УДК 517.956.4 DOI 10.25730/VSU.0536.22.010

О линеаризации параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений

О. Л. Бозиев
кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления, Кабардино-Балкарский научный центр РАН. Россия, г. Нальчик.
ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Аннотация. Описывается метод линеаризации одномерных неоднородных параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части. Интегральная нагрузка здесь представляет собой некоторую функцию $a(s)$, где s – интеграл по пространственной переменной от квадрата модуля производной решения уравнения по x. Рассматриваются неоднородные начальные и однородные граничные условия. В случае линейной функции $a(s)$, а также в двух случаях, когда $a(s)$ не линейна, установлены априорные оценки производной решения поставленной задачи в пространстве L_2. Правые части этих оценок используются для линеаризации соответствующих уравнений. Приводятся примеры линеаризации нагруженных уравнений данным методом.

Ключевые слова: параболическое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация.

Введение

Моделирование ряда физических процессов приводит к начально-краевым задачам для уравнений параболического типа, содержащих в главной части интегральную нагрузку, под которой понимается некоторая функция, содержащая интеграл от искомого решения или его производной. Такими являются, например, уравнения видов

$$u_t - a(s)u_{xx} = 0,\ u_t - \left(a(s)u_x\right)_x = f(x,t),$$
$$s = \int_\Omega \left|u_x\right|^2 dx,\ \Omega = [0,l],$$

исследовавшиеся, в частности, в работах [1; 4; 5].

В данном и некоторых других нагруженных уравнениях функция s представляет собой норму искомого решения или его производной в некотором лебеговом пространстве. Это приводит к мысли о возможности использования априорной оценки решения задачи или его производной в соответствующей норме для линеаризации исходного уравнения. Такой подход был использован в [2; 3] и некоторых других работах автора. Однако в этих работах интегральная нагрузка содержалась в младших членах уравнений.

Целью настоящей работы является установление априорных оценок второй смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного параболического уравнения с интегральной нагрузкой в главной части. Рассматривается линейный случай $a(s) = s$, а также нелинейные случаи $a(s) = \sqrt{s}$ и $a(s) = s^{-1}$. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t, определяемой посредством правой части априорной оценки.

1. $a(s) = s$

Рассмотрим уравнение с линейной нагрузкой

$$u_t - \left\|u_x\right\|_{2,\Omega}^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

в котором

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega} = \int\limits_\Omega |u_x|^2 dx = s,\ \Omega = [0,l],$$

при условиях

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть функции $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_x, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|^4_{2,\Omega}$ ограничена константой, зависящей только от *t*.

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) с u_t:

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|^2_{2,\Omega}(u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Для его отдельных членов имеем

$$(u_t, u_t) = \int\limits_\Omega u_t^2\, dx = \int\limits_\Omega |u_t|^2\, dx,\ (f,u_t) = \int\limits_\Omega f u_t dx,$$

$$-(u_{xx}, u_t) = -\int\limits_\Omega u_{xx}u_t dx = -\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t)dx + \int\limits_\Omega u_x u_{tx} dx = -(u_x u_t)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u_x|^2\, dx.$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|^2_{2,\Omega}(u_{xx}, u_t) = \|u_x\|^2_{2,\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2_{2,\Omega} = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2_{2,\Omega}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u_x\|^4_{2,\Omega},$$

что приводит скалярное произведение к виду

$$\|u_t\|^2_{2,\Omega} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u_x\|^4_{2,\Omega} = \int\limits_\Omega f u_t dx.$$

Интегрируя последнее, получаем

$$4\int\limits_0^t \|u_t\|^2_{2,\Omega}\, d\tau + \|u_x\|^4_{2,\Omega} = 4\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f u_t dx d\tau + \|u_x(x,0)\|^4_{2,\Omega}. \tag{3}$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с ε, в котором затем положим $\varepsilon = 1/2$:

$$4\int\limits_\Omega f u_t dx \le 4\int\limits_\Omega |f u_t|\, dx \le 2\left(\varepsilon\int\limits_\Omega f^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega u_t^2 dx\right) = \int\limits_\Omega f^2 dx + 4\int\limits_\Omega u_t^2 dx.$$

Это позволяет от (3) перейти к неравенству

$$\|u_x\|^4_{2,\Omega} \le \int\limits_0^t \|f\|^2_{2,\Omega}\, d\tau + \|\varphi_x\|^4_{2,\Omega}.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|u_x\|^4_{2,\Omega} \le K(t), \tag{4}$$

