УДК 512.556 DOI 10.25730/VSU.0536.22.011

Полукольца непрерывных функций на топологических пространствах

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Статья представляет собой введение в теорию колец и полуколец непрерывных действительнозначных функций, дающее возможность читателю получить начальное представление по существу предмета. Излагаются элементы теории колец непрерывных функций и общей топологии, необходимые для изучения функциональной алгебры. Рассматриваются различные алгебраические и функционально-топологические характеризации F-пространств и P-пространств. Сформулированы исследовательские задачи по теории полуколец непрерывных функций.

Ключевые слова: кольцо непрерывных функций, полукольцо непрерывных функций, F-пространство, P-пространство.

Введение

Статья посвящена теории колец и полуколец непрерывных числовых функций на топологических пространствах – теории, представляющей собой важный раздел и направление развития функциональной алгебры. Она может служить введением в полукольца непрерывных функций для изучающих современную математику и заинтересовавшихся данным ее направлением. Представленный материал дает пищу для самостоятельных размышлений и исследований в области функциональной алгебры.

Кольца $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций уже стали классическим объектом в современной математике. Начало изучению колец $C(X)$ положили работы С. Банаха, М. Стоуна [36], И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [22] 1930-х гг. Большую роль в развитии теории колец непрерывных функций сыграли статьи Э. Хьюитта [33], Л. Гиллмана и М. Хенриксена [29; 30].

Первым обобщающим трудом стала монография Л. Гиллмана и М. Джерисона «Кольца непрерывных функций», вышедшая из печати в 1960 г.; второе издание [31] опубликовано в 1976 г. Дальнейшую информацию о кольцах непрерывных функций можно найти в обзорных статьях [10; 11; 33; 37; 38], а также в книгах [12; 13]. Общей теории колец непрерывных функций посвящены работы [35; 38].

Классическая теория колец непрерывных функций зиждется на теории множеств, общей топологии, абстрактной алгебре (кольца, полугруппы, решетки), специфике числовой системы **R** действительных (вещественных) чисел, находится на стыке с функциональным анализом, топологической алгеброй, теорией пучков. Как подчеркнуто в [18, с. 12–13], «основой возникновения плодотворной теории колец $C(X)$ стало успешное внедрение действительных чисел в общую топологию – в теорию тихоновских пространств (большая лемма Урысона, вложение в тихоновские кубы, компактификация βX, метризация)». В своем Предисловии к книге [2, с. 7–8] П. С. Александров отмечал: «На этой почве возникла теория колец непрерывных действительных функций, определенных на топологических пространствах, – теория, являющаяся одновременно и плодотворным методом, и обширной областью исследований, в которой общая топология соприкасается с функциональным анализом и топологической алгеброй».

Система **R** является уникальным математическим объектом, в котором естественным образом переплетаются и взаимодействуют фундаментальные типы математических структур: алгебраическая структура (поле), порядковая структура (линейно упорядоченное множество), топологическая структура (интервальная топология, метрика). Отметим, что система **R** имеет следующие абстрактные характеризации (с точностью до соответствующего изоморфизма):

R – непрерывное линейно упорядоченное поле;

R – связное локально компактное вещественное поле (теорема Понтрягина).

Полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций и полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций возникли на основе теории колец $C(X)$ около 30 лет тому назад. Основополагающей явилась статья 1998 г. [6]. Некоторые другие классы полуколец непрерывных функций рассматривались в [5; 19; 20]. Развитие теории полуколец непрерывных функций подытожено в двухтомной монографии [18; 19] 2016 г. и обзорной статье [21].

Главные направления в исследовании колец $C(X)$:

I. Установление связей между топологическими свойствами топологических пространств X и алгебраическими свойствами колец $C(X)$.

В частности:

• решение проблемы определяемости пространств X из различных классов К топологических пространств кольцом $C(X)$ или связанными с ним алгебраическими системами;

• открытие и определение двойственностей между той или иной категорией К топологических пространств X с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорией соответствующих колец $C(X)$ и их гомоморфизмов.

II. Нахождение алгебраических свойств, общих всем кольцам $C(X)$.

В частности:

• получение алгебраических характеризаций колец, изоморфных кольцам вида $C(X)$, т. е. абстрактное описание класса колец $C(X)$.

Аналогичные направления и задачи выделяются и главенствуют в теории полуколец непрерывных числовых функций: полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$, полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$.

Отметим, что кольца, полукольца и полуполя непрерывных числовых функций могут рассматриваться с той или иной топологией (поточечной сходимости, компактно-открытой, sup-нормой), превращающей их в тополого-алгебраические объекты.

В настоящей работе сформулированы исходные определения и предварительные результаты, необходимые для понимания ее содержания, приведены важные понятия и факты, касающиеся колец, полуколец и полуполей непрерывных действительнозначных функций на топологических пространствах.

Статья преследует следующие цели:

• мотивированное краткое введение в теорию колец и полуколец непрерывных действительнозначных функций, дающее возможность студенту-математику погрузиться в предмет;

• сжатое изложение совокупности алгебраических и функционально-топологических характеризаций F-пространств и их важнейших классов: P-пространств, экстремально несвязных пространств, базисно несвязных пространств и др.;

• постановка новых исследовательских задач по теории полуколец непрерывных функций.

Предполагаются известными исходные теоретико-множественные понятия и обозначения (имеются в учебных пособиях [1; 17; 25]).

В процессе изучения предлагаемой тематики полезно ознакомиться с некоторыми свойствами абстрактных колец, полуколец, решеток, информацию о которых можно найти в книгах [4; 12; 13; 17; 20; 23; 26; 27]. Весь требуемый материал по общей топологии содержится в трудах [1–3; 17; 24; 25; 31].

Статья имеет следующую структуру.

1. Основные понятия.
2. Предварительные сведения.
3. F-пространства и их характеризации.
4. P-пространства и другие классы пространств.
5. Задачи для исследований.

Библиография включает 38 источников.

Отметим, что параграфы 1–4 разбиты на отдельные пункты с двойной нумерацией, а теоремы, предложения, следствия, примеры и замечания имеют свои сквозные нумерации.

В заключении Введения перечислим имена наиболее известных математиков, так или иначе причастных к исследованию колец функций.

Персоналии:

Александров Павел Сергеевич (1896–1982) – выдающийся русский советский математик, тополог, академик, основатель и руководитель московской топологической школы.

Банах Стефан (1892–1945) – выдающийся польский математик, один из создателей современного функционального анализа, основатель львовской математической школы.

Гельфанд Израиль Моисеевич (1913–2009) – российский математик, академик, выдающийся специалист в области функционального анализа.

Гиллман Леонард (1917–2009) – американский математик, один из создателей теории колец непрерывных функций.

Джерисон Мейер (1922–1995) – американский математик, специалист по функциональному анализу и теории колец.

Зариский Оскар (1899–1986) – американский математик, крупный специалист по алгебраической топологии.

Исбелл Джон (1930–2005) – американский математик, тополог.

Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик, создатель теории множеств.

Капланский Ирвинг (1917–2006) – канадский и американский математик, известный алгебраист.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – выдающийся русский советский математик, академик, создатель целого ряда математических теорий.

Куратовский Казимеж (1896–1980) – выдающийся польский математик, один из основоположников современной топологии, глава польской топологической школы.

Понтрягин Лев Семенович (1908–1988) – выдающийся русский советский математик, академик, ведущий ученый по топологической алгебре, известный специалист в области приложений математики.

