УДК 517.5 DOI 10.25730/VSU.0536.22.012

О функциях, выпуклых по M. Avriel. I. Геометрическая характеризация

С. И. Калинин[1], Н. С. Протасов[2], Ю. И. Макарова[3]
[1]доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11146@vyatsu.ru
[2]магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: protasovnekit@gmail.com
[3]магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. E-mail: Yulyarogozhnikova981007@mail.ru

Аннотация. В работе осмысляется определение понятия (h,φ)-выпуклой на промежутке функции, обобщающего ряд известных понятий выпуклости, включая понятие классической выпуклости. Приводится геометрическая характеризация (h,φ)-выпуклых и (h,φ)-вогнутых функций.

Ключевые слова: выпуклая функция, (h,φ)-выпуклая функция.

Введение. В настоящей статье авторы представляют начальные исследования, проведенные в рамках реализации содержания курса «Методика преподавания математики в вузе» для магистрантов математических направлений подготовки в Вятском государственном университете. Обсуждается вопрос о работе с определением понятия «выпуклая функция» на этапе обобщения.

Мы предполагаем осмыслить понятие так называемой (h,φ)-выпуклой функции, обобщающее ряд известных понятий различных видов выпуклости вещественных функций одной вещественной переменной. Наша основная цель – акцентировать внимание читателя на геометрической характеризации (h,φ)-выпуклых функций.

1. Понятие (h,φ)-выпуклой функции

Пусть $f:l\to\mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке *l* числовой прямой *Ox*, $L=conv\, f(l)$ – пересечение всех промежутков, содержащих множество значений $f(l)$ функции *f*, или по-другому – выпуклая оболочка этого множества. Пусть далее $h:l\to\mathbf{R}$ и $\varphi:L\to\mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции. Следуя [4, с. 269], введем в рассмотрение следующее понятие.

Определение 1. Функцию *f* условимся называть (h,φ)-*выпуклой* на промежутке *l*, если для любых чисел *a* и *b* из *l* и любого $\lambda\in[0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(h^{-1}\left(\lambda h(a)+(1-\lambda)h(b)\right)\right)\le\varphi^{-1}\left(\lambda\varphi(f(a))+(1-\lambda)\varphi(f(b))\right). \qquad (1)$$

Если для любых различных чисел *a* и *b* из *l* и любого $\lambda\in(0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(h^{-1}\left(\lambda h(a)+(1-\lambda)h(b)\right)\right)<\varphi^{-1}\left(\lambda\varphi(f(a))+(1-\lambda)\varphi(f(b))\right), \qquad (2)$$

то функцию *f* будем называть *строго* (h,φ)-*выпуклой* на рассматриваемом промежутке.

Очевидно, строго (h,φ)-выпуклая функция является (h,φ)-выпуклой.

Аналогично определяются (h,φ)-*вогнутая* и *строго* (h,φ)-*вогнутая* функции, для чего в неравенствах (1)–(2) следует использовать знаки $\ge$ и > соответственно.

Подчеркнем, понятие (h,φ)-выпуклой на промежутке функции обобщает многие другие хорошо изученные понятия различных видов выпуклости вещественных функций. Действительно, если в определении 1 положить $h(x)=x$, $\varphi(y)=y$, то будем иметь классическое определение понятия выпуклой на промежутке *l* функции.

Если $h(x)=x^p, x>0, p\ne0$, а $\varphi(y)=y$, то мы приходим к определению понятия *p*-выпуклой на промежутке $l\subset(0;\infty)$ функции [13], в частности, при $p=-1$ – к определению гармонически выпуклой на промежутке $l \subset (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ функции [7], [11], а при $p=\dfrac{1}{2}$ – $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ – выпуклой на промежутке $l \subset (0;\infty)$ функции [2]–[3].

Заметим также, пара функций $h(x)=\ln x$, $\varphi(y)=y$ порождает определение GA-выпуклой функции [6], [9], [12], пара $h(x)=x$, $\varphi(y)=\ln y$ – логарифмически выпуклой [1], [8], а пара $h(x)=\ln x$, $\varphi(y)=\ln y$ – геометрически выпуклой функции [10].