с правой частью

$$K(t) = \int\limits_0^t \|f\|^2_{2,\Omega}\, d\tau + \|\varphi_x\|^4_{2,\Omega},$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Из (4) следует, что

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega} \le \sqrt{K(t)}.$$

Выбирая равенство в данном выражении, подставим его правую часть в уравнение (1) и получим линейное уравнение

$$u_t - \sqrt{K(t)}u_{xx} = f(x,t). \tag{5}$$

Пример 1. Пусть в условиях (2)

$$l = 1,\ \varphi(x) = x(x-1),\ f(x,t) = xt. \tag{6}$$

Тогда

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^4=\left(\int_0^1(2x-1)^2dx\right)^2=\frac{1}{9},\ \int_0^t\|f\|_{2,\Omega}^2d\tau=\int_0^t\int_0^1\tau^2x^2dxd\tau=\frac{1}{3}\int_0^t\tau^2d\tau=\frac{t^3}{9},K(t)=\frac{1}{9}\left(t^3+1\right).$$

Подставляя в (5), получаем линеаризованное уравнение

$$u_t-\frac{1}{3}\sqrt{t^3+1}u_{xx}=xt.$$

2. $a(s)=\sqrt{s}$

Рассмотрим уравнение с нелинейной нагрузкой

$$u_t-\|u_x\|_{2,\Omega}u_{xx}=f(x,t) \tag{7}$$

при условиях (2).

Теорема 2. Пусть функции $u\in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t\in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_x, f\in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^3$ ограничена константой, зависящей только от *t*.

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) с u_t:

$$(u_t,u_t)-\|u_x\|_{2,\Omega}(u_{xx},u_t)=(f,u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}(u_{xx},u_t)=\|u_x\|_{2,\Omega}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_{2,\Omega}^2=\|u_x\|_{2,\Omega}^2\frac{d}{dt}\|u_x\|_{2,\Omega}=\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|u_x\|_{2,\Omega}^3,$$

что приводит к соотношению

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2+\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|u_x\|_{2,\Omega}^3=\int_\Omega fu_tdx.$$

Интегрирование последнего дает

$$3\int_0^t\|u_t\|_{2,\Omega}^2d\tau+\|u_x\|_{2,\Omega}^3=3\int_0^t\int_\Omega fu_tdxd\tau+\|u_x(x,0)\|_{2,\Omega}^3. \tag{8}$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с ε, в котором затем положим $\varepsilon=1/2$:

$$3\int_\Omega fu_tdx\le 3\int_\Omega|fu_t|dx\le\frac{3}{2}\left(\varepsilon\int_\Omega f^2dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_t^2dx\right)=\frac{3}{4}\int_\Omega f^2dx+3\int_\Omega u_t^2dx.$$

Это позволяет от (8) перейти к неравенству

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3\le 0,75\int_0^t\|f\|_{2,\Omega}^2d\tau+\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3\le K(t), \tag{9}$$

с правой частью

$$K(t)=0,75\int_0^t\|f\|_{2,\Omega}^2d\tau+\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3,$$

выполняющаяся для всех $t\in[0,T]$. Теорема 2 доказана.

Из (9) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega}\le\sqrt[3]{K(t)}.$$

Выбор равенства в данном выражении позволяет записать уравнение (1) в линеаризованном виде

$$u_t-\sqrt[3]{K(t)}u_{xx}=f(x,t). \tag{10}$$

Пример 2. Пусть имеет место (6). В этом случае

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3=\left(\int_0^1(2x-1)^2dx\right)^{\frac{3}{2}}\approx 0,19245,\ \int_0^t\|f\|_{2,\Omega}^2d\tau=\frac{t^3}{9},K(t)\approx 0,08333t^3+0,19245.$$

Подстановка в (10) приводит к линейному уравнению

$$u_t - \sqrt[3]{0,08333t^3 + 0,19245}u_{xx} = xt.$$

3. $a(s) = s^{-1}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение с нелинейной интегральной нагрузкой

$$u_t - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} u_{xx} = f(x,t). \tag{11}$$

Теорема 3. Пусть функции $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (6), (2), $\|u_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$. Пусть, кроме того, $\varphi_x, f \in L_2(\Omega), \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от *t*.