Стоун Маршалл (1903–1989) – американский математик, видный специалист в области алгебры, общей топологии (именно он, в 1937 г., ввел понятие *general topology*), функционального анализа, создатель современной теории булевых алгебр.

Титце Генрих (1880–1964) – австрийский математик, специалист по топологии и теории групп.

Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) – выдающийся русский советский математик, академик, тополог, видный специалист в области вычислительной математики.

Улам Станислав (1902–1984) – польский и американский математик, известный специалист по теории множеств.

Урысон Павел Самуилович (1898–1924) – выдающийся российский математик, тополог, вместе с П. С. Александровым явился создателем московской топологической школы.

Френкель Абрахам (1891–1965) – немецкий и израильский математик, известный специалист по основаниям математики, один из авторов классической аксиоматики теории множеств – системы Цермело – Френкеля.

Фреше Морис (1878–1973) – французский математик, известный специалист по топологии и функциональному анализу, определил понятие метрического пространства (1906).

Хаусдорф Феликс (1868–1942) – немецкий математик, один из основоположников современной топологии, определил понятие (хаусдорфова) топологического пространства (1914).

Хенриксен Мелвин (1927–2009) – американский математик, известный специалист по функциональному анализу и решеточно упорядоченным кольцам.

Хьюитт Эдвин (1920–1999) – американский математик, крупный специалист по функциональному анализу и абстрактному гармоническому анализу.

Цермело Эрнст (1871–1953) – немецкий математик, создатель аксиоматической теории множеств (1904–1908), сформулировал аксиому выбора и на ее основе доказал теорему о вполне упорядочении любого множества.

Цорн Макс (1906–1993) – американский математик немецкого происхождения, соавтор леммы Куратовского – Цорна (1922, 1935).

Чех Эдуард (1893–1960) – известный чешский математик, тополог.

Энгелькинг Рышард (1935 г. р.) – польский математик, известный специалист по общей топологии и теории размерности.

1. Основные понятия

1.1. Исследуются три алгебраических объекта (полукольца) над произвольным топологическим пространством X, имеющие функционально-топологическую природу:

• кольцо $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций на X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций

$$\forall f, g\in C(X)\ \forall x\in X\ ((f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (fg)(x)=f(x)g(x));$$

• полукольцо $C^{+}(X)=C(X, \mathbf{R}^{+})$ всех непрерывных неотрицательных функций на X со значениями в топологическом полуполе с нулем $\mathbf{R}^{+}$ неотрицательных действительных чисел;

• полуполе $U(X)=C(X, \mathbf{P})$ всех непрерывных положительных функций на X со значениями в топологическом полуполе $\mathbf{P}$ положительных действительных чисел.

Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^{+}(X)$, так и полуполя $U(X)$. Множество $C^{+}(X)$ равно множеству всевозможных квадратов элементов кольца $C(X)$, т. е. $C^{+}(X)=\{f^2\colon f\in C(X)\}$. Полуполе $U(X)$ служит мультипликативной группой полукольца $C^{+}(X)$, т. е. совпадает с множеством всех его обратимых элементов.

Кроме того, будем рассматривать аддитивно идемпотентные полукольцо $C^{\vee}(X)$ и полуполе $U^{\vee}(X)$, получаемые из полукольца $C^{+}(X)$ и полуполя $U(X)$ заменой аддитивной операции + на операцию $\vee$ взятия max двух функций, с сохранением операции умножения.

1.2. Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения + и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо $\langle S, +, \cdot\rangle$, обозначаемое просто S, называется:

коммутативным, если на S выполняется тождество $xy=yx$;

(*аддитивно*) *идемпотентным*, если S удовлетворяет тождеству $x+x=x$;

полукольцом с нулем 0, если в S существует элемент 0, нейтральный по сложению ($\forall s\in S\ s+0=s$) и поглощающий по умножению ($\forall s\in S\ 0\cdot s=0=s\cdot 0$);

полукольцом с единицей 1, если S обладает элементом 1, нейтральным по умножению;

кольцом, если $\langle S, +\rangle$ является (коммутативной) группой;

полуполем, если $\langle S, \cdot\rangle$ – коммутативная группа;

полуполем с нулем, если S имеет нуль 0 и $\langle S\setminus\{0\}, +, \cdot\rangle$ – полуполе.

Мы предполагаем известными такие общеалгебраические понятия, как идеал кольца (полукольца), подполукольцо, конгруэнция на полукольце, фактор-полукольцо, гомоморфизм (изоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, эндоморфизм, автоморфизм) полуколец и т. п. [см., например, 19; 31].

1.3. Относительно поточечного порядка $\leq$ кольцо $C(X)$ становится *решеточно упорядоченным кольцом*. Для произвольных функций $f, g\in C(X)$

$$f\leq g \text{ означает } f(x)\leq g(x) \text{ для всех } x\in X.$$

Получаем *дистрибутивную решетку* $\langle C(X), \leq\rangle$, в которой $\sup\{f, g\}=f\vee g$ и $\inf\{f, g\}=f\wedge g$; дистрибутивность означает, что операции $\wedge$ и $\vee$ дистрибутивны друг относительно друга. Имеем также решеточно упорядоченное полукольцо $C^+(X)$ с наименьшим элементом функцией-константой нуль 0 и решеточно упорядоченное полуполе $U(X)$.

1.4. Приведем следующие важные обозначения.

Пусть $f\in C(X)$. Тогда:

$Z(f)=\{x\in X: f(x)=0\}=f^{-1}(\{0\})$ – *нуль-множество* на X (функции f);

$\operatorname{coz} f=X\setminus Z(f)=\{x\in X: f(x)\neq 0\}$ – *конуль-множество* на X (функции f);

$N(f)=\{x\in X: f(x)<0\}$ и $P(f)=\{x\in X: f(x)>0\}$;

$|f|=f\vee(-f)\in C^+(X)$ – *модуль* функции f;

$f^+=f\vee 0$ и $f^-=(-f)\vee 0$ – функции из $C^+(X)$.

Через $Z(X)$ обозначается множество всех нуль-множеств на топологическом пространстве X, т. е. $Z(X)=\{Z(f): f\in C(X)\}$. Относительно отношения включению $\subseteq$ множеств $Z(X)$ является дистрибутивной решеткой с наименьшим элементом – пустым нуль-множеством $\varnothing=Z(1)$, и наибольшим элементом – самим пространством $X=Z(0)$. Действительно,

$$Z(f)\cup Z(g)=Z(fg),\ Z(f)\cap Z(g)=Z(f^2+g^2) \text{ для любых } f, g\in C(X).$$

1.5. Если $\varnothing\neq A\subseteq C(X)$, то через $\operatorname{Ann} A=\{f\in C(X): \forall g\in A\ fg=0\}$ обозначается *аннулятор* множества A. Множество $\operatorname{Ann} A=\operatorname{Ann} I$, I – идеал кольца $C(X)$, порожденный множеством A, является идеалом в $C(X)$ и называется *аннуляторным идеалом*.

Идеал J кольца $C(X)$ называется:

собственным, если $J\neq C(X)$;

простым, если J – собственный и $fg\in J$ влечет $f\in J$ или $g\in J$ для любых $f, g\in C(X)$;

максимальным, если J – собственный и в $C(X)$ нет других собственных идеалов, содержащих J;

выпуклым, если $f\in C(X)$, $g\in J$, $0\leq f\leq g$ влекут $f\in J$;

абсолютно выпуклым, если $f\in C(X)$, $g\in J$, $|f|\leq|g|$ влекут $f\in J$;

z-идеалом, если $f\in C(X)$, $g\in J$, $Z(f)=Z(g)$ влекут $f\in J$;

чистым, если $\forall f\in J\ \exists g\in J\ fg=f$.