Далее, если взять $h(x)=x$, а $\varphi(y)=e^{ry}$ $(r \neq 0)$, то будем иметь определение *r*-выпуклой функции [4], [5], [14], в частности, при $r=1$ – экспоненциально выпуклой.

2. Вспомогательная лемма

Пусть $h: l \to \mathbf{R}$ и $\varphi: L \to \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции на промежутках $l \subset Ox$ и $L \subset Oy$ соответственно. Положим, $\Pi_{l,L}=\{(x;y) \mid x \in l, y \in L\}$. Введем в рассмотрение

Определение 2. Всякую кривую, задаваемую уравнением

$$y=\varphi^{-1}(\alpha+\beta h(x)),\ x \in l,$$

где α и β – некоторые константы, условимся называть (h,φ)-*кривой*, или (h,φ)-*дугой*.

Справедлива следующая

Лемма. Для любых точек $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2) \in \Pi_{l,L}$ $(x_1 \neq x_2)$ существует единственная (h,φ)-кривая, проходящая через данные точки.

Доказательство. Заметим, система уравнений

$$\begin{cases} y_1=\varphi^{-1}(\alpha+\beta h(x_1)) \\ y_2=\varphi^{-1}(\alpha+\beta h(x_2)) \end{cases}$$

относительно неизвестных параметров α и β равносильна линейной системе

$$\begin{cases} \varphi(y_1)=\alpha+\beta h(x_1) \\ \varphi(y_2)=\alpha+\beta h(x_2) \end{cases}.$$

Последняя же имеет единственное решение

$$\alpha=\frac{\varphi(y_1)h(x_2)-\varphi(y_2)h(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)},\ \beta=\frac{\varphi(y_2)-\varphi(y_1)}{h(x_2)-h(x_1)}. \tag{3}$$

Следовательно, кривая $y=\varphi^{-1}(\alpha+\beta h(x))$, где α и β находятся по формулам (3), есть единственная (h,φ)-кривая, проходящая через точки $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$. Лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы уравнение (h,φ)-кривой, соединяющей точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, можно записать в виде

$$y=\varphi^{-1}\left(\frac{h(x_2)-h(x)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(y_1)+\frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(y_2)\right). \tag{4}$$

Замечание 2. Если у точек $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ ординаты совпадают, т. е. данные точки лежат на горизонтали, то уравнение (4) будет иметь вид

$$y=y_1.$$

В этом случае (h,φ)-кривая, соединяющая рассматриваемые точки, есть упомянутая горизонталь.

3. Геометрическая характеризация (h,φ)-выпуклой функции

Пусть *h* и φ – функции, характеризующие (h,φ)-выпуклость функции *f* на промежутке *l*; $[a;b]$ – произвольный отрезок этого промежутка. Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого $x\in(a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика (h,φ)-выпуклой функции *f* будет находиться не выше точки (h,φ)-дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$ графика, с той же абсциссой *x*.

Данный факт и будет характеризовать геометрически рассматриваемую функцию.

Доказательство. Отправляясь от (4), составим уравнение упоминаемой (h,φ)-дуги

$$y=\varphi^{-1}\left(\frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}\varphi(f(a))+\frac{h(x)-h(x_1)}{h(b)-h(a)}\varphi(f(b))\right) \qquad (5)$$

и $x\in(a;b)$ представим в виде

$$x=h^{-1}\left(\frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}h(a)+\frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}h(b)\right). \qquad (6)$$

Заметим при этом, что для величин правой части представления (5), записанных в виде дробей, выполняются условия:

$$\frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}\in(0;1),\ \frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}\in(0;1),\ \frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}+\frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}=1.$$

Используя эти условия и (h,φ)-выпуклость функции *f*, ее значение $f(x)$ оценим сверху следующим образом:

$$f(x)=f\left(h^{-1}\left(\frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}h(a)+\frac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}h(b)\right)\right)\le$$

$$\le\varphi^{-1}\left(\frac{h(x_2)-h(x)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(f(a))+\frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(f(b))\right). \qquad (7)$$

Но в произведенной оценке выражение (7) есть правая часть (5). Отсюда следует, что точка $(x;f(x))$, $x\in(a;b)$, графика функции *f* лежит не выше точки с координатами *x* и $\varphi^{-1}\left(\frac{h(x_2)-h(x)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(f(a))+\frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_2)-h(x_1)}\varphi(f(b))\right)$ (h,φ)-дуги (5). Нужное показано.