Доказательство. Заметим, что в скалярном произведении (11) и функции u_t

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2}(u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

имеет место

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^{-2}(u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{d}{dt}\ln\|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет записать уравнение

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega f u_t dx,$$

интегрируя которое получим

$$2\int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \ln\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = 2\int_0^t\int_\Omega f u_t dx d\tau + \ln\|u_x(x,0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши, что дает неравенство

$$\ln\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \ln\|\varphi_x(x)\|_{2,\Omega}^2,$$

которое, в свою очередь, приводит к оценке

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \le K(t), \tag{12}$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ при

$$K(t) = \|\varphi_x(x)\|_{2,\Omega}^2 e^{\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau}.$$

Теорема 3 доказана.

Выбирая в (12) верхнюю границу оценки и подставляя в (11), получаем

$$u_t - K^{-1}(t)u_{xx} = f(x,t). \tag{13}$$

Пример 3. Пусть имеет место (6). В этом случае

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{3}, \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, K(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{t^3}{9}}.$$

Подстановка в (13) приводит к линейному уравнению

$$u_t - 3e^{-\frac{1}{9}t^3}u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки (4), (9) и (12) производных решений второй смешанной задачи для одномерных неоднородных уравнений с интегральной нагрузкой $a(s) = s^p$ в главной части при p=1, 0,5 и -1 соответственно. Во всех случаях граничные условия являются однородными. Метод линеаризации с использованием априорных оценок состоит в замене интегральной нагрузки в уравнении функциями от *t*, полученными из правых частей соответствующих оценок. Данный способ линеаризации в отличие от других позволяет переходить от исходного уравнения к линейному с сохранением в основном физического смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальном и граничных условиях, будем считать приближенным решением нагруженного уравнения. Это решение может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Список литературы

1. *Бернштейн С. Н.* Об одном классе функциональных уравнений : собрание сочинений. М. : Изд-во Академии Наук СССР. 1960. Т. III. С. 323–331.

2. *Бозиев О. Л.* О приближенном методе решения нагруженных уравнений гиперболического и параболического типов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. № 2 (100). С. 5–10.

3. *Бозиев О. Л.* Об одном методе приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2 (21). С. 9–12.

4. *Джангвеладзе Т. А.* Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 41–46.

5. *Лаптев Г. И.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

On the linearization of parabolic equations with integral load in the main part by a priori estimation of their solutions

O. L. Bosiev

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Kabardino-Balkarian State University n. a. H. M. Berbekov; Senior Researcher at the Institute of Informatics and Regional Management Problems, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Russia, Nalchik.

ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Abstract. A method of linearization of one-dimensional inhomogeneous parabolic equations with an integral load in the main part is described. The integral load here is some function *a(s)*, where *s* is the integral over the spatial variable from the square of the modulus of the derivative of the solution of the equation in *x*. Inhomogeneous initial and homogeneous boundary conditions are considered. In the case of a linear function *a(s)*, as well as in two cases when *a(s)* is not linear, a priori estimates of the derivative of the solution of the problem in the L_2 space are established. The right-hand sides of these estimates are used to linearize the corresponding equations. Examples of linearization of loaded equations by this method are given.

Keywords: parabolic equation, integral load, a priori estimation, linearization.

References

1. *Bernshtejn S. N. Ob odnom klasse funkcional'nyh uravnenij : sobranie sochinenij* [On one class of functional equations : collected works]. M. Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1960. Vol. III. Pp. 323–331.

2. *Boziev O. L. O priblizhennom metode reshenija nagruzhennyh uravnenij giperbolicheskogo i parabolicheskogo tipov* [On an approximate method for solving loaded equations of hyperbolic and parabolic types] // *Izvestija Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* – News of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2021. No. 2 (100). Pp. 5–10.

3. *Boziev O. L. Ob odnom metode priblizhennogo reshenija parabolicheskogo uravnenija s integral'noj nagruzkoj* [On one method of approximate solution of a parabolic equation with an integral load] // *Matematicheskij vestnik Vjatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical herald of Vyatka State University. 2021. No. 2 (21). Pp. 9–12.

4. *Dzhangveladze T. A. Ob odnom nelinejnom integro-differencial'nom uravnenii parabolicheskogo tipa* [On one nonlinear integro-differential equation of parabolic type] // *Differencial'nye uravnenija* – Differential equations. 1985. Vol. 21. No. 1. Pp. 41–46.

5. *Laptev G. I. Kvazilinejnye parabolicheskie uravnenija vtorogo porjadka s integral'nymi kojefficientami* [Quasilinear parabolic equations of the second order with integral coefficients] // *DAN SSSR* – DAN USSR. 1987. Vol. 293. No. 2. Pp. 306–309.