Для любого простого идеала P кольца $C(X)$ определяется идеал

$$O_P=\{f\in C(X): \exists g\in C(X)\setminus P\ fg=0\}=\{f\in C(X): \rceil(\operatorname{Ann} f\subseteq P)\}.$$

Для полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ понятия собственного, простого, максимального, чистого, аннуляторного идеалов, z-идеала, идеала O_P, простого и максимального спектров определяются точно так же, как и для кольца $C(X)$.

Идеал J полукольца $C^+(X)$ называется:

полустрогим, если $f\in C^+(X)$, $f+g$, $g\in J$ влекут $f\in J$;

строгим, если $f, g\in C^+(X)$, $f+g\in J$ влекут $f\in J$ (это аналог выпуклости).

Для полуколец $C^\vee(X)$ понятия полустрогого и строгого идеалов равносильны. В любом кольце все идеалы полустрогие, а строгим будет только несобственный идеал – само кольцо.

Множество $\operatorname{Id} C(X)$ всех идеалов кольца $C(X)$ с отношением включения $\subseteq$ будет полной модулярной решеткой. Аналогично получаются решетки идеалов $\operatorname{Id} C^+(X)$ и $\operatorname{Id} C^\vee(X)$ полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$.

Множество Con $C^+(X)$ всех конгруэнций на полукольце $C^+(X)$ образует полную решетку относительно включения конгруэнций. Аналогично возникают решетки конгруэнций Con $C^\vee(X)$, Con $U(X)$ и Con $U^\vee(X)$ на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$ соответственно. Заметим, что решетки Id $C(X)$ и Con $C(X)$ канонически изоморфны.

1.6. Понятие топологического пространства предполагается известным.

Пусть X – произвольное топологическое пространство и Y – некоторое его подмножество. Через Y^0 обозначается внутренность множества Y (в X), а через $[Y]$ – его замыкание.

Замыкание открытого множества (внутренность замкнутого множества) топологического пространства X называется *канонически замкнутым множеством* (*канонически открытым множеством*). Легко видеть, что подмножество Y пространства X канонически замкнуто (канонически открыто) тогда и только тогда, когда $Y=[Y^0]$ (соответственно, $Y=[Y]^0$).

Топологическое X пространство называется:

T_0-*пространством*, если любые две его различные точки x и y *отделяются* некоторым открытым множеством U: $x\in U, y\notin U$ или $x\notin U, y\in U$ (Колмогоров);

T_1-*пространством*, если все его одноточечные множества замкнуты;

хаусдорфовым, если каждые две его различные точки содержатся в некоторых непересекающихся открытых множествах;

тихоновским (*хьюиттовским*), если X гомеоморфно некоторому подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени числовой прямой $\mathbf{R}$;

нормальным, если X есть T_1-пространство и каждые два его непересекающиеся замкнутые множества содержатся в некоторых непересекающихся открытых множествах;

совершенно нормальным, если X есть T_1-пространство и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует такая функция $f\in C(X)$, что $Z(f)=A$ и $Z(1-f)=B$;

компактным, если любое его покрытие открытыми множествами (открытое покрытие) содержит конечное подпокрытие;

компактом, если оно компактно и хаусдорфово;

псевдокомпактным, если оно тихоновское и все функции из $C(X)$ ограниченные, т. е. $C(X)=C^*(X)$ – подкольцо кольца $C(X)$, состоящее из ограниченных (непрерывных) функций;

нульмерным, если X есть T_1-пространство и каждое его открытое множество является объединением открыто-замкнутых множеств;

экстремально несвязным, если оно тихоновское и каждое его канонически замкнутое множество открыто;

базисно несвязным, если оно тихоновское и замыкание каждого коноль-множества на X открыто.

Подмножество Y топологического пространства X называется *C-расширяемым* (*C^*-расширяемым*), если любая функция из $C(Y)$ (соответственно, из $C^*(Y)$) продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

1.7. Множество всех простых (максимальных) идеалов кольца $C(X)$ обозначается Spec $C(X)$ и Max $C(X)$ соответственно. Имеем Max $C(X)\subseteq$Spec $C(X)$. Множество Spec $C(X)$ с топологией Стоуна – Зариского оказывается компактным T_0-пространством, называемым *простым спектром кольца* $C(X)$. При этом его подпространство Max $C(X)$ будет компактным T_1-пространством, называемым *максимальным спектром кольца* $C(X)$.

2. Предварительные сведения

2.1. Множества A и B топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если $f(A)=\{0\}$ и $f(B)=\{1\}$ для некоторой функции $f\in C(X)$; беря функцию $(f\vee 0)\wedge 1\in C(X)$, можно считать $f(X)\subseteq[0, 1]$.

Предложение 1. *Два непересекающиеся множества топологического пространства функционально отделимы тогда и только тогда, когда они содержатся в непересекающихся нуль-множествах.*

Тихоновость пространства X эквивалентна тому, что X есть T_1-пространство и любые замкнутое множество $B\subset X$ и точка $p\in X\setminus B$, т. е. одноточечное множество $\{p\}$, функционально отделимы. Хьюиттовость тихоновского пространства X равносильна тому, что любой $\mathbf{R}$-*идеал* M кольца $C(X)$, т. е. такой, фактор-кольцо $C(X)/M$ по которому изоморфно полю $\mathbf{R}$, является *фиксированным максимальным идеалом*

$$M=M_x=\{f\in C(X)\colon f(x)=0\} \text{ для подходящей точки } x\in X.$$

Предложение 2. *Для любой функции $f\in C(X)$ верны равенства:*

1) $f=f^+-f^-$;

2) $|f|=f^++f^-$;

3) $f^+\cdot f^-=0$;

4) $\operatorname{coz} f=N(f)\cup P(f)$;

5) $N(f)=\operatorname{coz} f^-$ и $P(f)=\operatorname{coz} f^+$.

Предложение 3. *Кольцо $C(X)$ обладает следующими свойствами делимости ($\forall f, g\in C(X)$):*

1) если $Z(f)\subseteq Z^0(g)$, то g делится на f, т. е. $g\in fC(X)$;

2) если $|f|\leq g^2$, то f делится на g;

3) функции f и $(f\vee(-1))\wedge 1$ делятся друг на друга.

Предложение 4. *Решетка нуль-множеств $Z(X)$ замкнута относительно счетных пересечений, т. е. для всякой последовательности функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ из $C(X)$ существует такая функция $f\in C(X)$, что*

$$Z(f)=\cap_{n\in\mathbf{N}}Z(f_n)=Z(f_1)\cap Z(f_2)\cap\ldots\cap Z(f_n)\cap\ldots.$$

Предложение 5. *Семейства следующих открытых множеств образуют открытые базы произвольного тихоновского пространства: конуль-множества; канонически открытые множества; внутренности нуль-множеств.*

Предложение 6. *Для произвольного T_1-пространства X равносильны следующие условия:*

1) X – тихоновское пространство;

2) конуль-множества образуют открытую базу пространства X;

3) $Z(X)$ является замкнутой базой пространства X.

