021).

2. *Вахрушев А. А., Уфимцева Н. В., Устинова Н. Н.* Использование игровых технологий в процессе обучения информатике и математике // Наука и перспективы. 2017. № 1. URL: http://nip.esrae.ru/pdf/2017/1/80.pdf (дата обращения: 08.09.2021).

3. *Коваленко В. Г.* Дидактические игры на уроках математики : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1990. 96 с.

4. *Селевко Г. К.* Современные образовательные технологии DOC. М. : Народное образование, 1998. 256 с.

5. *Сухомлинский В. А.* О воспитании. М. : Политическая литература, 1982. 270 с.

6. *Эльконин Д. Б.* Психология игры. М. : Педагогика, 1978. 360 с.

The use of games in teaching mathematics to students of grades 5–7

V. I. Varankina[1], K. V. Varankina[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: veravarankina@gmail.com

[2]master student of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: veravarankina@gmail.com

Abstract. The article discusses the use of gaming technologies in math lessons in grades 5–7. The significance and role of the game in teaching younger schoolchildren are revealed. The new possibilities of gaming technologies that have arisen with the advent of the computer are indicated. An example of the development of a lesson-game for the 6th grade on the topic "Division of rational numbers" using computers is given.

Keywords: teaching mathematics to students of grades 5–7, game technologies, lesson-game.

References

1. *Bobrovskij A. A., Bobrovskaya Z. A. O primenenii igrovyh tekhnologij na uroke matematiki* [On the use of gaming technologies in a math lesson] // *Aktual'nye voprosy sovremennoj pedagogiki : mat. IX Mezhdunar. nauch. konf. (g. Samara, sentyabr' 2016 g.)* – Topical issues of modern pedagogy : mat. of IX Intern. scient. conf. (Samara, September 2016). Samara. ASGARD. 2016. Pp. 1–4. Available at: https://moluch.ru/conf/ped/archive/206/10990/ (date accessed: 08.09.2021).

2. *Vakhrushev A. A., Ufimceva N. V., Ustinova N. N. Ispol'zovanie igrovyh tekhnologij v processe obucheniya informatike i matematike* [The use of gaming technology in the process of teaching science and math, Science and perspectives]. 2017. No. 1. Available at: http://nip.esrae.ru/pdf/2017/1/80.pdf (date accessed: 08.09.2021).

3. *Kovalenko V. G. Didakticheskie igry na urokah matematiki : kn. dlya uchitelya* [Didactic games in mathematics lessons : book for teachers]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1990. 96 p.

4. *Selevko G. K. Sovremennye obrazovatel'nye tekhnologii DOC* [Modern educational technologies DOC]. M. Narodnoe obrazovanie (Public education). 1998. 256 p.

5. *Sukhomlinskij V. A. O vospitanii* [On education]. M. Political literature. 1982. 270 p.

6. *El'konin D. B. Psihologiya igry* [Psychology of the game]. M. Pedagogika. 1978. 360 p.

УДК 004.9:37 DOI 10.25730/VSU.0536.21.012

Разработка сайта педагога на базе системы управления контентом WordPress

К. Ю. Даровских[1], Е. Н. Лубягина[2]
[1]магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: darovskikh.katena@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Аннотация. Отличительной особенностью современного общества является активная цифровизация во всех сферах жизни. Накоплен огромный опыт применения электронных технологий в образовании. Однако остается актуальным вопрос выбора оптимального инструментария для разработки электронных учебных единиц и их объединения на одном ресурсе.

В данной статье предложен вариант создания сайта учителя для сопровождения очного школьного курса математики. В статье затронута тема влияния на развитие мышления современных школьников цифровых средств массовой информации и коммуникации (СМИиК) – телевизоров, компьютеров, смартфонов и другой экранной техники. Приведен обзор требований и рекомендаций, предъявляемых к созданию электронного образовательного ресурса. Предложены удобные, по мнению авторов, программные инструменты, полезные в разработке обозначенного сайта: система управления контентом WordPress, система динамических чертежей GeoGebra и программа Скриншотер.

Ключевые слова: персональный сайт, системы управления контентом, WordPress, GeoGebra, Скриншотер.

Материалы, используемые в учебном процессе, согласно требованиям ФГОС, должны быть доступны в электронном виде, через Интернет. Одним из решений для педагога является создание собственного сайта.

В данной статье рассмотрен один из вариантов создания сайта учителя для сопровождения очного школьного курса математики. Для разработки предложенной схемы построения сайта были поставлены следующие вопросы:

1. Как цифровизация быта влияет на сферу образования?
2. Какова официальная стратегия развития образования в Российской Федерации?
3. Каковы требования к Интернет-ресурсам, используемым в рамках образовательной деятельности?
4. Какой инструментарий подойдет с точки зрения функциональности и доступности?
5. Какие рекомендации по наполнению сайта можно ответить?

Каждому вопросу посвящен отдельный пункт статьи.

1. Четвертая промышленная революция в обществе и образовании

Объявленная четвертая промышленная революция [6] уверенно меняет не только производство, но и всю нашу жизнь. Мы стали свидетелями того, как цифровизация быта влияет на сферу образования и как цифровизация, внедряемая в образование, вносит изменения в быт.

Нас в первую очередь интересует повсеместное использование цифровых средств массовой информации и коммуникации (СМИиК) – телевизоров, компьютеров, смартфонов и другой экранной техники. В этом пункте попытаемся очертить масштаб влияния цифровых СМИиК на современных школьников.

По данным сервиса DatarePortal [29], бесплатных отчетов по использованию Интернета в мире, среднестатистический пользователь Интернета в России проводит в нем почти 8 часов в день, что почти на час больше среднемирового значения. Из того же источника узнаем, что 94,9 % людей в возрасте от 16 до 64 лет владеют смартфонами и проводят в Интернете с мобильного в среднем 3,5 часа в день.

Указанные в отчете данные далеки от рекомендаций по ограничению использования цифровых СМИиК: по мнению ВОЗ, дети от 2 до 5 лет не должны пользоваться гаджетами более одного часа в сутки [44], а по выводам специалистов РНИМУ им. Пирогова и Северного государственного медицинского университета, школьникам и студентам не рекомендуется проводить за экранами более трех часов в течение суток [13].

Касательно образования, 2020 г. нам запомнился опытом дистанционного обучения, а также ростом спроса на российские образовательные онлайн-сервисы на 30–35 % в сравнении с «доковидным» периодом: курсы и обучающие программы, интерактивные задачники, уроки и лекции. Так, в Яндекс.Учебнике [46] за последний учебный год отучились 1,9 млн школьников, аудитория Фоксфорда [42] достигла более 6 млн пользователей, а платформой Учи.ру [38] пользуется уже более 8 млн школьников и свыше 350 000 педагогов [7]. Отметим, что платформа Учи.ру представлена в странах БРИКС, США, Канаде, Индонезии и Вьетнаме и ее контент учитывает местные особенности: например, знания китайских школьников по математике в среднем выше, чем по миру, а в Индии образовательные продукты чаще используются через смартфоны [1].

Параллельно с укреплением позиций существующих образовательных интернет-проектов происходит запуск новых. Так, в декабре 2020 г. Ростелеком и Mail.ru Group объявили, что разрабатывают платформу Сферум [35] для обучения и коммуникаций школьников, учителей, родителей на базе технологий «ВКонтакте» и отечественной системы видео-(конференц-)связи с возможностью регистрации в том числе через портал госуслуг. «Сферум» будет интегрирован с другой новой платформой «Моя школа» [12] от Министерства просвещения [7].

Чуть подробнее остановимся на рисках использования цифровых СМИиК для школьников в быту и учебе.

Накопившийся опыт масштабного использования человечеством цифровых СМИиК отражен в массе зарубежных и отечественных исследований. Многие из них дают все основания для тревоги за негативные и даже необратимые последствия. Однако опубликованные случаи разумного использования цифровых ресурсов свидетельствуют о существующем положительном опыте и призваны убедить нас, что цифровой поток когда-нибудь будет направлен в полезное русло.

Достаточно очевидны риски развития близорукости у среднестатистического молодого потребителя цифровых СМИиК, поскольку именно в школьные годы формируется запас прочности зрения. По информации «Известий», дети на карантине теряют зрение в 1,5 раза быстрее [2]. Однако развивающиеся технологии стремятся к уменьшению вреда здоровью: появились мониторы с электронными чернилами [33], дома чаще стали использовать проектор [34], пользуются популярностью программные продукты для ограничения времени работы гаджета, для временной блокировки экрана с напоминаниями о необходимости сделать перерыв или гимнастику для глаз.

Не так однозначно влияние использования цифровых СМИиК на уровень интеллекта, на развитие социальных навыков, то есть на развитие мозга среднестатистического школьника в целом.

Согласно исследованию 2004 г., в котором участвовали около 2500 детей, достаточно смотреть телевизор всего лишь час в день, чтобы риск развития проблем с концентрацией внимания увеличился почти на 10 % [47]. В 2015 г. журнал «Тайм» опубликовал новость о том, что по результатам исследования Microsoft с 2000 г. средняя продолжительность внимания упала с 12 до 8 секунд, что на секунду меньше, чем у аквариумной золотой рыбки [48].

Вместе с развитием цифровых СМИиК появилась проблема распространения «цифровой зависимости» в обществе (35 % – статистика для США [9]). Одним из популяризаторов знаний по данному вопросу является Андрей Владимирович Курпатов – президент Высшей школы методологии, создатель современной модели психотерапии, автор монографий [14]. Его тезисы перекликаются с материалами книги [45], приведем далее некоторые из них [подробнее см. 9; 14; 45].

Коротко, цифровая зависимость – это болезнь, при которой количество связей между клетками головного мозга ниже на 10–20 %.

От рождения до 27 лет мозг формируется, он учится, создавая и развивая связи между клетками. Зрительному восприятию служит лишь примерно треть коры головного мозга. Обычно использование цифровых СМИиК требует малой и однотипной нагрузки на мозг, не развивает его, но отнимает много времени: верное ощущение времени часто теряется, современные гаджеты способны вызывать привыкание [45].

Известно, чем многограннее мозг обрабатывает информацию, тем лучше она будет усвоена. Так, знания, которые мы получаем за компьютером, слабее и медленнее отпечатываются в нашем мозге, чем те, которые в дополнение к зрительному восприятию можно потрогать руками. Например, при экранном просмотре решения задачи обычно не требуется оформить данные, остановить ролик, чтобы подумать – в итоге запомнить материал мозгу будет сложнее, чем на классическом уроке. По той же причине дистанционная дискуссия запоминается хуже, чем при реальном присутствии. Однако слабой памятью уже не удивишь: еще в 2007 г. корейские ученые указали на то, что молодое поколение становится более забывчивым [45].