Аналогичными рассуждениями доказывается

Предложение 2. Если $f(x)$ – строго (h,φ)-выпуклая на промежутке *l* функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего *l*, и любого $x\in(a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика функции *f* лежит строго ниже точки (h,φ)-дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$, с той же абсциссой *x*.

Соответствующую геометрическую характеризацию читатель может сформулировать и в отношении (h,φ)-вогнутых функций.

4. Геометрическое определение (h,φ)-выпуклости функции

Покажем, что предложение 1 обратимо. Справедливо

Предложение 3. Пусть $f:l\to\mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке *l* числовой прямой *Ox*, $L=conv\,f(l)$. Пусть далее $h:l\to\mathbf{R}$ и $\varphi:L\to\mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции. Если для любого отрезка $\left[a;b\right]$, принадлежащего *l*, и любого $x \in \left(a;b\right)$ выполняется условие: точка $\left(x; f(x)\right)$ графика функции *f* лежит не выше точки $\left(h,\varphi\right)$-дуги, соединяющей точки $\left(a; f(a)\right)$, $\left(b; f(b)\right)$, с той же абсциссой *x*, то *f* – $\left(h,\varphi\right)$-выпуклая на промежутке *l* функция.

Доказательство. В условиях доказываемого предложения для любых чисел *a* и *b* из *l* будет выполняться неравенство (7). Положим, в нем $\dfrac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)}=\lambda$, тогда $\dfrac{h(x)-h(a)}{h(b)-h(a)}=1-\lambda$. В терминах λ это неравенство запишется в виде (1), в котором λ будет меняться от 0 до 1 при изменении *x* от *a* до *b*.

Таким образом, для функции *f* реализуется определение 1 ее $\left(h,\varphi\right)$-выпуклости на промежутке *l*. Предложение 3 доказано.

Установленное предложение дает геометрическое определение понятия $\left(h,\varphi\right)$-выпуклой на промежутке функции.

Ясно, что аналогично доказывается

Предложение 4. Пусть $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке *l* числовой прямой *Ox*, $L = conv\, f\left(l\right)$. Пусть $h: l \to \mathbf{R}$ и $\varphi: L \to \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции. Если для любого отрезка $\left[a;b\right]$, принадлежащего *l*, и любого $x \in \left(a;b\right)$ выполняется условие: точка $\left(x; f(x)\right)$ графика функции *f* лежит ниже точки $\left(h,\varphi\right)$-дуги, соединяющей точки $\left(a; f(a)\right)$, $\left(b; f(b)\right)$, с той же абсциссой *x*, то *f* – строго $\left(h,\varphi\right)$-выпуклая на промежутке *l* функция.

Данное предложение дает геометрический способ определения строго $\left(h,\varphi\right)$-выпуклой на промежутке функции.

Замечание 3. Предложения 3–4 с соответствующими изменениями можно переформулировать и в отношении $\left(h,\varphi\right)$-вогнутых функций.