Замечание 1. Предложения 1–6 доказываются непосредственно. Предлагаем читателю доказать эти утверждения самостоятельно.

2.2. Для произвольного подмножества Z топологического пространства X определим в кольце $C(X)$ z-идеал

$$M_Z=\{f\in C(X)\colon Z\subseteq Z(f)\}=\cap\{M_x\colon x\in Z\}.$$

В частности, $M_\varnothing=C(X)$ и $M_X=\{0\}$. Также имеем $M_Z=M_{[Z]}$.

Предложение 7. *Пусть X – тихоновское пространство и A – идеал кольца $C(X)$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) идеал A является прямым слагаемым кольца $C(X)\Leftrightarrow A=eC(X)$ для некоторого идемпотента $e=e^2\in C(X)\Leftrightarrow A=M_Z$ для подходящего открыто-замкнутого множества Z в X;

2) A является аннуляторным идеалом кольца $C(X)\Leftrightarrow A=M_Z$ для подходящего канонически замкнутого множества Z в X.

Замечание 2. В предложении 7 $Z=\Delta A=\cap\{Z(f)\colon f\in A\}$, причем, $Z=Z(e)$ в 1). Замкнутое множество ΔA можно назвать нуль-множеством идеала A, а дополнение $X\setminus\Delta A=\cup\{\mathrm{coz}\, f\colon f\in A\}$ – конуль-множеством A.

2.3. Для любого топологического пространства X существует его *тихоновизация* – такое тихоновское пространство τX, что $C(\tau X)\equiv C(X)$. Каждое тихоновское пространство X имеет *расширение Хьюитта* νX и *компактификацию Стоуна – Чеха* βX. Пространство νX хьюиттовское, плотно содержит X и все функции из $C(X)$ продолжаются (однозначно) до функций из $C(\nu X)$. Компакт βX плотно содержит X и все ограниченные функции из $C(X)$ продолжаются (однозначно) до функций из $C(\beta X)$. Топологические пространства νX и βX определены однозначно, с точностью до гомеоморфизма над X. При этом $C(\nu X)\cong C(X)$, $C^+(\nu X)\cong C^+(X)$, $U(\nu X)\cong U(X)$ и $C(\beta X)\cong C^*(X)$.

Сформулируем несколько фундаментальных результатов о кольцах $C(X)$.

2.4. Теорема Гельфанда – Колмогорова (1939 [22]). *Для любого тихоновского пространства X максимальный спектр $MaxC(X)$ кольца $C(X)$ гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX пространства X. При этом максимальные идеалы кольца $C(X)$ исчерпываются идеалами вида*

$$M^p=\{f\in C(X)\colon p\in[Z(f)]_{\beta X}\} \text{ по всем точкам } p\in\beta X.$$

Здесь $[Z(f)]_{\beta X}$ – замыкание нуль-множества $Z(f)$ в компакте βX, и отображение $p\to M^p$, $p\in\beta X$, осуществляет искомый гомеоморфизм βX на $MaxC(X)$. Если $p\in X$, то получаем $M^p=M_p=\{f\in C(X)\colon f(p)=0\}$.

Следствие 1. *Каждый компакт X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, своим кольцом $C(X)$.*

2.5. Далее, если $\varphi\colon Y\to X$ есть непрерывное отображение топологических пространств Y и X, то отображение

$$\alpha_\varphi\colon C(X)\to C(Y),\ \alpha_\varphi(f)=f\circ\varphi \text{ для всех } f\in C(X),$$

будет кольцевым гомоморфизмом, сохраняющим функции-константы; гомоморфизм α_φ называется *индуцированным* посредством φ. Если Y – одноэлементное пространство, $Y=\{y\}$, $\varphi(y)=x\in X$, то $C(Y)\equiv\mathbf{R}$ и гомоморфизм $\alpha_x:=\alpha_\varphi$, $\alpha_x(f)=f(x)$ для любой функции $f\in C(X)$, называется *вычислением в точке x*.

Пример 1. Произвольный кольцевой гомоморфизм $\alpha\colon C(X)\to C(Y)$ сохраняет функцию-константу 0, $\alpha(0)=0$, но не обязан сохранять функцию-константу 1; при этом $\alpha(1)^2=\alpha(1)$ будет мультипликативным идемпотентом кольца $C(Y)$. Возьмем непересекающиеся числовые промежутки U и V, скажем, $U=[-1;0)$ и $V=(0;1]$, и образуем несвязное топологическое пространство $X=U\cup V$ как подпространство числовой прямой. Кольцо $C(X)$ содержит идемпотент e: $e(U)=\{1\}$, $e(V)=\{0\}$. Главный идеал $eC(X)$ как кольцо изоморфен кольцу $C(U)$. Эндоморфизм $\alpha\colon C(X)\to C(X)$ кольца $C(X)$, определенный формулой $\alpha(f)=ef$, $f\in C(X)$, переводит 1 в $e\neq 1$. Положим γ: $C(X)\to C(U)$, $\gamma(f)=f|_U$ есть ограничение функции $f\in C(X)$ на U. Эпиморфизм γ сохраняет 1 и все функции-константы. Заметим, что $\gamma=\alpha_\varphi$ при тождественном вложении φ: $U\to X$, $\varphi(x)=x$ для всех $x\in U$.

2.6. Имеет место следующее утверждение:

Предложение 8. *Пусть даны произвольные хьюиттовское пространство X и тихоновское пространство Y. Тогда всякий гомоморфизм α: $C(X)\to C(Y)$ кольца $C(X)$ в кольцо $C(Y)$, $\alpha(1)=1$, является индуцированным $\alpha=\alpha_\varphi$ посредством однозначно определенного непрерывного отображения φ: $Y\to X$. В частности, если α – изоморфизм, то φ – гомеоморфизм.*

Отметим только, что $\varphi(y)=x$ при $y\in Y$ и $x\in X$ означает $\alpha^{-1}(M_x)=M_y$.

Следствие 2. *Каждое хьюиттовское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, кольцом $C(X)$.*

На основе предложения 7 доказывается

Двойственность Хьюитта (E. Hewitt, 1948 [34]). *Категория всех колец вида $C(X)$ с их гомоморфизмами, сохраняющих* 1, *в качестве морфизмов антиэквивалентна категории всех хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений.*

Следствие 3. *Двойственность Хьюитта справедлива для категории полуколец $C^+(X)$ с сохраняющими* 1 *гомоморфизмами и для категории полуполей $U(X)$ с произвольными гомоморфизмами.*

Здесь следует иметь в виду, что при любом топологическом пространстве X кольцо $C(X)$ является кольцом разностей аддитивно сократимых полукольца $C^+(X)$ и полуполя $U(X)$.

Свойство pm [31, theorem 2.11]. *Кольца $C(X)$ суть pm-кольца, т. е. в них каждый простой идеал содержится в единственном максимальном идеале.*

Замечание 3. Теорема Гельфанда – Колмогорова и свойство pm выполняются и для полуколец $C^+(X)$. Рекомендуем разобраться с их доказательствами, приведенными в указанных источниках или в книге [18, п. 7].

2.7. Приведем классические топологические утверждения о продолжаемости непрерывных функций.

Теорема Титце – Урысона (1925, [28, теорема 2.1.8]). *Всякое замкнутое подмножество произвольного нормального пространства C-расширяемо.*

Из теоремы Титце – Урысона непосредственно выводится так называемая (по историческим причинам)

Большая лемма Урысона (1925, [28, теорема 1.5.10]). *Любые два непересекающиеся замкнутые множества нормального пространства функционально отделимы.*

Отметим, что функциональная отделимость любых двух непересекающихся замкнутых множеств произвольного T_1-пространства влечет его нормальность.