Важно понимать, что независимо от степени натренированности, наш мозг всегда находится в режиме энергосбережения. Наличие гаджетов, которым можно делегировать часть своих функций (не запоминать/не вспоминать распорядок дня, доступную информацию), позволяет мозгу расслaбиться и работать вполсилы. Исследования по всему миру показали, что физическое присутствие телефона делает человека глупее с точки зрения оперативной памяти и подвижного интеллекта в 1,5 раза [14].

Итак, если мозг за время, отведенное на развитие, не столкнулся с разносторонними вызовами нецифровой реальности, некоторые его отделы не смогут обучиться в нужной мере. Такой вариант цифровой зависимости, когда у детей мозг дефектно (недо-)формируется, получил название «цифровое слабоумие» [9].

К слову, на взрослых цифровые СМИиК влияют иначе. К 27 годам мозг уже сформирован, и та его часть, которая отвечает за продумывание и понимание, конкурирует за ресурсы с частью, которая отвечает за потребление информации. К примеру, при чтении книги (книга – это не агрессивный контент) на само чтение, то есть на потребление информации, идет 60 % времени, остальные 40 % – на задуматься [14]. Зачастую аудиовизуальный контент захватывает внимание, не давая переключить мозг на мышление, и наработанные ранее мозгом мыслительные связи могут разрушаться (а могут и восстановиться после тренировок). Цифровая зависимость в случае, когда правильно сформированный мозг усыхает, имеет другое название – «псевдодебильность» [9].

Конечно, не только цифровой контент влияет на мозг. Например, к омертвлению нервных клеток может привести стресс [45]. Негативно влияет излучение от смартфонов при телефонном разговоре: в младшем школьном возрасте оно затрагивает 80 % структур головного мозга, у подростков до 60 %, только к 80 годам стенки черепа добирают достаточную толщину и не защищены только 15 % структур мозга. Такие данные были получены в исследовании ученых Института биохимической физики им. Н. М. Эмануэля РАН и Российского национального комитета по защите от неионизирующего излучения, длившемся 14 лет с 2005 г., проведенные на основной группе в количестве 1161 школьника и контрольной – 370 школьников [37].

Отметим, что с развитием мозга связана и сформированность социальных навыков. Среди результатов исследования, в котором наблюдалась группа школьников из г. Данедин в Новой Зеландии от рождения до 26-летия, на основании опроса в 15 лет (1987–1988 гг.) есть такой вывод: с увеличением ежегодной продолжительности просмотра телепередач на 1 час степень привязанности подростка к родителям снижалась на 13 %, а к приятелям – на 24 %. Аналогичный эксперимент в 2004 г. с привлечением 3043 новозеландских школьников 14–15 лет подтвердил эту взаимосвязь [9].

Подведем итог. Цифровые средства массовой информации и коммуникации – часть нашей культуры, они облегчают нам жизнь. Однако из-за отсутствия необходимости в полном объеме использовать умственные способности мы рискуем заполучить цифровое слабоумие. Поэтому перед образованием особенно остро встает задача не дать мозгу школьника не развиваться.

В ближайшие годы мы узнаем результаты эксперимента по цифровизации российского образования [20]. Они особенно важны на фоне того, что аналогичное масштабное исследование в США с 2004 по 2007 гг. (с бюджетом более 20 млн долларов) не показало существенных отличий между группой школьников 6–8 классов, получивших ноутбуки для обучения, и группой, которая не использовала ноутбуки. В математике чуть бо́льшие результаты показывали только более способные к предмету дети [45].

2. Стратегия развития образования в Российской Федерации

Одной из важнейших целей государства является повышение доступности качественного образования, удовлетворяющего потребностям современного общества. Для ее достижения действует Стратегия развития информационного общества в РФ [36]; на федеральном, ведомственном и региональном уровнях реализуются многочисленные проекты; создаются институты развития, финансируются частные инициативы, проводятся форумы, конференции.

Распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р была утверждена Концепция развития математического образования в РФ [26], в которой, в частности, отмечена необходимость развития таких форм обучения, как получение образования в дистанционной форме, интерактивные музеи математики, математические проекты на интернет-порталах и так далее.

Федеральный проект «Цифровая образовательная среда» [23] направлен на создание и внедрение в образовательных организациях цифровой образовательной среды (ЦОС), он организует работу по оснащению организаций современным оборудованием и развитию цифровых сервисов и учебного контента.

Согласно паспорту стратегии Цифровая трансформация образования [15], Министерство просвещения обеспечивает создание условий для внедрения к 2024 г. ЦОС, обеспечивающей формирование стремления к саморазвитию и самообразованию у обучающихся путем обновления информационно-коммуникационной инфраструктуры, подготовки кадров, создания федеральной цифровой платформы. Для этой цели планируется разработка следующих систем:

– открытая информационно-образовательная среда «Российская электронная школа» (РЭШ), направленная на создание размещенного в открытом доступе курса интерактивных уроков по всем учебным предметам с интерактивными тренажерами и виртуальными лабораторными работами;

– АИС «Маркетплейс образовательного контента и услуг» (Маркетплейс), ориентированная на дистрибуцию верифицированного образовательного контента и услуг их поставщиками;

– сервисы «Библиотека цифрового образовательного контента», «Цифровой помощник ученика», «Цифровое портфолио ученика», «Цифровой помощник родителя», «Цифровой помощник учителя», системы управления в образовательной организации.

Паспорт стратегии Цифровая трансформация образования устанавливает следующие параметры внедрения указанных инициатив.

К 2024 г. будет:

– функционировать ФГИС «Моя школа», способная сформировать портфолио для подачи документов в вузы и колледжи;

– 33 % уроков проводиться с использованием цифрового контента;

– на 70 % организован доступ обучающихся к верифицированному цифровому образовательному контенту и сервисам самостоятельной подготовки;

– осуществляться автоматизированная проверка домашних заданий.

К 2030 г. планируется получить:

– 100 % доступ к верифицированному цифровому контенту и сервисам;

– 50 % домашних заданий, проверяемых автоматически с использованием экспертных систем искусственного интеллекта;

– доступность управления образовательной траекторией на 80 %.

С 1 сентября 2022 г. начинают действовать новые образовательные стандарты основного общего образования [21], согласно которым рабочие программы предметов должны будут указывать используемые цифровые материалы, расположенные, как и другая учебная информация, в открытом для учащихся и родителей доступе.

3. Требования к Интернет-ресурсам, используемым в рамках образовательной деятельности

Как отмечалось выше, современный школьник сталкивается с огромным потоком информации и тратит на его обработку немалую часть своей жизни. Образовательный учебный контент сейчас предлагается и частным сектором, и государством. Чтобы сориентировать школьника в море образовательной информации, согласно ФГОС, с 2022 г. в учебном плане будут прописаны те цифровые ресурсы, которых (помимо очных занятий) будет достаточно для освоения программы.

Мы не будем касаться вопроса, сможет ли имеющийся образовательный верифицированный контент полностью удовлетворить запросы каждого конкретного класса по взятому предмету, соответствовать темпу и порядку изложения, способностям конкретных учеников. Но исходим из того, что учитель может захотеть разместить контент для сопровождения занятий и сделать это на своем ресурсе, где он как администратор будет волен не только менять содержание и оформление, но и подключать нужные функции.

Рассмотрим формальные требования к официальному сайту педагога-математика. Если коротко, то в основе всех требований, регулирующих использование средств цифровых СМИиК в образовании, лежат вполне понятные принципы:

– информация (расположенная на ресурсе и обрабатываемая ресурсом) не должна причинить вред (либо использоваться во вред) – прямой или косвенный, материальный или моральный;

– значительная часть образовательной информации, в том числе в электронном виде, – это объект авторского права;

– неправильное применение цифровых СМИиК в образовательном процессе может оказывать негативное влияние на здоровье школьника (как физическое, так и психическое).

Уточним эти положения.

По Федеральному закону № 531 о внесении изменений в Федеральный закон «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» [40] с 2015 г. образовательные организации РФ не могут пользоваться информационными системами (в том числе и хостингом), размещенными за пределами территории Российской Федерации.

Под хостингом понимается услуга хостинг-провайдера по размещению сайта на сервере в Интернете круглосуточно, то есть это аренда Web-сервера для размещения на нем сайта. Кроме хостинга сайту требуется домен – это имя сайта в Интернете. Доменное имя, как и хостинг, можно получить у хостинг-провайдера. Есть организации, предоставляющие хостинг и домен бесплатно для образовательных целей. Это, например, Лига безопасного интернета [43], RU-CENTER [27]. Множество организаций предлагает купить хостинг и домен. Например, хостинг для сайтов образовательной направленности предлагает сервис [25].

Вопрос – купить или воспользоваться бесплатным (но не пиратским) продуктом – встает при выборе подходящего «движка» для создания сайта. Согласно вступившей в 2008 г. в силу 4 части Гражданского кодекса, раздела VII «Права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации» [3], авторское право распространяется не только на тексты, на название произведения, на его колоритных персонажей, на исполнение, но и на изобретения, на компьютерные программы, ресурсы и базы данных.

Необходимо представлять, на каких правовых основах производится использование того или иного набора программных систем. Большинство программ можно отнести к четырем основным группам по виду лицензий их использования [24]:

– проприетарные (proprietary software), которые находятся в частной собственности правообладателя и покупаются;

– условно-свободные (shareware), то есть коммерческие программы с ограничениями для бесплатного использования;

– свободные (free software), в отношении которых действуют права пользователя («свободы») на неограниченную установку, запуск, использование, изучение, распространение и изменение;

– бесплатные (freeware), которые, как правило, разрешено свободно распространять, но не изменять (исходный код недоступен, в отличие от free software).

На официальном сайте конкретного программного продукта можно найти более конкретную информацию о его лицензии: условия использования продукта, наличие возможности бесплатного использования в образовательных целях или при оказании платных услуг. Кроме того, правообладатель (автор или его правопреемник) для оповещения о принадлежащем ему исключительном праве на произведение может использовать знак охраны авторского права © (первая буква слова «copyright»). В противоположность знаку копирайт можно встретить знак «copyleft» – это знак свободной лицензии.

В качестве примеров популярных свободных систем управления сайтом выделим WordPress [28], Joomla [31], Drupal [30] и систему управления обучением Moodle [49].

Кроме использования инструментария, необходимого для создания сайта, авторское право регулирует и информационное наполнение ресурса.

Надо понимать, что авторские права не распространяются на

– идеи, концепции, принципы, методы, процессы, системы, способы, решения технических, организационных или иных задач, открытия, факты, языки программирования, геологическую информацию о недрах;

– официальные документы государственных органов и органов местного самоуправления, муниципальных образований;

– государственные символы и знаки: флаги, гербы и тому подобное;

– произведения народного творчества, не имеющие авторов;

– сообщения о событиях и фактах информационного характера: новости дня, программы телепередач, расписания движения транспортных средств и тому подобное.

Без согласия автора или иного правообладателя, но с обязательным указанием имени автора и источника заимствования, допускается:

– цитирование в оригинале и в переводе в научных, полемических, критических, информационных, учебных целях произведений в объеме, оправданном целью цитирования;

– использование произведений в качестве иллюстраций в изданиях, радио- и телепередачах, звуко- и видеозаписях учебного характера в объеме, оправданном поставленной целью;

– воспроизведение в периодическом печатном издании, сообщение в эфир, если такие воспроизведение, сообщение не были специально запрещены автором или иным правообладателем;

– публичное исполнение произведений путем их представления в живом исполнении, осуществляемое без цели извлечения прибыли в образовательных и других организациях работниками данных организаций;

– запись на электронном носителе и доведение до всеобщего сведения авторефератов диссертаций.

Исключительное право на произведение действует в течение всей жизни автора и 70 лет, считая с 1 января года, следующего за годом смерти автора. После прекращения действия исключительного права произведение переходит в общественное достояние. Оно может свободно использоваться любым лицом без чьего-либо согласия. При этом по-прежнему охраняются авторство, имя автора и неприкосновенность (неизменность) произведения.

Итак, материалы, используемые на образовательном сайте, должны либо быть авторскими, либо принадлежать общественному достоянию, либо иметь ссылку на источник заимствования.

Отметим также, что если содержание сайта будет соответствовать образовательной программе, то сайт будет частью образовательной деятельности педагога. Однако учебный материал вне образовательных программ будет являться просветительской деятельностью, которая будет регулироваться Федеральным законом, в широкой общественности законом, названным о просветительской деятельности, вступившим в силу с 1 июня 2021 г. и еще недостаточно конкретизированным [41].

Согласно федеральному закону от 2006 г. № 152-ФЗ «О персональных данных» [39], если сайт сохраняет или обрабатывает личные данные пользователей, то он должен получать от посетителей (их законных представителей) согласие на обработку персональных данных, а также предоставлять возможность отзывать согласие.

Под персональными данными понимается любая информация, относящаяся к физическому лицу, на основании которой можно установить его личность. Это фамилия, имя, отчество, год, месяц, дата и место рождения, адрес, электронная почта, географическое положение, IP, номер телефона, семейное, социальное, имущественное положение, образование, профессия, доходы, другая информация. Под обработкой персональных данных подразумевается сбор, систематизация, накопление, хранение, уточнение, использование, распространение, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных.

Согласие на обработку персональных данных должно включать в себя:

– ФИО, адрес, данные основного документа, удостоверяющего личность;

– наименование (фамилию, имя, отчество) и адрес стороны, получившей согласие от субъекта персональных данных;

– цель обработки данных;

– перечень данных, на обработку которых дается согласие;

– перечень действий с данными, общее описание используемых способов обработки данных;

– срок, в течение которого действует согласие, порядок его отзыва.

Зачастую для запоминания пользователей сайта и их настроек используются куки, то есть фрагменты данных, сохраняемые при загрузке веб-сайтов в браузере. Куки могут устанавливаться как самим сайтом, так и стороной, обеспечивающей содержимое, рекламу или сервисы аналитики на сайте. В соответствии с законом о персональных данных, законом ЕС GDPR о файлах cookie и правилами CCPA, об использовании куки необходимо предупредить пользователя [16].

При разработке образовательного сайта следует учесть нагрузку школьников и ограничения на их работу с электронными ресурсами, установленные в санитарных правилах СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи», вступившие в силу в 2021 г. до 2027 г. [18].

Продолжительность использования ЭСО указана в Постановлении главного государственного санитарного врача РФ от 28 января 2021 г. № 2 «Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 "Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания"» [19].

Таблица 1

ЭСО	Классы	На уроке, мин., не более	Суммарно в день в школе, мин., не более	Суммарно в день дома, мин., не более
Персональный компьютер с диагональю не менее 15,6 дюймов (39,6 см) или ноутбук с диагональю не менее 14,0 дюймов (35,6 см)	6–7 лет	15	20	–
	1–2 классы	20	40	80
	3–4 классы	25	50	90
	5–9 классы	30	60	120
	10–11 классы, 1–2 курс ПОО	35	70	170
Планшет с диагональю не менее 10,5 дюймов (26,6 см)	6–7 лет	10	10	–
	1–2 классы	10	30	80
	3–4 классы	15	45	90
	5–9 классы	20	60	120
	10–11 классы, 1–2 курс ПОО	20	80	150

Использование смартфона согласно СанПин в учебных целях не допускается.

Невелико также время, отведенное на домашнюю работу школьников: в 1 классе не более 60 мин., 2–3 классы не более 90 мин., 4–5 классы не более 120 мин., 6–8 классы не более 150 мин., 9–11 классы не более 210 мин.

Шрифтовое оформление электронных материалов также должно соответствовать гигиеническим нормативам. Для текстовой информации не допускается применять: узкое начертание шрифта; курсивное начертание шрифта (кроме выделений текста). Кегль шрифта вспомогательных элементов буквенных и числовых формул должен быть не менее 9 пунктов, в таблицах – не менее 10 пунктов. При выводе ячеек таблицы на отдельные электронные страницы кегль шрифта текста в ячейках должен быть не менее 12 пунктов. Расстояние между колонками текста в таблице должно быть не менее 12 мм.

Основной текст электронной страницы должен соответствовать требованиям таблицы.

Таблица 2

Классы	Объем текста единовременного прочтения, количество знаков	Кегль шрифта, пункты, не менее	Длина строки, мм, не менее	Группа шрифта
1–2 классы	не более 100	16	не регл.	рубленные
	не более 200	18	80	рубленные
3–4 классы	не более 200	14	не регл.	рубленные
	не более 400	16	80	рубленные
	более 400	18	90	рубленные
5–9 классы	не более 200	12	не регл.	все группы
	не более 400	14	50	все группы
	более 400	16	80	рубленные
10–11 классы	не более 200	10	не регл.	рубленные
	не более 400	12	50	все группы
	более 400	14	80	все группы

По СанПин для слабовидящих обучающихся (для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению) продолжительность непрерывной зрительной нагрузки не должна превышать 10 минут в 1–4 классах и 15 минут старше. Согласно приказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки РФ от 2020 г. № 831 «Об утверждении Требований к структуре официального сайта образовательной организации в информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" и формату представления информации», сайты образовательных учреждений, а стало быть, и учебные ресурсы, используемые в рамках образовательной деятельности, должны иметь версию для слабовидящих [22].

4. Инструментарий для разработки сайта педагога

Перейдем к созданию сайта. Считаем, что начать работу следует с выбора системы управления контентом (содержимым) сайта, то есть с программы, создающей сайт и позволяющей управлять им через админ-панель или консоль с удобным интерфейсом. Из систем управления контентом предпочтительны те, которые написаны на скриптовом языке программирования PHP, код которого выполняется на сервере, в отличие от языка разметки HTML, исполняемого браузером. Это позволяет создавать динамические (интерактивные) элементы: форумы, гостевые книги, формы взаимодействия с базами данных и тому подобное.

Считаем подходящей для наших целей систему управления контентом WordPress. Она характеризуется простотой использования, большой скоростью и устойчивостью, является бесплатной для некоммерческого использования и поддерживает язык запросов SQL, который воспринимает любой браузер. По состоянию на июнь 2021 г., WordPress обслуживает более 40 % из 10 миллионов лучших веб-сайтов.

Для работы WordPress в качестве web-сервера подойдет любой с поддержкой PHP и MySQL. Для эксперимента по созданию сайта мы использовали хостинг и домен от компании Вебхост [8] (хостинг работает на московском сервере).

Для расширения функционала сайта мы протестировали серию плагинов WordPress. Это функциональные дополнения системы, их создано огромное количество: на 10 июня 2021 г. существует 58 686 плагинов, практически каждый день это число меняется. Рекомендуем следующие из них:

– Contact Form 7 удобен для реализации обратной связи, в том числе для оформления согласия на обработку персональных данных и создания тестов;

– CookieYes создает уведомление для посетителя сайта о наличии файлов cookie;
– Button visually impaired создает версию сайта для слабовидящих с возможностью ее настройки;
– Elementor добавляет визуальный редактор;
– KaTeX полезен для создания математических формул.

Отметим, что плагин Contact Form 7 в стандартной конфигурации сам не будет [17]:
– следить тайно за пользователями;
– записывать никакие персональные данные пользователя в базу данных;
– отправлять никакие данные на внешние серверы;
– использовать куки.

Подробнее о создании сайта с помощью WordPrecc можно посмотреть в издании соответствующей тематики [11].

Приведем еще некоторые инструменты, которые мы считаем достаточно удобными.

Для создания математических чертежей и динамических иллюстраций рекомендуем использовать бесплатный для некоммерческих пользователей пакет динамической математики GeoGebra [50]. Под некоммерческим использованием GeoGebra понимается привлечение учащихся и учителей, которые могут пожелать использовать GeoGebra дома, в школе или университете для целей своей школы или обучения и преподавания. Оно не подразумевает получения коммерческой выгоды. К коммерческому использованию в первую очередь привлечены издатели, онлайн-школы, онлайн-университеты и некоммерческие организации, которые хотят использовать GeoGebra для поддержки деятельности, направленной на обеспечение коммерческого преимущества или получение дохода.

Для создания обучающих видеороликов подойдет программа записи видео с экрана Скриншотер [10], лицензия которой подразумевает свободное использование.

Для оформления сайта мы использовали картинки с сервиса бесплатных изображений Pixabay [32].

5. Рекомендации по наполнению сайта

Бесспорно, при создании сайта значимо не столько его техническое решение, сколько его содержание, оправдывающее электронную форму представления информации, способствующее формированию навыков. Приведем некоторые показавшиеся нам уместными рекомендации, касающиеся наполнения сайта по предмету.

Изначально следует исключить «тяжелые» элементы: известно, что пользователи спокойно переносят 10-секундную, а дальше начинают терять терпение. Так, нами проверено, что задержки могут возникнуть при одновременном прохождении тестов в Moodle на хостинге с дисковым пространством в 5 GB.

По данным 2008 г., среднестатистический пользователь Интернета прочитывает не более 20 % текста на странице, при этом избегает больших абзацев: страницы бегло просматриваются по шаблону, напоминающему букву F [4]. Таким образом, лучше наиболее важную информацию размещать в начале, применять выделения для ключевых слов, раскрывать не более одной мысли за абзац.

Русская исследовательница Блюма Зейгарник выяснила, что незаконченные действия запоминаются почти в два раза лучше, чем завершенные – это эксперимент 1924–1926 гг. с участием 164 испытуемых (студентов, учителей и детей) [5]. Этот результат был подтвержден последующими исследованиями и говорит об эффективности использования приема незаконченности изложения, указания на то, что материал обязательно понадобится в дальнейшем.