Предложение 9. *Любой компакт является нормальным пространством.*

Следствие 4. *Компакты суть тихоновские пространства.*

Следствие 5. *Каждое замкнутое подмножество произвольного компакта C-расширяемо.*

Теорема расширения Урысона (1925, [31, theorem 1.17]). *Для C^*-расширяемости подпространства Y тихоновского пространства X необходимо и достаточно, чтобы любые два функционально отделимые множества в Y были функционально отделимы в X.*

Замечание 4. Докажите предложение 9. Изучите доказательства приведенных теорем Урысона.

3. *F*-пространства и их характеризации

3.1. Тихоновское пространство X называется *F-пространством* (Gillman, Henriksen, 1956 [30]), если кольцо $C(X)$ является *кольцом Безу*[1]: любой конечнопорожденный идеал в $C(X)$ главный. Фактически это означает:

$$\forall f, g\in C(X)\ \exists d\in C(X)\ fC(X)+gC(X)=dC(X).$$

Мы *F-пространством* будем называть произвольное топологическое пространство X, для которого $C(X)$ есть кольцо Безу.

Точка x топологического пространства X называется *F-точкой*, если $x\in Z^0(fg)=(Z(f)\cup Z(g))^0 \Rightarrow x\in Z^0(f)\cup Z^0(g)$ для любых $f, g\in C(X)$. Отметим, что тема F-пространств затрагивается в работах [6; 8; 9; 11–13; 15; 18–21; 30; 31; 38].

3.2. Характеризации в терминах колец функций

Теорема 1. *Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) X есть F-пространство;

2) кольцо C(X) является НОД-кольцом;

[1] По имени французского математика Этьена Безу (1730–1783), члена Французской академии наук, специалиста по алгебре и теории чисел.

3) кольцо $C(X)$ является НОК-кольцом;

4) $f\in |f|\cdot C(X)$ для любой функции $f\in C(X)$;

5) все идеалы кольца $C(X)$ выпуклые;

6) все идеалы кольца $C(X)$ абсолютно выпуклые;

7) в $C(X)$ каждый идеал O_P, $P\in Spec\ C(X)$, простой;

8) в $C(X)$ каждый идеал O_M, $M\in Max\ C(X)$, простой;

9) любые два непересекающиеся конуль-множества $coz\ f$ и $coz\ g$, $f, g\in C(X)$, функционально отделимы, т. е. если $fg=0$, то $fh=f$ и $gh=0$ для некоторой функции $h\in C(X)$;

10) для любой функции $f\in C(X)$ множества $N(f)$ и $P(f)$ функционально отделимы;

11) каждое конуль-множество $coz\ f$, $f\in C(X)$, C^*-расширяемо;

12) решетка $Id\ C(X)$ дистрибутивна;

13) τX есть F-пространство;

14) $\beta\tau X$ есть F-пространство;

15) $\nu\tau X$ есть F-пространство;

3.3. Характеризации в терминах полуколец функций

Теорема 2. *Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

1) X есть F-пространство;

2) $C^+(X)$ – полукольцо Безу;

3) $C^+(X)$ является НОД-полукольцом;

4) $C^+(X)$ является НОК-полукольцом;

5) все идеалы полукольца $C^+(X)$ полустрогие;

6) все идеалы полукольца $C^+(X)$ строгие;

7) в $C^+(X)$ каждый идеал O_P, $P\in Spec\ C^+(X)$, простой;

8) в $C^+(X)$ каждый идеал O_M, $M\in Max\ C^+(X)$, простой;

9) решетки $Id\ C(X)$ и $Id\ C^+(X)$ изоморфны;

10) решетка $Id\ C^+(X)$ модулярна;

11) решетка $Id\ C^+(X)$ дистрибутивна;

12) решетка $Con\ C^+(X)$ дистрибутивна;

13) $Con\ C^+(X)\subseteq Con\ C^{\vee}(X)$.

3.4. Характеризации в терминах полуполей функций

Ядром полуполя $U(X)$ или полуполя $U^{\vee}(X)$ называется класс 1 любой конгруэнции на этом полуполе. Непустое подмножество A полуполя $U(X)$ будет ядром тогда и только тогда, когда A есть подгруппа мультипликативной группы $U(X)$ с условием:

$$\forall a\in A\ \forall u, v\in U(X)\ (u+v=1 \Rightarrow au+v\in A).$$

Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$, порожденной парой $(u, 1)$, $u\in U(X)$, называется *главным ядром* и обозначается (u). Отметим, что ядра полуполя $U^{\vee}(X)$ являются и ядрами полуполя $U(X)$ [см. 19, п. 16]. Если $U(X)=(u)$ для некоторой функции $u\in U(X)$, то полуполе $U(X)$ называется *полуполем с образующей u*; аналогично, в случае $U^{\vee}(X)$.

Теорема 3. *Для любого топологического пространства X равносильны следующие условия:*

1) X есть F-пространство;

2) произведение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;

3) пересечение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;

4) все ядра полуполя $U(X)$ выпуклы;

5) решетка $Con\ U(X)$ дистрибутивна;

6) $Con\ U(X)\subseteq Con\ U^{\vee}(X)$;

7) $Con\ U(X)=Con\ U^{\vee}(X)$.

3.5. Характеризации на языке полуколец [0, 1]-значных функций

Пусть $\mathbf{I}=[0; 1]$ – компактное идемпотентное полукольцо с операцией сложения $\vee$, обыч-ным умножением чисел и естественной топологией. Положим, $C(X, \mathbf{I})$ – идемпотентное полукольцо всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в топо-логическом полукольце $\mathbf{I}$ с поточечно заданными операциями сложения $\vee$ и умножения $\cdot$ функций.

Теорема 4. *Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

1) X есть F-пространство;

2) $C(X, \mathbf{I})$ – полукольцо Безу;

3) $C(X, \mathbf{I})$ является НОД- полукольцом;

4) $C(X, \mathbf{I})$ является НОК- полукольцом;

5) каждый простой идеал полукольца $C(X, \mathbf{I})$ содержится в единственном максимальном идеале, т. е. $C(X, \mathbf{I})$ есть pm-полукольцо;

6) каждый простой идеал полукольца $C(X, \mathbf{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;

7) все простые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь по включению;

8) полукольцо $C(X, \mathbf{I})$ слабо риккартово, т. е. аннуляторы его элементов суть чистые идеалы;

9) максимальный спектр $Max\, C(X, \mathbf{I})$ полукольца $C(X, \mathbf{I})$ является хаусдорфовым пространством.

Другие характеризации F-пространств изложены в [19, пп. 22, 28, 34, 38].

4. *P*-пространства и другие классы пространств

4.1. Тихоновское пространство X называется *P-пространством* (Gillman, Henriksen, 1954 [29]), если каждый простой идеал кольца $C(X)$ максимален.

Точка x топологического пространства X называется *P-точкой*, если $x \in Z(f) \Rightarrow x \in Z^0(f)$ для любой функции $f \in C(X)$.

Тема P-пространств рассматривалась в [6; 11–13; 15; 18–21; 29; 31; 38].