Американская организация Kaiser Family Foundation в 2005 г. получила следующие результаты опроса 2032 детей в возрасте от 8 до 18 лет: при выполнении домашних заданий 30 % проводится в многозадачном режиме (используют смик или разговаривают по телефону), а если задание выполняется на компьютере, то многие школьники в течение 2/3 времени занимаются другими вещами. Согласно исследованиям ученых Стэнфордского университета на 262 студентах, у многозадачников плохо получается игнорировать не только отвлекающие раздражители, но и собственное уже отвлекающее содержание памяти, то есть многозадачники имеют проблемы в контроле над своим мышлением, которые, вероятно, могут развивать его поверхностность и неэффективность [45].

Считаем полезным в учебные материалы включать задания, которые кроме учебных целей способствуют улучшению самоконтроля учащегося, поскольку требуют сосредоточения (например, сделать чертеж к задаче). По этой же причине следует исключить быструю смену картинок в анимации и видео. Полезно использовать возможность современных инструментов создания контента прерывать изложение (паузы в видеоролике не позволяют перейти на следующую страницу), пока не будет получен верный ответ на вопрос, закрепляющий блок пройденного материала.

Согласно исследованию, проведенному Маркусом Кифером на 28 студентах Ульмского университета, то, насколько эффективно мозг управляет информацией, зависит от того, каким образом она была получена: тот, кто знакомится с объектом с помощью его манипуляций руками, сможет размышлять о нем эффективнее, чем если бы знакомился через демонстрацию щелчком мыши [45]. Поэтому мы приветствуем размещение моделей математических объектов и явлений, которые по инструкции (например, по распечатанной развертке) можно собрать собственными руками.

В заключение приведем предостережение американского писателя Клиффорда Столла, который еще в 1995 г. сравнил компьютер в обучении с учебными фильмами, которые показывали в докомпьютерные времена: «Мы обожали их, потому что целый час можно было ни о чем не думать! Учителя любили их, потому что целый час можно было не вести занятия, а родителям они нравились, так как это подтверждало, что школа, которую они выбрали для своего отпрыска, оборудована по последнему слову техники».

Список литературы

1. *Ахмадеева Л.* Как закалялся EdTech: российский рынок в контексте глобальных трендов // РБК : новостной сайт. URL: https://trends.rbc.ru/trends/education/5f5671749a79477863fa3bf6 (дата обращения: 01.08.2021).

2. Врач заявил о негативном влиянии дистанционного обучения на зрение // Известия : информационный портал. 25 марта 2021. URL: https://iz.ru/1142288/2021-03-25/vrach-zaiavil-o-negativnom-vliianii-distantcionnogo-obucheniia-na-zrenie (дата обращения: 01.08.2021).

3. Гражданский кодекс Российской Федерации – часть четвертая // Роспатент : Федеральная служба по интеллектуальной собственности. URL: https://rospatent.gov.ru/ru/documents/grazhdanskiy-kodeks-rossiyskoy-federacii-chast-chetvertaya (дата обращения: 01.08.2021).

4. Деградация мозга – читать всем! // Сайт издательства Animedia Company. URL: https://animedia-company.cz/the-brain-degradation-reading-for-all/ (дата обращения: 01.08.2021).

5. *Зейгарник Б.* Запоминание законченных и незаконченных действий // Сайт психолога Марии Кудрявцевой. URL: https://maria-kudryavtseva.ru/wp-content/uploads/2016/11/Bluma_Zeygarnik_Zapominanie_ zakonchennih_i_nezakonchennih_deystviy.pdf (дата обращения: 01.08.2021).

6. *Коваленко А.* Столпы четвертой революции // Эксперт : электрон. журнал. 26 июля 2021. № 31. URL: https://expert.ru/ural/2021/34/stolpy-chetvertoy-revolyutsii/ (дата обращения: 01.08.2021).

7. *Колесникова К.* Ученье – сайт. В 2021 году рынок онлайн-образования в России продолжит взрывной рост // Российская газета : издание Правительства РФ, официальный публикатор документов. Федеральный выпуск № 3 (8354). URL: https://rg.ru/2021/01/12/v-2021-godu-rynok-onlajn-obrazovaniia-v-rossii-prodolzhit-vzryvnoj-rost.html (дата обращения: 01.08.2021).

8. Компания Вебхост. URL: webhost1.ru (дата обращения: 01.08.2021).

9. *Курпатов А. В.* Реальные последствия и причины нашей цифровой зависимости. Выступление на форуме Дни ритейла на Неве 1–19 ноября 2019 // YouTube : видеохостинг. URL: https://youtu.be/I6oV0H9hAwU (дата обращения: 01.08.2021).

10. Математическая программа GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 01.08.2021).

11. *Молочков В. П.* WordPress с нуля. Спб. : БХВ-Петербург, 2021. 304 с.

12. Моя школа в online. URL: https://cifra.school/ (дата обращения: 01.08.2021).

13. Названо безопасное для здоровья школьников время, проведенное за гаджетом // News.ru : интернет-издание. 2019. URL: https://news.ru/health/eksperty-nazvali-bezopasnoe-dlya-zdorovya-shkolnikov-vremya-za-gadzhetom/ (дата обращения: 01.08.2021).

14. О том, как бороться с зависимостью от гаджетов с Андреем Курпатовым. Программа М. Минскер «Нам надо поговорить», 17 октября 2018 // YouTube : видеохостинг. URL: https://youtu.be/CuIuTwFsWiM (дата обращения: 01.08.2021).

15. Паспорт стратегии Цифровая трансформация образования // Банк документов на сайте Министерства просвещения РФ. 15 июля 2021. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/267a55edc9394c4fd7db31026f68f2dd/ (дата обращения: 01.08.2021).

16. Платформы согласия и скроллинг вне закона: Евросоюз уточнил правила использования cookies // Хабр : информационная площадка. 7 мая 2020. URL: https://habr.com/ru/news/t/500858/ (дата обращения: 01.08.2021).

17. Полное руководство по Contact Form 7. URL: https://contactform7.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

18. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28 сентября 2020 № 28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 "Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи"» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/74993644/ (дата обращения: 01.08.2021).

19. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28 января 2021 № 2 «Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 ''Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания''» // КонсультантПлюс : справочная правовая система. URL: http://www.consultant.ru/document/ cons_doc_LAW_375839/65af156fd42b70e34af9fff6dea789463eb4ac97/ (дата обращения: 01.08.2021).

20. Постановление Правительства РФ от 7 декабря 2020 № 2040 «О проведении эксперимента по внедрению цифровой образовательной среды» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/74922819/ (дата обращения: 01.08.2021).

21. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» // Pravo.gov.ru : официальный интернет-портал правовой информации. URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения: 01.08.2021).

22. Приказ Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки РФ от 14 августа 2020 № 831 «Об утверждении Требований к структуре официального сайта образовательной организации в информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" и формату представления информации» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://base.garant.ru/74901486/ (дата обращения: 01.08.2021).

23. Приложение к протоколу заседания проектного комитета по национальному проекту «Образование» от 07 декабря 2018 № 3 Паспорт федерального проекта «Цифровая образовательная среда» // Edu54.ru : Новосибирская открытая образовательная сеть. URL: https://edu54.ru/upload/files/2016/03/Федеральный%20проект%20Цифровая%20образовательная%20среда.pdf (дата обращения: 01.08.2021).

24. *Пятакова И.* Лицензии на программное обеспечение: что, как и для чего // Инфостарт : сайт компании. URL: https://infostart.ru/1c/articles/142873/ (дата обращения: 01.08.2021).

25. Разработка сайтов и российский хостинг для образования. URL: https://www.eduhosting.ru (дата обращения: 01.08.2021).

26. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 № 2506-р «О Концепции развития математического образования в РФ» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/ (дата обращения: 01.08.2021).

27. Региональный Сетевой Информационный Центр. URL: https://edu.nic.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

28. Сайт платформы для создания сайтов WordPress. URL: https://wordpress.com/ru (дата обращения: 01.08.2021).

29. Сервис бесплатных отчетов по использованию интернета в мире DatarePortal. URL: https://datareportal.com/ (дата обращения: 01.08.2021).

30. Система управления контентом Drupal. URL: https://drupal.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

31. Система управления сайтом Joomla! URL: https://joomla.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

32. Скриншотер. URL: https://скриншотер.рф (дата обращения: 01.08.2021).

33. Создан первый безопасный для глаз монитор E-Ink с сенсорным экраном и подсветкой // Gadgetpage : новостной портал. 4 сентября 2019. URL: https://gadgetpage.ru/gadzhety/5097-sozdan-pervyj-bezopasnyj-dlja-glaz-monitor-e-ink-s-sensornym-jekranom-i-podsvetkoj.html (дата обращения: 01.08.2021).

34. Спасти наши глаза: LED-проекторы // Хабр : информационная площадка. 16 апреля 2014. URL: https://habr.com/ru/post/219467/ (дата обращения: 01.08.2021).

35. Сферум – для тебя, школы и жизни. URL: https://sferum.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

36. Указ Президента РФ от 9 мая 2017 № 203 «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71570570/ (дата обращения: 01.08.2021).

37. *Урманцева А.* Опасная связь: ученые доказали вредность мобильных телефонов для детей. Уникальное исследование воздействия электромагнитного излучения на школьников продолжалось 14 лет // Известия : информационный портал. 4 сентября 2019. URL: https://iz.ru/917164/anna-urmantceva/opasnaia-sviaz-uchenye-dokazali-vrednost-mobilnykh-telefonov-dlia-detei (дата обращения: 01.08.2021).

38. Учи.ру – интерактивная образовательная онлайн-платформа. URL: https://uchi.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

39. Федеральный закон от 27 июля 2006 № 152-ФЗ «О персональных данных» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://base.garant.ru/12148567/ (дата обращения: 01.08.2021).

40. Федеральный закон от 31 декабря 2014 № 531-ФЗ «О внесении изменений в статьи 13 и 14 Федерального закона "Об информации, информационных технологиях и о защите информации" и Кодекс Российской Федерации об административных правонарушениях» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://base.garant.ru/70833224/ (дата обращения: 01.08.2021).

41. Федеральный закон от 5 апреля 2021 № 85-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации"» // Гарант : справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://base.garant.ru/400542027/ (дата обращения: 01.08.2021).

42. Фоксфорд – онлайн-школа для учеников 1–11 классов, учителей и родителей. URL: https://foxford.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

43. Хостинг от Лиги Безопасного Интернета. URL: http://lbihost.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

44. Чтобы вырасти здоровыми, детям нужно меньше сидеть и больше играть. Новые руководящие принципы ВОЗ по физической активности, малоподвижному поведению и сну для детей в возрасте до 5 лет // Всемирная организация здравоохранения. 24 апреля 2019. URL: https://www.who.int/news/item/24-04-2019-to-grow-up-healthy-children-need-to-sit-less-and-play-more (дата обращения: 01.08.2021).