Теорема 5. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) X есть P-пространство;

2) кольцо $C(X)$ регулярное, т. е. $\forall f \in C(X)\ \exists g \in C(X)\ fgf=f$;

3) любое нуль-множество $Z(f)$, $f \in C(X)$, открыто (открыто-замкнуто);

4) все идеалы кольца $C(X)$ будут z-идеалами;

5) в $C(X)$ каждый идеал O_P, $P \in Spec\, C(X)$, максимальный;

6) в $C(X)$ каждый идеал O_M, $M \in Max\, C(X)$, максимальный;

7) каждое коноль-множество на X C^*-расширяемо;

8) $Con\, C^+(X) = Con\, C^{\vee}(X)$;

9) $Con\, C^{\vee}(X) \subseteq Con\, C^+(X)$;

10) пересечение любого счетного семейства открытых множеств пространства X открыто;

11) νX есть P-пространство;

12) все точки пространства X суть P-точки;

13) каждое коноль-множество на пространстве X C-расширяемо.

4.2. По закону контрапозиции, тихоновское пространство X будет экстремально несвязным (базисно несвязным) тогда и только тогда, когда в X внутренность любого замкнутого множества (нуль-множества) замкнута, равносильно, открыто-замкнута. Очевидно, что дискретные топологические пространства являются экстремально несвязными P-пространствами.

Замечание 5. Известно, что любое экстремально несвязное P-пространство неизмеримой мощности дискретно (теорема Исбелла). Известная *аксиома Улама* утверждает, что все кардиналы (мощности) неизмеримые. Существует предположение, что в аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля аксиому Улама можно доказать.

Теорема 6. *Верны следующие утверждения:*

1) всякое псевдокомпактное P-пространство конечно;

2) любое P-пространство базисно несвязно;

3) любое экстремально несвязное пространство базисно несвязно;

4) любое базисно несвязное пространство является нульмерным F-пространство.

Доказательство. 1) Пусть X – псевдокомпактное P-пространство. Тогда $C(X) \cong C(\beta X) = C(\nu X)$. Значит, компакт βX также будет P-пространством. Поэтому можно считать, что само X является компактным P-пространством. Предположим от противного, что пространство X бесконечно. Тогда в нем найдется собственное бесконечное открыто-замкнутое множество U_1, которое само будет компактным P-пространством. Аналогично, в U_1 существует собственное бесконечное открыто-замкнутое множество U_2. Продолжая этот процесс, получим бесконечную строго убывающую последовательность $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ открыто-замкнутых множеств в X. Ее пересечение U, будучи нуль-множеством на X, также открыто-замкнуто. В результате имеем счетное покрытие компактного пространства $X = (X \setminus U_1) \cup (U_1 \setminus U_2) \cup \ldots \cup (U_n \setminus U_{n+1}) \cup \ldots \cup U$, что невозможно. (Заметим, что при доказательстве не имеет значения пусто множество U или нет. Хотя в нашем «компактном» случае $U \neq \varnothing$).

Утверждения 2) и 3) очевидны.

4) Пусть X – базисно несвязное пространство. По предложению 3 оно нульмерно. Возьмем $f \in C(X)$. Множества $N(f)$ и $P(f)$ являются коноль-множествами. Замыкание $N(f)$ открыто-замкнуто и не пересекается с $P(f)$. Следовательно, $N(f)$ и $P(f)$ функционально отделимы. Стало быть, имеет место утверждение 10) теоремы 1. Остается применить теорему 1.

Пример 2. В силу утверждения 4) теоремы 5 базисно несвязные пространства дают примеры нульмерных F-пространств.

Пример 3. Пусть Y – произвольное локально компактное тихоновское пространство, являющееся объединением счетного семейства компактных подпространств. Тогда нарост $X=\beta Y\setminus Y$ будет компактным F-пространством. В частности: $\beta\mathbf{R}\setminus\mathbf{R}$ – несвязное F-пространство, не являющееся вполне несвязным; $\beta\mathbf{R}^+\setminus\mathbf{R}^+$ – связное F-пространство.

Пример 4 (P-пространства, не являющегося экстремально несвязным). Положим, Y – несчетное дискретное пространство и $X=Y\cup\{p\}$ – топологическое пространство, открытыми множествами которого служат все подмножества в Y и множества U, содержащие точку p и имеющие не более чем счетное дополнение $X\setminus U$. Такие множества U и $X\setminus U$ суть в точности открыто-замкнутые множества пространства X; они же нуль-множества и конуль-множества на X. Следовательно, X есть P-пространство. Разобьем Y на два несчетных подмножества A и B. Множества A и B открыты и не замкнуты в X. Поэтому замыканием A в X будет множество $A\cup\{p\}$, не являющееся открытым. Заметим, что пространство X *финально компактно*, т. е. такое, что любое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие.

Пример 5 (экстремально несвязного пространства, не являющегося P-пространством). Пусть Y – бесконечное дискретное пространство и $X=\beta Y$ – его стоун-чеховская компактификация. Бесконечный компакт X не является P-пространством. Для доказательства экстремальной несвязности пространства X возьмем произвольное непустое открытое множество U в нем. Можно считать, что U не содержит Y. Получаем разбиение пространства Y на два (непустых) открытых множества $Y\cap U$ и $Y\setminus U$. Рассмотрим на Y непрерывную $\{0, 1\}$-значную функцию f, равную 0 на $Y\cap U$ и равную 1 на $Y\setminus U$. Функция f непрерывно продолжается до $\{0, 1\}$-значной функции f^* на $\beta Y=X$. Тогда нуль-множество $Z(f^*)$ открыто-замкнуто в X и является замыканием открытого множества U в X.

4.3. Приведем алгебраические характеризации базисно несвязных и экстремально несвязных пространств.

Теорема 7. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия:*

1) X базисно несвязно;

2) аннуляторы главных идеалов кольца $C(X)$ выделяются прямыми слагаемыми в $C(X)$, т. е. кольцо $C(X)$ риккартово;

3) все аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ чистые;

4) кольцо $C(X)$ слабо риккартово и его пространство $\mathrm{Min}\, C(X)$ всех минимальных простых идеалов компактно;

5) υX – базисно несвязное пространство;

6) βX – базисно несвязное пространство.

Заметим, что теорема 7 верна также для полуколец $C^+(X)$, $C^{\vee}(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$.

Теорема 8. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия:*

1) X экстремально несвязно;

2) аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ выделяются прямыми слагаемыми;

3) υX экстремально несвязно;

4) βX экстремально несвязно.

Очевидно, что теорема 8 имеет место и для полуколец $C^+(X)$, $C^{\vee}(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$.

4.4. Рассмотрим алгебраические характеризации топологических пространств из некоторых других классов пространств.

Конгруэнция ρ на полуполе $U(X)$ называется *идеальной*, если в кольце $C(X)$ существует такой идеал J, что $u\rho v \Leftrightarrow u-v\in J$ $(\forall u, v\in U(X))$.

Теорема 9. *Для всякого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) X – псевдокомпактное пространство;

2) все конгруэнции на полуполе U(X) идеальные;

3) любая собственная конгруэнция на полуполе $U(X)$, равносильно, на $U^{\vee}(X)$, содержится в некоторой максимальной конгруэнции;

4) $U(X)$ – полуполе с образующей;

5) $U^{\vee}(X)$ – полуполе с образующей.

Через $C_p(X)$ обозначается кольцо $C(X)$, наделенное топологией поточечной сходимости и превращающее его в топологическое кольцо. Аналогично получаются топологическое полукольцо $C^+{}_p(X)$ и топологическое полуполе $U_p(X)$.