45. *Шпитцер М.* Антимозг. Цифровые технологии и мозг / пер. с немецкого А. Г. Гришина. М. : АСТ, 2014. 288 с.

46. Яндекс.Учебник. Бесплатная цифровая платформа для обучения основным школьным предметам. URL: https://education.yandex.ru/main/ (дата обращения: 01.08.2021).

47. *Christakis D. A., Zimmerman F. J., DiGiuseppe D. L. et. al.* Early television exposure and subseguent // Pediatrics. 2004. № 113 (4). С. 708-713.

48. *Mcspadden K.* You now have a shorter attention span than a goldfish // Time : американский еженедельный журнал и информационный портал. 14 мая 2015. URL: https://time.com/3858309/attention-spans-goldfish/ (дата обращения: 01.08.2021).

49. Moodle LMS. Самое настраиваемое и надежное в мире решение для онлайн-обучения. URL: https://moodle.com/ (дата обращения: 01.08.2021).

50. Pixabay. Сервис бесплатных изображений. URL: pixabay.com/ (дата обращения: 01.08.2021).

Development of a teacher's website based on the WordPress content management system

K. Yu. Darovskih[1], E. N. Lubyagina[2]

[1]master student of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: darovskikh.katena@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor,
associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Abstract. A distinctive feature of modern society is active digitalization in all spheres of life. Vast experience in the use of electronic technologies in education has been accumulated. However, the issue of choosing the optimal tools for the development of e-learning units and combining them on one resource remains relevant.

In this article, a variant of creating a teacher's website to accompany a full-time school mathematics course is proposed. The article touches upon the topic of the influence of digital media and communication (DMC) – televisions, computers, smartphones and other screen technology on the development of thinking of modern schoolchildren. An overview of the requirements and recommendations for the creation of an electronic educational resource is given. According to the authors, convenient software tools are proposed that are useful in the development of the designated site: the WordPress content management system, the GeoGebra dynamic drawing system and the Screenshot program.

Keywords: personal website, content management systems, WordPress, GeoGebra, Screenshot.

References

1. *Akhmadeeva L. Kak zakalyalsya EdTech : rossijskij rynok v kontekste global'nyh trendov* [How EdTech was tempered : the Russian market in the context of global trends] // *RBK : novostnoj sajt* – RBC : news site. Available at: https://trends.rbc.ru/trends/education/5f5671749a79477863fa3bf6 (date accessed: 01.08.2021).

2. *Vrach zayavil o negativnom vliyanii distancionnogo obucheniya na zrenie* – The doctor stated about the negative impact of distance learning on vision // *Izvestiya : informacionnyj portal* – Izvestia : information portal. March 25, 2021. Available at: https://iz.ru/1142288/2021-03-25/vrach-zaiavil-o-negativnom-vliianii-distantcionnogo-obucheniia-na-zrenie (date accessed: 01.08.2021).

3. The Civil Code of the Russian Federation – part four // Rospatent : Federal Service for Intellectual Property. Available at: https://rospatent.gov.ru/ru/documents/grazhdanskiy-kodeks-rossiyskoy-federacii-chast-chetvertaya (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

4. *Degradaciya mozga – chitat' vsem!* – Brain degradation – everyone to read! // Website of the publishing house Animedia Company. Available at: https://animedia-company.cz/the-brain-degradation-reading-for-all/ (date accessed: 01.08.2021).

5. *Zejgarnik B. Zapominanie zakonchennyh i nezakonchennyh dejstvij* [Memorizing of completed and unfinished actions] // Website of psychologist Maria Kudryavtseva. Available at: https://maria-kudryavtseva.ru/wp-content/uploads/2016/11/Bluma_Zeygarnik_Zapominanie_zakonchennih_i_nezakonchennih_deystviy.pdf (date accessed: 01.08.2021).

6. *Kovalenko A. Stolpy chetvertoj revolyucii* [Pillars of the Fourth Revolution] // *Ekspert : elektron. zhurnal* – Expert: electron. journal. July 26, 2021. No. 31. Available at: https://expert.ru/ural/2021/34/stolpy-chetvertoy-revolyutsii/ (date accessed: 01.08.2021).

7. *Kolesnikova K. Uchen'e – sajt. V 2021 godu rynok onlajn-obrazovaniya v Rossii prodolzhit vzryvnoj rost* [Uchenie – website. In 2021, the online education market in Russia will continue to grow explosively] // *Rossijskaya gazeta : izdanie Pravitel'stva RF, oficial'nyj publikator dokumentov* – Rossiyskaya Gazeta : edition of the Government of the Russian Federation, the official publisher of documents. Federal Is. No. 3 (8354). Available at: https://rg.ru/2021/01/12/v-2021-godu-rynok-onlajn-obrazovaniia-v-rossii-prodolzhit-vzryvnoj-rost.html (date accessed: 01.08.2021).

8. *Kompaniya Vebhost* – Company Webhost. Available at: webhost1.ru (date accessed: 01.08.2021).

9. *Kurpatov A. V. Real'nye posledstviya i prichiny nashej cifrovoj zavisimosti. Vystuplenie na forume Dni ritejla na Neve 1–19 noyabrya 2019* [The real consequences and causes of our digital addiction. Speech at the forum Days of Retail on the Neva on November 1–19, 2019] // YouTube : video hosting. Available at: https://youtu.be/I6oV0H9hAwU (date accessed: 01.08.2021).

10. *Matematicheskaya programma GeoGebra* – Mathematical program GeoGebra. Available at: https://www.geogebra.org / (date accessed: 01.08.2021).

11. *Molochkov V. P. WordPress s nulya* [WordPress from scratch]. SPb. BHV-Petersburg Publ. 2021. 304 p.

12. *Moya shkola v online* – My school in online. Available at: https://cifra.school/ (date accessed: 01.08.2021).

13. *Nazvano bezopasnoe dlya zdorov'ya shkol'nikov vremya, provedennoe za gadzhetom* – The time spent at the gadget is called safe for the health of schoolchildren // *News.ru : internet-izdanie* – News.ru : online edition. 2019. Available at: https://news.ru/health/eksperty-nazvali-bezopasnoe-dlya-zdorovya-shkolnikov-vremya-za-gadzhetom / (date accessed: 01.08.2021).

14. *O tom, kak borot'sya s zavisimost'yu ot gadzhetov s Andreem Kurpatovym. Programma M. Minsker "Nam nado pogovorit'", 17 oktyabrya 2018* – About how to deal with addiction to gadgets with Andrey Kurpatov. M. Minsker's program "We need to talk", October 17, 2018 // YouTube : video hosting. Available at: https://youtu.be/CuIuTwFsWiM (date accessed: 01.08.2021).

15. *Pasport strategii Cifrovaya transformaciya obrazovaniya* – Passport of the Digital transformation of education strategy // Document bank on the website of the Ministry of Education of the Russian Federation. July 15, 2021. Available at: https://docs.edu.gov.ru/document/267a55edc9394c4fd7db31026f68f2dd/ (date accessed: 01.08.2021).

16. *Platformy soglasiya i skrolling vne zakona : Evrosoyuz utochnil pravila ispol'zovaniya cookies* – Consent platforms and scrolling are illegal: The European Union has clarified the rules for the use of cookies // *Habr : informacionnaya ploshchadka* – Habr : information platform. May 7, 2020. Available at: https://habr.com/ru/news/t/500858/ (date accessed: 01.08.2021).

17. *Polnoe rukovodstvo po Contact Form 7* – Complete guide to Contact Form 7. Available at: https://contactform7.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

18. Resolution of the Chief State Sanitary Doctor of the Russian Federation No. 28 dated September 28, 2020 "On approval of the sanitary rules of SP 2.4.3648-20 "Sanitary and epidemiological requirements for organizations of upbringing and training, recreation and health improvement of children and youth" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal reference system according to the legislation of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/74993644/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

19. Resolution of the Chief State Sanitary Doctor of the Russian Federation No. 2 dated January 28, 2021 "On approval of sanitary rules and norms of SanPiN 1.2.3685-21 "Hygienic standards and requirements for ensuring safety and (or) harmlessness of environmental factors for humans"" // *Konsul'tantPlyus : spravochnaya pravovaya sistema* – ConsultantPlus : reference legal system. Available at: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_375839/65af156fd42b70e34af9fff6dea789463eb4ac97/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

20. Decree of the Government of the Russian Federation No. 2040 dated December 7, 2020 "On conducting an experiment on the introduction of a digital educational environment" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant: legal reference system according to the legislation of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/74922819/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

21. Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 287 dated May 31, 2021 "On approval of the Federal State educational standard of basic general education" // *Pravo.gov.ru : oficial'nyj internet-portal pravovoj informacii* – Pravo.gov.ru : official Internet portal of legal information. Available at: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

22. Order of the Federal Service for Supervision of Education and Science of the Russian Federation No. 831 dated August 14, 2020 "On approval of Requirements for the structure of the official website of an educational organization in the Internet information and telecommunications network and the format of information presentation" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal reference system under the legislation of the Russian Federation. Available at: https://base .garant.ru/74901486/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

23. *Prilozhenie k protokolu zasedaniya proektnogo komiteta po nacional'nomu proektu "Obrazovanie" ot 07 dekabrya 2018 № 3 Pasport federal'nogo proekta "Cifrovaya obrazovatel'naya sreda"* – Appendix to the protocol of the meeting of the project committee on the national project "Education" dated December 07, 2018 No. 3 Passport of the federal project "Digital educational Environment" // *Edu54.ru : Novosibirskaya otkrytaya obrazovatel'naya set'* – Edu54.ru : Novosibirsk Open Educational Network. Available at: https://edu54.ru/upload/files/2016/03/Федеральный%20проект%20Цифровая%20образовательная%20среда.pdf (date accessed: 01.08.2021).

24. *Pyatakova I. Licenzii na programmnoe obespechenie: chto, kak i dlya chego* [Software licenses: what, how and for what] // *Ipfostart : sajt kompanii* – Ipfostart : company website. Available at: https://infostart.ru/1c/articles/142873/ (date accessed: 01.08.2021).

25. *Razrabotka sajtov i rossijskij hosting dlya obrazovaniya* – Website development and Russian hosting for education. Available at: https://www.eduhosting.ru (date accessed: 01.08.2021).

26. The order of the Government of the Russian Federation of December 24, 2013 No. 2506-p "On the concept of mathematical education in the Russian Federation" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : reference and legal system under the laws of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

27. *Regional'nyj Setevoj Informacionnyj Centr* – Regional Network Information Center. Available at: https://edu.nic.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

28. *Sajt platformy dlya sozdaniya sajtov WordPress* – Website platform for creating websites with WordPress. Available at: https://wordpress.com/ru (date accessed: 01.08.2021).

29. *Servis besplatnyh otchetov po ispol'zovaniyu interneta v mire DatarePortal* – The service of free reports on Internet usage in the world of DatarePortal. Available at: https://datareportal.com/ (date accessed: 01.08.2021).

30. *Sistema upravleniya kontentom Drupal* – Drupal Content Management System. Available at: https://drupal.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

31. *Sistema upravleniya sajtom Joomla!* – Joomla! website management system. Available at: https://joomla.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

32. *Skrinshoter* – Screenshot. Available at: https://скриншотер.рф (date accessed: 01.08.2021).

33. *Sozdan pervyj bezopasnyj dlya glaz monitor E-Ink s sensornym ekranom i podsvetkoj* – The first eye-safe E-Ink monitor with a touch screen and backlight has been created // *Gadgetpage : novostnoj portal* – Gadgetpage : news portal. September 4, 2019. Available at: https://gadgetpage.ru/gadzhety/5097-sozdan-pervyj-bezopasnyj-dlja-glaz-monitor-e-ink-s-sensornym-jekranom-i-podsvetkoj.html (date accessed: 01.08.2021).

34. *Spasti nashi glaza: LED-proektory* – Save our eyes: LED projectors // *Habr : informacionnaya ploshchadka* – Habr : information platform. April 16, 2014. Available at: https://habr.com/ru/post/219467/ (date accessed: 01.08.2021).

35. *Cferum – dlya tebya, shkoly i zhizni* – Spherum – for you, school and life. Available at: https://sferum.ru / (date accessed: 01.08.2021).

36. Decree of the President of the Russian Federation No. 203 dated May 9, 2017 "On the Strategy for the development of the information society in the Russian Federation for 2017-2030" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal reference system according to the legislation of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71570570/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

37. *Urmanceva A. Opasnaya svyaz' : uchenye dokazali vrednost' mobil'nyh telefonov dlya detej. Unikal'noe issledovanie vozdejstviya elektromagnitnogo izlucheniya na shkol'nikov prodolzhalos' 14 let* [Dangerous communication: scientists have proved the harmfulness of mobile phones for children. A unique study of the effects of electromagnetic radiation on schoolchildren lasted 14 years] // *Izvestiya: informacionnyj portal* – Izvestia : information portal. September 4, 2019. Available at: https://iz.ru/917164/anna-urmantceva/opasnaia-sviaz-uchenye-dokazali-vrednost-mobilnykh-telefonov-dlia-detei (date accessed: 01.08.2021).

38. *Uchi.ru – interaktivnaya obrazovatel'naya onlajn-platforma* – Учи.ру is an interactive online educational platform. Available at: https://uchi.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

39. Federal Law No. 152-ФЗ of July 27, 2006 "On Personal data" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal reference system according to the legislation of the Russian Federation. Available at: https://base .garant.ru/12148567/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

40. Federal Law No. 531-ФЗ of December 31, 2014 "On Amendments to Articles 13 and 14 of the Federal Law "On Information, Information Technologies and Information Protection" and the Code of Administrative Offences of the Russian Federation" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal Reference System according to the Legislation of the Russian Federation. Available at: https://base .garant.ru/70833224/ (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

41. Federal Law No. 85-ФЗ of April 5, 2021 "On Amendments to the Federal Law "On Education in the Russian Federation" // *Garant : spravochno-pravovaya sistema po zakonodatel'stvu RF* – Garant : legal Reference system for the legislation of the Russian Federation. Available at: https://base .garant.ru/400542027/ (date accessed: 01.08.2021).

42. *Foksford – onlajn-shkola dlya uchenikov 1–11 klassov, uchitelej i roditelej* – Foxford is an online school for students of grades 1-11, teachers and parents. Available at: https://foxford.ru / (date accessed: 01.08.2021).

43. *Hosting ot Ligi Bezopasnogo Interneta* – Hosting from the Safe Internet League. Available at: http://lbi-host.ru/ (date accessed: 01.08.2021).

44. *Chtoby vyrasti zdorovymi, detyam nuzhno men'she sidet' i bol'she igrat'. Novye rukovodyashchie principy VOZ po fizicheskoj aktivnosti, malopodvizhnomu povedeniyu i snu dlya detej v vozraste do 5 let* – To grow up healthy, children need to sit less and play more. New WHO guidelines on physical activity, sedentary behavior and sleep for children under 5 years of age // *Vsemirnaya organizaciya zdravoohraneniya* – World Health Organization. April 24, 2019. Available at: https://www.who.int/news/item/24-04-2019-to-grow-up-healthy-children-need-to-sit-less-and-play-more (date accessed: 01.08.2021).

45. *Spitzer M. Antimozg. Cifrovye tekhnologii i mozg* [Anti-brain. Digital technologies and the brain] / transl. from German by A. G. Grishin. M. AST. 2014. 288 p.

46. *Yandeks.Uchebnik. Besplatnaya cifrovaya platforma dlya obucheniya osnovnym shkol'nym predmetam* – Yandex.Textbook. A free digital platform for teaching basic school subjects. Available at: https://education.yandex.ru/main/ (date accessed: 01.08.2021).

47. *Christakis D. A., Zimmerman F. J., DiGiuseppe D. L. et. al.* Early television exposure and subseguent // Pediatrics. 2004. No. 113 (4). 708–713.

48. *Mcspadden K.* You now have a shorter attention span than a goldfish // Time: American weekly journal and information portal. 14 May 2015. Available at: https://time.com/3858309/ attention- spans-goldfish/ (date accessed: 01.08.2021).

49. *Moodle LMS. Samoe nastraivaemoe i nadezhnoe v mire reshenie dlya onlajn-obucheniya* – Moodle LMS. The world's most customizable and reliable online learning solution. Available at: https://moodle.com/ (date accessed: 01.08.2021).

50. *Pixabay. Servis besplatnyh izobrazhenij* – Pixabay. Free Image Service. Available at: pixabay.com/ (date accessed: 01.08.2021).

УДК 51 DOI 10.25730/VSU.0536.21.013

Решение задач с параметром методом выделения необходимых условий на параметр

М. Ю. Здоровенко[1], М. Н. Левин[2]
[1]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: zdorovenko.s@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

Аннотация. В статье предлагаются методические рекомендации по проведению занятий на элективном курсе по математике в 8–11 классах по теме «Решение задач с параметрами».

Рассматривается метод выделения необходимых условий на параметр для решения наиболее логически сложных задач. Формулировка таких задач содержит условия «для всех значений переменной x из некоторого множества M выполняются условия A» или «существует x, что условие A выполняется для любого y». Предлагаемые задания и разобранные примеры направлены на формирование общей математической культуры обучающихся, развития у них исследовательских навыков и умения логически мыслить, а также обобщать и применять полученные знания для решения математических задач.

Представленная работа будет интересна учащимся 8–11 классов, учителям математики, работающим в старших классах школы, студентам математических специальностей педагогических ВУЗов, методистам.

Ключевые слова: задача с параметрами, необходимое условие, математическое образование.

Решение задач с параметрами в школьном курсе математики играет важную роль. Эти задачи формируют исследовательские навыки, развивают логическое и аналитическое мышление и умение обобщать изученный на уроках математики материал. Полученные знания используются в различных, часто нестандартных ситуациях на практике. Однако решению задач с параметрами на уроках математики в школе уделяется мало внимания, а материал по этой теме нельзя назвать систематизированным и методически разработанным.

Методы решения задач с параметрами, как правило, изучаются на элективных курсах по математике в старших классах. Основной целью таких курсов является подготовка к итоговой аттестации. Однако потенциал курса по решению задач с параметрами значительно выше. Курс в первую очередь должен быть направлен на формирование математической культуры обучающихся, развитие у них исследовательских навыков, умение логически мыслить, обобщать изученный материал, применять полученные знания при решении различных математических задач.

По методам решения задачи с параметрами традиционно разделяют на три больших класса:
– задачи, решаемые графическим методом в системе «переменная–переменная»;
– задачи, решаемые графическим методом в системе «переменная–параметр»;
– задачи, решаемые аналитически.

Одна и та же задача может допускать решение различными методами [1; 2]. Нередко решение задачи требует комбинации указанных методов.

Рассмотрим еще один метод – метод выделения необходимых условий на параметр. Он непривычен для учащихся и учителей.

Задачи, решаемые указанным методом, можно разделить на 4 вида:
– задачи с симметрией;
– задачи на анализ ограниченности значений функций;
– задачи на анализ области определения;
– задачи, формулировка которых содержит условия вида: «для любого x из множества M выполняется условие A», «ни для какого x из множества M условие A не выполняется», «существует x, что условие A выполняется для любого y».

Наибольшее затруднение школьники испытывают при решении задач последнего из перечисленных видов, так как рассуждения при решении таких задач требуют развитого логического мышления, умения четко различать необходимые и достаточные условия, понятия следования и равносильности. Следует заметить, что разделу математики, в наибольшей степени развивающему логическое мышление школьников – геометрии – по мнению авторов, в настоящее время уделяется недостаточно внимания.

Разберем примеры решения задач, иллюстрирующих метод выделения необходимых условий на параметр.

Начнем с решения подготовительных заданий.

Задание 1.

Дано неравенство с параметром p:

$$x^4 - 4p^3x + (3p + 6) \geq 0. \qquad (1)$$

Поставим вопросы:

а) Верно, что при $p = 0$ неравенство выполняется для всех действительных значений x?

Решение.

При $p = 0$ получим неравенство $x^4 + 6 \geq 0$. Видим, что неравенство верно при всех действительных x, поскольку оба слагаемых в левой части неравенства неотрицательны.

Рассмотрите обратное утверждение: если сумма двух слагаемых неотрицательна, то оба слагаемых неотрицательны?

б) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется для всех действительных x. Будет оно верным при $x = 0$ (при $x = 2$, $x = 40$, $x = 1$)? Рассмотрите случай $p = 1$.

в) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется при $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ и при $x = 4$. Верно, что неравенство будет справедливо для всех действительных x из промежутка $[-2; 4]$? Рассмотрите случаи, когда $p = -1$, $p = 2$.

Обращаем внимание: если неравенство выполняется для некоторых чисел из промежутка $[-2; 4]$ или даже для многих чисел из промежутка, то это еще не означает, что неравенство верно для всех значений x из указанного промежутка.

г) Известно, что при некотором значении параметра p неравенство (1) выполняется при всех значениях x из промежутка $[-3; 0]$. Можно утверждать, что неравенство справедливо для всех x из промежутка $[-2; -1]$? Можно утверждать, что неравенство справедливо для всех x из промежутка $[-2; 1]$? Можно утверждать, что неравенство не будет справедливым при $x = -3$?