Теорема 10. *Для произвольного тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) X – нормальное пространство;

2) решетка всех замкнутых идеалов топологического кольца $C_p(X)$ является подрешеткой решетки $\mathrm{Id}\, C(X)$ всех идеалов кольца $C(X)$;

3) решетка всех замкнутых идеалов (замкнутых конгруэнций) топологического полукольца $C^+_p(X)$ является подрешеткой решетки Id $C^+(X)$ (соответственно, Con $C^+(X)$);

4) решетка всех замкнутых конгруэнций топологического полуполя $U_p(X)$ является подрешеткой решетки Con $U(X)$.

Полукольцо называется *нетеровым*[2], если каждый его идеал – конечнопорожденный, т. е. как идеал порождается конечным множеством элементов.

Теорема 11. *Для каждого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) X – конечное пространство;

2) кольцо $C(X)$ нетерово;

3) полукольцо $C^+(X)$, эквивалентно, полукольцо $C^\vee(X)$, нетерово;

4) все конгруэнции на полуполе $U(X)$, равносильно, на $U^\vee(X)$, главные;

5) все главные конгруэнции на полуполе $U(X)$ или $U^\vee(X)$ дополняемы;

6) решетка Con $U(X)$, эквивалентно, решетка Con $U^\vee(X)$, булева.

По поводу теорем 9–11 [см. 19, п. 22].

Тихоновское пространство называется *P'-пространством*, если внутренность любого его непустого нуль-множества сама непустая [7].

Теорема 12. *Для каждого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) X есть P'-пространство;

2) каждое нуль-множество на X канонически замкнуто;

3) в кольце $C(X)$, равносильно, в полукольце $C^+(X)$, необратимые элементы суть делители нуля;

4) υX есть P'-пространство.

Сделаем три дополняющих замечания о рассматриваемых в статье классах топологических пространств.

Замечание 6. Среди замкнутых множеств топологических пространств выделяются нуль-множества (называемые еще функционально замкнутыми) и канонически замкнутые множества. В терминах соотношений между ними перечислим характеризации следующих видов тихоновских пространств X:

• X – совершенно нормальное пространство $\Leftrightarrow$ (все) замкнутые множества в X являются нуль-множествами;

• X – дискретное пространство $\Leftrightarrow$ замкнутые множества в X канонически замкнуты;

• X есть P'-пространство $\Leftrightarrow$ нуль-множества на пространстве X канонически замкнуты.

Вопрос. Когда любое канонически замкнутое множество тихоновского пространства X будет нуль-множеством? Совершенно нормальные пространства и экстремально несвязные пространства обладают указанным свойством.

Замечание 7. Напомним характеризации некоторых видов тихоновских пространств X в терминах непрерывной расширяемости:

• X – нормальное пространство $\Leftrightarrow$ (все) его замкнутые множества C-расширяемы, равносильно, C^*-расширяемы;

• X будет F-пространством $\Leftrightarrow$ его конуль-множества C^*-расширяемы;

• X будет P-пространством $\Leftrightarrow$ его конуль-множества C-расширяемы;

• X – экстремально несвязное пространство $\Leftrightarrow$ его открытые множества C^*-расширяемы;

• открытые множества пространства X C-расширяемы $\Leftrightarrow$ X – экстремально несвязное пространство, в котором пересечения континуальных семейств открытых множеств открыты [18, теорема 8.18, см. замечание 5].

Замечание 8. Мы рассмотрели следующие классы тихоновских пространств, которые связаны включениями:

$$\{\text{дискретные}\}\subseteq\{P\text{-пространства}\}\cap\{\text{экстремально несвязные}\}$$
$$\{P\text{-пространства}\}\cup\{\text{экстремально несвязные}\}\subset\{\text{базисно несвязные}\}$$
$$\{\text{базисно несвязные}\}\subset\{\text{нульмерные}\}\cap\{F\text{-пространства}\}$$
$$\{\text{базисно несвязные}\}\cap\{P'\text{-пространства}\}=\{P\text{-пространства}\}$$

5. Задачи для исследований

Задача 1. Относительно каких операций и отображений топологических пространств сохраняются свойства: быть F-пространством; быть P-пространством; быть базисно несвязным пространством; быть экстремально несвязным пространством? [см. Приложение в книге Энгелькинга 28].

Задача 2. Легко видеть, что Id $C^+(X)$=Id $C^\vee(X)$ для любого F-пространства X. Верно ли обратное утверждение?

[2] По имени немецкого математика Эмми Нётер (1882–1935), одной из основоположниц современной абстрактной алгебры.

Задача 3. Когда решетка Con $C^{\vee}(X)$ модулярна? дистрибутивна?

Задача 4. Является ли решетка ядер Con $U(X)$ ретрактом решетки конгруэнций Con $C^{+}(X)$? [см. 18, задача 19.5].

Задача 5. Развить теорию полуколец непрерывных **Q**-значных функций.

Задача 6. Исследовать полукольца $C(X, S)$ для:

1) $S=\{2^n: n\in\mathbf{Z}\}\cup\{0\}$ – идемпотентное полуполе с нулем;

2) $S=\{2^{-n}: n\in\mathbf{N}\}\cup\{0, 1\}$ – идемпотентное полукольцо.

В S берется операция сложения $\vee$ (max), числовое умножение и естественная топология. В первом случае S – нульмерное локально компактное циклическое полуполе с 0, во втором случае S – нульмерное компактное циклическое полукольцо с 0 и 1.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.
2. *Александров П. С., Урысон П. С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. Изд. 3-е. М. : Наука, 1971. 144 с.
3. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М. : Наука, 1974. 424 с.
4. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М. : Наука, 1984. 568 с.
5. *Варанкина В. И.* Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 923–937.
6. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.
7. *Вечтомов Е. М.* О P'-пространствах / Горьков. гос. ун-т. Горький, 1981. 6 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1836-81 Деп.
8. *Вечтомов Е. М.* Об идеалах колец непрерывных функций // Известия вузов. Математика. 1981. № 1. С. 3–10.
9. *Вечтомов Е. М.* Дистрибутивные кольца непрерывных функций и *F*-пространства // Математические заметки. 1983. Т. 34. Вып. 3. С. 321–332.
10. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. Серия: Алгебра. Геометрия. Топология. 1990. Т. 28. С. 3–46.
11. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. Серия: Алгебра. Геометрия. Топология. 1991. Т. 29. С. 119–191.
12. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы : учебное пособие для спецкурса. М. : МПГУ, 1992. 120 с.
13. *Вечтомов Е. М.* Функциональные представления колец : монография. М. : МПГУ, 1993. 190 с.
14. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций и их максимальный спектр // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 6. С. 32–49.
15. *Вечтомов Е. М.* Делимость в кольцах непрерывных функций $C(X, F)$ // Известия вузов. Математика. 1996. № 1. С. 7–16.
16. *Вечтомов Е. М.* Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.
17. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
18. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1 [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 384 с.
19. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2 [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 316 с.
20. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.
21. *Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.* Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.
22. *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н.* О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.
23. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М. : Мир, 1982. 456 с.
24. *Келли Дж.* Общая топология. Изд. 2-е. М. : Наука, 1981. 432 с.
25. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 6-е, испр. М. : Наука, 1989. 624 с.
26. *Ламбек И.* Кольца и модули. М. : Мир, 1971. 280 с.
27. *Чермных В. В.* Функциональные представления полуколец : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.
28. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М. : Мир, 1986. 752 с.
29. *Gillman L., Henriksen M.* Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math, Soc. 1954. Vol. 77. No. 2. Pp. 340–362.

30. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math, Soc. 1956. Vol. 82. No. 2. Pp. 366–391.
31. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 p.
32. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
33. *Henriksen M.* Rings of continuous functions from an algebraic point of view // Ordered Algebraic Structures. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989. Pp. 143–174.
34. *Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math, Soc. 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.
35. *Kaplansky I.* Topological rings // Amer. J. Math. 1947. Vol. 69. No. 1. Pp. 153–183.
36. *Stone M. H.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math, Soc. 1937. Vol. 41. No. 3. Pp. 375–481.
37. *Vechtomov E. M.* Rings and sheaves // J. Math. Sciences (New York). 1995. Vol. 74. No. 1. Pp. 749–798.
38. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // J. Math. Sciences (New York). 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

Semirings of continuous functions on topological spaces

E. M. Vechtomov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article is an introduction to the theory of rings and semirings of continuous real-valued functions, which allows the reader to get an initial idea of the essence of the subject. The elements of the theory of rings of continuous functions and general topology necessary for the study of functional algebra are presented. Various algebraic and functional-topological characterizations of F-spaces and P-spaces are considered. Research problems on the theory of semirings of continuous functions are formulated.

Keywords: ring of continuous functions, semiring of continuous functions, F-space, P-space.

References

1. *Aleksandrov P. S. Vvedenie v teoriju mnozhestv i obshhuju topologiju* [Introduction to set theory and general topology]. M. Nauka (Science). 1977. 368 p.
2. *Aleksandrov P. S., Uryson P. S. Memuar o kompaktnyh topologicheskih prostranstvah. Izd. 3-e* [Memoir on compact topological spaces. Ed. 3d]. M. Nauka (Science). 1971. 144 p.
3. *Arhangel'skij A. V., Ponomarev V. I. Osnovy obshhej topologii v zadachah i uprazhnenijah* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. M. Nauka (Science). 1974. 424 p.
4. *Birkgof G. Teorija reshetok* [Theory of lattices]. M. Nauka (Science). 1984. 568 p.
5. *Varankina V. I. Maksimal'nye idealy v polukol'cah nepreryvnyh funkcij* [Maximal ideals in semirings of continuous functions] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 1995. Vol. 1. Is. 4. Pp. 923–937.
6. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A. Polukol'ca nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij: delimost', idealy, kongrujencii* [Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and Applied Mathematics. 1998. Vol. 4. Is. 2. Pp. 493–510.
7. *Vechtomov E. M. O P′-prostranstvah* [On P′-spaces] / Gorky State University. Gorky, 1981. 6 p. Dep. VINITI. No. 1836-81 Dep.
8. *Vechtomov E. M. Ob idealah kolec nepreryvnyh funkcij* [On the ideals of rings of continuous functions] // *Izvestija vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1981. No. 1. Pp. 3-10.
9. *Vechtomov E. M. Distributivnye kol'ca nepreryvnyh funkcij i F-prostranstva* [Distributive rings of continuous functions and F-spaces] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1983. Vol. 34. Is. 3. Pp. 321–332.
10. *Vechtomov E. M. Voprosy opredeljaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij* [Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tehn.* – Results of science and technology / VINITI. Series: Algebra. Geometry. Topology. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.
11. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij. Algebraicheskie aspekty* [Rings of continuous functions. Algebraic aspects] // *Itogi nauki i tehn.* – Results of science and technology / VINITI. Series: Algebra. Geometry. Topology. 1991. Vol. 29. Pp. 119–191.
12. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah. Izbrannye temy : uchebnoe posobie dlja speckursa* [Rings of continuous functions on topological spaces. Selected topics : textbook for a special course]. M. MPSU. 1992. 120 p.
13. *Vechtomov E. M. Funkcional'nye predstavlenija kolec : monografija* [Functional representations of rings : monograph]. M. MPSU. 1993. 190 p.
14. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij i ih maksimal'nyj spektr* [Rings of continuous functions and their maximum spectrum] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1994. Vol. 55. Is. 6. Pp. 32–49.
15. *Vechtomov E. M. Delimost' v kol'cah nepreryvnyh funkcij C(X, F)* [Divisibility in rings of continuous functions C(X, F)] // *Izvestija vuzov. Matematika* – News of higher schools. Mathematics. 1996. No. 1. Pp. 7–16.

16. *Vechtomov E. M. Reshetka podalgebr kolec nepreryvnyh funkcij i h'yuittovskie prostranstva* [Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces] // Mathematical notes. 1997. Vol. 62. Is. 5. Pp. 687–693.

17. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury* [Mathematics: basic mathematical structures. Ed. 2nd]. M. Yurayt. 2018. 296 p.

18. *Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Jelementy funkcional'noj algebry : monografija : v 2 t. T. 1 [pod red. E. M. Vechtomova]* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 1 [ed. by E. M. Vechtomov]]. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 384 p.

19. *Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Jelementy funkcional'noj algebry : monografija : v 2 t. T. 2 [pod red. E. M. Vechtomova]* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 2 [ed. by E. M. Vechtomov]]. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 316 p.

20. *Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Chermnyh V. V. Jelementy teorii polukolec : monografija* [Elements of the theory of semirings-rings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

21. *Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semirings of continuous functions] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.

22. *Gel'fand I. M., Kolmogorov A. N. O kol'cah nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah* [On rings of continuous functions on topological spaces] // *Doklady AN SSSR* – Reports of the USSR Academy of Sciences. 1939. Vol. 22. No. 1. Pp. 11–15.

23. *Gretzer G. Obshhaja teorija reshetok* [General theory of lattices]. M. Mir (World). 1982. 456 p.

24. *Kelly J. Obshhaja topologija. Izd. 2-e* [General topology. Ed. 2nd]. M. Nauka (Science). 1981. 432 p.

25. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. Izd. 6-e, ispr.* [Elements of the theory of functions and functional analysis. 6th ed., corr.] M. Nauka (Science). 1989. 624 p.

26. *Lambek I. Kol'ca i moduli* [Rings and modules]. M. Mir (World). 1971. 280 p.

27. *Chermnyh V. V. Funkcional'nye predstavlenija polukolec : monografija* [Functional representations of semirings : monograph]. Kirov. VyatSHU publishing house. 2010. 224 p.

28. *Engelking R. Obshhaja topologija* [General topology]. M. Mir (World). 1986. 752 p.

29. *Gillman L., Henriksen M.* Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math, Soc. 1954. Vol. 77. No. 2. Pp. 340–362.

30. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math, Soc. 1956. Vol. 82. No. 2. Pp. 366–391.

31. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 p.

32. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

33. *Henriksen M.* Rings of continuous functions from an algebraic point of view // Ordered Algebraic Structures. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989. Pp. 143–174.

34. *Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math, Soc. 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.

35. *Kaplansky I.* Topological rings // Amer. J. Math. 1947. Vol. 69. No. 1. Pp. 153–183.

36. *Stone M. H.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math, Soc. 1937. Vol. 41. No. 3. Pp. 375–481.

37. *Vechtomov E. M.* Rings and sheaves // J. Math. Sciences (New York). 1995. Vol. 74. No. 1. Pp. 749–798.

38. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // J. Math. Sciences (New York). 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.