д) При каких целых значениях p число $x = 0$ удовлетворяет неравенству (1)? А числа $x = 2$, $x = -1$?

е) Если $p = 1$, то будет неравенство выполняться при $x = 0$, $x = 2$ и $x = -1$? Ответ дайте, не решая неравенство.

Задание 2. При каких целых значениях параметра p неравенство

$$2x^3 - 6p^2x - 5p \geq 0 \qquad (2)$$

выполняется при всех $x \in [-1; 2]$?

а) При каких из перечисленных значений переменной: $x = 0$, $x = -2$, $x = -0{,}5$ неравенство должно выполняться?

б) При $x = -2$ неравенство может быть верным?

в) Какие значения переменной x удобно подставить, чтобы найти ограничения на значения параметра p? Выберите из чисел: $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

г) Каким неравенствам должен удовлетворять параметр p, если указанные в пункте в) целые значения переменной являются решением заданного неравенства?

При подстановке в (1) вместо переменной x ее числового значения из множества $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ получаем неравенства:

$$6p^2 - 5p - 2 \geq 0;$$
$$p \geq 0;$$
$$6p^2 + 5p - 2 \leq 0;$$
$$12p^2 + 5p - 16 \leq 0.$$

Какие из полученных неравенств имеют конечное число целых решений? Обращаем внимание, что достаточно решить только одно из трех полученных неравенств, а найденные значения параметра подставить в оставшиеся неравенства и выбрать только те значения p, которые удовлетворяют всем полученным неравенствам. В результате получим единственное возможное значение параметра $p = -2$.

д) Нужно проверить, что $p = -2$ удовлетворяет условию задачи, или можно выписать ответ: $p = -2$?

Перечислим основные выводы, которые учащиеся должны сформулировать самостоятельно: чтобы найти все целые значения параметра p, при которых неравенство (2) выполняется при всех значениях $x \in [-1; 2]$, следует:

1) выбрать «подходящие» значения переменной x (в нашем примере это $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$);

2) подставить эти значения в неравенство (2) и получить соотношения на параметр p (то есть получить необходимые условия на параметр);

3) проверить все полученные значения параметра.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

В первых двух примерах множество «возможных» значений параметра конечно, а в следующих двух примерах – бесконечно.

Пример 1. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(x^2-4)^2 \geq (a+1)x^2+(3a+4)x-1+a$$

выполняется при всех действительных значения x.

Решение задачи начнем с обсуждения свойств выражений в левой и правой частях заданного неравенства и возможных методов решения указанного неравенства. Прежде всего перенесем все слагаемые в правую часть

$$(x^2-4)^2-(a+1)x^2-(3a+4)x+1-a \geq 0. \tag{3}$$

Приходим к следующим выводам:

1) Уравнение (3) является уравнением четвертого порядка и не является биквадратным. Методы решения таких уравнений из школьного курса математики учащиеся не знают.

2) Первое слагаемое в левой части уравнения (3) всегда неотрицательно. Если выражение

$$(a+1)x^2+(3a+4)x+a-1. \tag{4}$$

при всех значениях x не положительно, то условие задачи будет выполнено. Но при этом возможны такие значения параметра, при которых выражение (4) может принимать положительные значения, а неравенство (3) выполняется при всех действительных x.

3) При $a=-1$ выражение (4) равно $(x-2)$ и принимает как положительные (при $x = 4$), так и отрицательные (при $x = 1$) значения. При $a \neq -1$ выражение (4) является квадратным трехчленом и не принимает положительные значения, если выполнены условия:

$$\begin{cases} a+1<0 \\ D=(3a+4)^2-4(a+1)(a-1) \leq 0 \end{cases}.$$

Среди целых значений параметра a указанным условиям удовлетворяют $a=-3$ и $a=-2$.

Мы получили возможные значения параметра a, но не можем гарантировать, что других значений параметра, удовлетворяющих условию задачи, нет.

4) Неравенство справедливо при всех действительных значениях переменной, значит, оно выполняется и для конкретных значений переменной (например, $x=-9$, $x=0$, $x=1$). Подставив различные «удобные» значения переменной, находим значения параметра, при которых эти «удобные» значения находятся среди решений неравенства (3). Например, при $x=0$ получим:

$$17-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 17.$$

Это значит, что любое значение a, большее 17, условию задачи не удовлетворяет.

5) Какие значения переменной «удобно» подставить в заданное неравенство? В нашем случае выберем те значения переменной, при которых первое слагаемое высокой степени в правой части уравнения (3) обращается в ноль: $x=2$ и $x=-2$. В результате получим необходимые (но не достаточные) условия на параметр:

$$\begin{cases} -11a-11 \geq 0 \\ a+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq a \leq -1.$$

По условию задачи параметр принимает целые значения, поэтому возможные значения параметра равны –1, –2, –3, –4 или –5.

6) Искомые значения параметра находятся среди чисел $\{-5,-4,-3,-2,-1\}$, однако не все эти числа могут удовлетворять условию задачи. Каждое найденное значение параметра требует проверку.

7) Чтобы отвергнуть какое-либо значение параметра a, достаточно найти хотя бы одно значение переменной x, при котором левая часть (3) становится отрицательной.

8) При $a=-1$ получим неравенство

$$(x^2-4)^2-x+2 \geq 0,$$

которое не выполняется, например, при $x=2{,}01$. (Учащиеся, как правило, не могут доказать аналитически, что правая часть неравенства может принимать отрицательные значения. Поэтому можно воспользоваться калькулятором или анализом слагаемых в правой части неравенства).

При $a=-3$ и $a=-2$ получим неравенства, справедливые при всех действительных x (см. пункт 3).

При $a=-4$ получим неравенство

$$(x^2-4)^2+3x^2+8x+5 \geq 0.$$

Заметим, что

$$(x^2-4)^2+3x^2+8x+5 = x^4-8x^2+16+3x^2+8x+5 =$$

$$= x^4-7x^2+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+16+2x^2+8x+8-3 = \left(x^2-\frac{7}{2}\right)^2+2(x+2)^2+\frac{3}{4},$$

поэтому неравенство справедливо при всех действительных значениях x.

При $a = -5$ получим неравенство $(x^2-4)^2+4x^2+11x+6 \geq 0$, которое не выполняется, например, при $x = -1{,}9$.

Таким образом, приходим к ответу задачи: $a = -4, a = -3, \ a = -2$.

Пример 2. При каких значениях параметра m наименьшее значение функции

$$f(x) = 2\,|x| - x^2 + |4x^2+4(m+1)x+m^2+2m| \tag{5}$$

не меньше 3/4?

1) Решение задачи начнем с обсуждения того факта, что если наименьшее значение функции не меньше некоторого числа, то и все значения функции не меньше этого числа. Это означает, что для всех действительных значений x из области определения функции (D_f) выполняется неравенство

$$f(x) \geq f_{\text{наим}} \geq {}^3/_4.$$

Таким образом, $f(x) \geq {}^3/_4$ для всех значений x из D_f. Верно и обратное утверждение: если $f(x) \geq {}^3/_4$ для всех значений x из D_f, то $f_{\text{наим}} \geq \frac{3}{4}$.

Областью определения функции (5) является множество $\mathbb{R}$, поэтому исходную задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра m неравенство

$$2\,|x| - x^2 + |4x^2+4(m+1)x+m^2+2m| \geq \frac{3}{4} \tag{6}$$

выполняется при всех действительных x?

2) Неравенство (6) справедливо для всех действительных x, поэтому оно верно и при конкретных «удобных» значениях x. Чтобы выбрать подходящие значения x, преобразуем выражение под вторым знаком модуля в (6):

$$4x^2+4(m+1)x+m^2+2m =$$
$$= (2x)^2 + 2*(m+1)*(2x) + \overline{(m+1)^2 - (m+1)^2} + m^2 + 2m =$$
$$= (2x+(m+1))^2 - 1^2 = (2x+m+2)(2x+m).$$

В результате получим

$$2|x| - x^2 + |(2x+m+2)*(2x+m)| \geq 3/4.$$

3) В качестве «удобных» выберем те значения x, при которых выражения под знаком модуля обращаются в ноль:

$$x = 0 \Rightarrow |(m+2)*m| \geq \frac{3}{4} \tag{7}$$

$$x = -\frac{m+2}{2} \Rightarrow |m+2| - \frac{(m+2)^2}{4} + 0 \geq \frac{3}{4} \tag{8}$$

$$x = -\frac{m}{2} \Rightarrow |m| - \frac{m^2}{4} + 0 \geq \frac{3}{4}. \tag{9}$$

Итак, параметр m необходимо должен удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} |(m+2)m| \geq \dfrac{3}{4} \\ |m+2| - \dfrac{(m+2)^2}{4} \geq \dfrac{3}{4} \\ |m| - \dfrac{m^2}{4} \geq \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

4) Неравенство (9) решим методом интервалов, учитывая равенство $m^2 = |m|^2$:

$$|m| - \frac{|m|^2}{4} \geq \frac{3}{4} \ \Leftrightarrow 1 \leq |m| \leq 3 \ \Leftrightarrow m \in [-3;-1] \vee [1;3].$$

5) Неравенство (8) получается из неравенства (9) заменой m на $m+2$, поэтому его решение имеет вид

$$1 \leq |m+2| \leq 3 \Leftrightarrow (m+2) \in [-3;-1] \vee [1;3] \Leftrightarrow m \in [-5;-3] \vee [-1;1].$$

6) Соотношениям (8), (9) удовлетворяют только целые значения $m = -3; \ m = -1; \ m = 1$.

Все указанные значения параметра удовлетворяют неравенству (7), что проверяется непосредственной подстановкой.

Находим целые решения неравенства (8): $m \in \{-3; \ -2; \ -1; 1; 2; 3\}$ и, подставив эти значения в неравенства (7) и (9), можем найти общие целые решения неравенств (7) – (9).

7) Далее проверяем найденные «возможные» значения параметра m:

Если , то

$$f(x) = f_1(x) = 2|x| - x^2 + |(2x-1)(2x-3)|.$$

При $x \leq 0$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$, абсцисса вершины которой $x_0 = \frac{10}{3} > 0$, поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и

$$f(x) \geq f(0) = 3 > \frac{3}{4}.$$

При $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3(x-1)^2$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 > \frac{1}{2}$, поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

При $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, у параболы ветви направлены вниз, поэтому наименьшее значение достигается в точке $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{3}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Поэтому $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

При $x \geq \frac{3}{2}$ получим квадратичную функцию $f(x) = 3(x-1)^2$, абсцисса вершины которой $x_0 = 1 < \frac{3}{2}$, поэтому $f(x)$ возрастает на $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ и $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Итак, $f(x) \geq \frac{3}{4}$ при всех действительных значениях *x*, $m = -3$ удовлетворяет условию задачи.

Если $m = -1$, то

$$f(x) = 2|x| - x^2 + |4x^2 - 1|.$$

Проверка случая $m = -3$ заняла немало времени. Обсудим возможность «сократить» проверку случая $m = -1$. Заметим, что функция $f(x)$ четная, поэтому достаточно ее исследовать при неотрицательных *x*. Исследование производим аналогично случаю $m = -3$. Получим, что значение $m = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Если $m = 1$, то

$$f(x) = f_3(x) = 2|x| - x^2 + |(2x+3)(2x+1)|.$$

На первый взгляд «сократить» проверку не удастся и придется рассматривать значения функции на четырех промежутках. Однако заметим, что

$$f_3(-x) = 2\,|x| - x^2 + |(3-2x)(1-2x)| =$$
$$= 2|x| - x^2 + |(2x-1)(2x-3)| = f_1(x),$$

то есть график функции $f_3(x)$ симметричен графику функции $f_1(x)$ относительно оси *Oy*, поэтому наименьшее значение у обеих функций одинаково и равно $\frac{3}{4}$. Следовательно, значение $m = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Заметим, что еще ни разу в нашей практике учащиеся не увидели зависимости

$$f_3(-x) = f_1(x).$$

Этот прием становится для них открытием.

Натолкнуть на мысль воспользоваться симметрией графиков функций $f_1(x)$ и $f_3(x)$ может симметричность промежутков, на которые разбивается числовая прямая *Ox* при «раскрытии» модулей.

Ответ: $m = -3, m = \pm 1$.

Пример 3. Найти все значения параметра *p*, при которых неравенство

$$sin^4x + cos^4x > p * sin\,x * cos\,x \qquad (10)$$

верно, при всех действительных *x.*

Решение.

1) Неравенство верно для всех действительных значений *x*, значит, оно верно и при некоторых «удобных» значениях *x.* Какие значения переменной удобно взять? Заметим, что функции $sin\,x$ и $cos\,x$ входят в неравенство симметрично, поэтому выберем те значения переменной, при которых значения $cos\,x$ и $cos\,x$ равны или противоположны, например, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\frac{\pi}{4}$. В результате получим ограничения на параметр:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 > p * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\,p \;\Leftrightarrow\; p < 1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 > p * \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}\,p \;\Leftrightarrow\; p > -1\,.$$

Искомые значения параметра *p* находятся среди значений $-1 < p < 1$. Другие значения параметра *p* не подходят, так как неравенство не будет выполняться при всех действительных значениях переменной, а именно, либо $x = \frac{\pi}{4}$, либо $x = -\frac{\pi}{4}$ не является решением неравенства.

2) Подстановка других значений переменной найденное множество значений параметра не сужает ($x = \pm\frac{\pi}{6}$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\pi$). Возникает предположение, что все значения параметра удовлетворяют условию задачи.

3) Покажем, что при любом $p \in (-1; 1)$ неравенство (10) выполняется при всех действительных значениях *x*. В левой части неравенства (10) добавим и вычтем выражение $2Sin^2x\ Cos^2x$. В результате преобразований получим:

$$Sin^2 2x + \ p\ Sin\ 2x < 2.$$

Последнее неравенство верно при всех действительных значениях переменной, так как справедливы оценки:

$$0 \le Sin^2 2x \le 1, \qquad -1 \le Sin2x \le 1, \qquad -1 < p < 1,$$

поэтому

$$-1 < p * Sin\ 2x\ < 1 \quad \text{и} -1 < \ Sin^2 2x + p\ Sin\ 2x < 2.$$

Ответ: $p \in (-1; 1)$**.**

Пример 4. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{3^x + 3^{-x} - a}{a + 5} > 0$$

выполняется для всех действительных *x*?

1) Сделаем замену переменной:

$$t \ = \ 3^x + 3^{-x}.$$

Подчеркнем, что если *x* «пробегает» все действительные значения, то «пробегает» все значения из промежутка $[2; +\infty)$. Следовательно, можем переформулировать исходную задачу: при каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{t - a}{a + 5} > 0 \tag{11}$$

выполняется для всех действительных значений $t \in [2; +\infty)$?

2) Заметим, что $a \ = \ -5$ не удовлетворяет условию задачи, так как левая часть неравенства при этом значении параметра не имеет смысла.

3) Неравенство $\frac{t-a}{a+5} > 0$ должно быть верным при всех $t \ge 2$, значит, и при $t \ = \ 2$, то есть справедливо неравенство $\frac{2-a}{5+a} > 0$. Получаем необходимое условие для значения параметра: $a \in (-5; 2)$.

4) Остается доказать, что любое значение a из промежутка (–5; 2) удовлетворяет условию задачи. Действительно, если $a \in (-5; 2)$, то $a + 5 > 0$, поэтому

$$\frac{3^x + 3^{-x} - a}{a + 5} > 0, \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} - a > 0 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} > a.$$

Заметим, что $3^x + 3^{-x} \ge 2$ при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому

$$3^x + 3^{-x} \ge 2 > a \text{ при } a \in (-5; 2).$$

Таким образом, любое значение $a \in (-5; 2)$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in (-5; 2)$**.**

Пример 5. При каких *x* для любого *y* существует *z* такое, что

$$Sin(x + y + z) \ = \ Cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) * \left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{\left|y - \frac{3}{2}\right|}{2Cosx}? \tag{12}$$

Решение.

1) Уравнение содержит три переменных. Предположим, что требуемое значение *x* найдено. Тогда уравнение (12) должно иметь решения *z* при любом конкретном значении *y*. Рассмотрим значения *y*, при которых одно из слагаемых в левой части уравнения (12) обращается в ноль: $y \ = \ -\frac{1}{2}$ и $y \ = \ \frac{3}{2}$.

При $y \ = \ -\frac{1}{2}$ уравнение (12) примет вид

$$Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right) \ = \ \frac{1}{Cosx}, \tag{13}$$

а при $y \ = \ \frac{3}{2}$ уравнение (12) примет вид

$$Sin\left(x + \frac{1}{2} + z\right) \ = \ 2Cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right). \tag{14}$$

2) Простого решения уравнения (14) не видно. Рассмотрим подробнее уравнение (13). Заметим, что его левая часть принимает значения из промежутка $[-1; 1]$, а правая – $(-\infty;\ -1] \cup [1; +\infty)$, поэтому уравнение (13) равносильно совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right) \ = \ 1 \\ Cosx \ = \ 1 \end{cases} \vee \begin{cases} Sin\left(x - \frac{1}{2} + z\right) \ = \ -1 \\ Cosx \ = \ -1 \end{cases},$$

из которой получим возможные значения $x \ = \ \pi n$.

3) Необходима проверка найденных значений переменной x.

При $x = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) уравнение (12) примет вид

$$2Sin(y + z) = \left|y + \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{3}{2}\right|. \tag{15}$$

Левая часть (15) принимает значения $[-2; 2]$, а правая часть не меньше 2, поэтому

$$\begin{cases} 2Sin(y + z) = 2 \\ \left|y + \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{3}{2}\right| = 2 \end{cases},$$

второе уравнение которой справедливо только при $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Итак, $x = 2\pi n$ условию задачи не удовлетворяют.

При $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) уравнение (12) примет вид

$$2\,Sin(y + z) = \left|y - \frac{3}{2}\right| - \left|y + \frac{1}{2}\right|. \tag{16}$$

Правая часть (16) при $y \in \mathbb{R}$ принимает значения из промежутка $[-2; 2]$, поэтому при любом фиксированном значении y уравнение (16) имеет решения.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Список литературы

1. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. Киев : Текст ; ОКО, 1992. 290 с.

2. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Использование различных методов решения задач с параметром на едином государственном экзамене по математике // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2016. № 8. С. 139–160. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id = 26935738 (дата обращения: 14.03.2021).

3. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В.* Обучение школьников различным способам решения задач с параметрами // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2017. № V7. С. 62–71. URL: http://e–koncept.ru/2017/170161.htm (дата обращения: 26.02.2021).

4. *Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А.* Замена переменной в задачах с параметрами // Концепт : науч.-метод. электрон. журнал. 2018. № V7. С. 82–92. URL: http://e–koncept.ru/2018/186066.htm (дата обращения: 26.02.2021).

5. *Рыжик В. И.* 25 000 уроков математики : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1993. 240 с. : ил.

Solving problems with a parameter by the method of allocating the necessary conditions for the parameter

M. Yu. Zdorovenko[1], M. N. Levin[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: zdorovenko.s@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

Abstract. The article offers methodological recommendations for conducting classes on an elective course in mathematics in grades 8–11 on the topic "Solving problems with parameters".

The method of allocating the necessary conditions to a parameter for solving the most logically complex problems is considered. The formulation of such problems contains the conditions "for all values of the variable x from some set M, conditions A are satisfied" or "there exists x that condition A is satisfied for any y". The proposed tasks and analyzed examples are aimed at forming a general mathematical culture of students, developing their research skills and the ability to think logically, as well as generalize and apply the knowledge gained to solve mathematical problems.

The presented work will be of interest to students of grades 8–11, mathematics teachers working in high school, students of mathematical specialties of pedagogical universities, methodologists.

Keywords: problem with parameters, necessary condition, mathematical education.

References

1. *Gornshtejn P. I., Polonskij V. B., Yakir M. S. Zadachi s parametrami* [Problems with parameters]. Kiev. Text; OKO. 1992. 290 p.

2. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A., Krutihina M. V. Ispol'zovanie razlichnyh metodov resheniya zadach s parametrom na edinom gosudarstvennom ekzamene po matematike* [The use of various methods for solving problems with a parameter on the unified state exam in mathematics] // *Koncept : nauch.-metod. elektron. zhurnal* – Concept : scient. method. electron. journal. 2016. No. 8. Pp. 139–160. Available at: http://elibrary.ru/item.asp?id = 26935738 (date accessed: 14.03.2021).

3. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A., Krutihina M. V. Obuchenie shkol'nikov razlichnym sposobam resheniya zadach s parametrami* [Teaching schoolchildren various ways to solve problems with parameters] // *Koncept : nauch.-metod.*

elektron. zhurnal – Concept : scient. method. electron. journal. 2017. No. V7. Pp. 62–71. Available at: http://e-koncept.ru/2017/170161.htm (date accessed: 26.02.2021).

4. *Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A. Zamena peremennoj v zadachah s parametrami* [Variable replacement in problems with parameters] // *Koncept : nauch.-metod. elektron. zhurnal* – Concept : scient. method. electron. journal. 2018. No. V7. Pp. 82–92. Available at: http://e-koncept.ru/2018/186066.htm (date accessed: 26.02.2021).

5. *Ryzhik V. I. 25 000 urokov matematiki : kn. dlya uchitelya* [25,000 math lessons : book for teachers]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1993. 240 p. : ill.

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 2 (21) (2021)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964