Список литературы

1. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. 2001. Серия 3. Вып. 5. С. 158–163.
2. *Калинин С. И., Леонтьева Н. В.* (1/2; 1)-выпуклые функции. Ч. I // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 97–104.
3. *Калинин С. И., Леонтьева Н. В.* (1/2; 1)-выпуклые функции. Ч. II // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). С. 4–23.
4. *Avriel M.* Nonlinear Programming: Analysis and Methods. New Jersey : Prentice-Hall, 1976.
5. *Avriel M.* R-Convex functions // Mathematical Programming. 1972. No. 2. Pp. 309–323.
6. *Guan Kaizhong* GA-convexity and its applications // Anal. Math. 2013. Vol. 39. Number 3. Pp. 189–208.
7. *İşcan İ., Wu S.* Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals // Applied Mathematics and Computation. 2014. No. 238. Pp. 237–244.
8. *Montel P.* Sur les functions convexes et les functions sousharmoniques // J. de math. Pures et appl. 1928. T. 7. V. 1. C. 29–60.
9. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // J. Math. Anal. Applics. 2000. No. 2. Vol. 3. Pp. 155–167.
10. *Noor M. A. et al*. Geometrically Relative Convex Functions // Appl. Math. Inf. Sci. 8. 2014. No. 2. Pp. 607–616.
11. *Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.* Some characterizations of harmonically log-convex functions // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2004. Vol. 17. Number 1. Pp. 51–61.
12. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang.* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // J. of Inequal. and Applics. Vol. 2010. Article ID 507560. 11 p. DOI: 10.1155/2010/507560.
13. *Zhang K. S., Wan J. P. P*-convex functions and their properties // Pure Appl. Math. 2007. No. 23 (1). Pp. 130–133.
14. *Zhao Y. X., Wang S. Y., Coladas Uria L.* Characterizations of r-Convex Functions // J Optim. Theory Appl. 2010. No. 145. Pp. 186–195.

On convex functions according to M. Avriel. I. Geometric characterization

S. I. Kalinin[1], N. S. Protasov[2], Yu. I. Makarov[3]
[1]Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Fundamental Mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr11146@vyatsu.ru
[2]graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: protasovnekit@gmail.com
[3]graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: Yulyarogozhnikova981007@mail.ru

Abstract. The paper comprehends the definition of the concept of a convex function on the interval, generalizing a number of well-known concepts of convexity, including the concept of classical convexity. Geometric characterization of (h,φ)-convex and (h,φ)-concave functions is given.

Keywords: convex function, (h,φ)-convex function.

References

1. *Anosov D. V. O summe logarifmicheski vypuklyh funkcij* [On the sum of logarithmically convex functions] // *Matematicheskoe prosveshchenie* – Mathematical enlightenment. 2001. Series 3. Is. 5. Pp. 158–163.

2. *Kalinin C. I., Leont'eva N. V. (1/2; 1)-vypuklye funkcii. Ch. I* [(1/2; 1)-convex functions. Part I] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2018. Is. 1 (26). Pp. 97–104.

3. *Kalinin C. I., Leont'eva N. V. (1/2; 1)-vypuklye funkcii. Ch. II* [(1/2; 1)-convex functions. Part II] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2020. Is. 3 (36). Pp. 4–23.

4. *Avriel M.* Nonlinear Programming: Analysis and Methods. New Jersey : Prentice-Hall, 1976.

5. *Avriel M.* R-Convex functions // Mathematical Programming. 1972. No. 2. Pp. 309–323.

6. *Guan Kaizhong* GA-convexity and its applications // Anal. Math. 2013. Vol. 39. No. 3. Pp. 189–208.

7. *İşcan İ., Wu S.* Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals // Applied Mathematics and Computation. 2014. No. 238. Pp. 237–244.

8. *Montel P.* Sur les functions convexes et les functions sousharmoniques // J. de math. Pures et appl. 1928. T. 7. V. 1. Pp. 29–60.

9. *Niculescu C. P.* Convexity according to the geometric mean // J. Math. Anal. Applics. 2000. No. 2. Vol. 3. Pp. 155–167.

10. *Noor M. A. et al*. Geometrically Relative Convex Functions // Appl. Math. Inf. Sci. 8. 2014. No. 2. Pp. 607–616.

11. *Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.* Some characterizations of harmonically log-convex functions // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2004. Vol. 17. No. 1. Pp. 51–61.

12. *Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang.* The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // J. of Inequal. and Applics. Vol. 2010. Article ID 507560. 11 p. DOI: 10.1155/2010/507560.

13. *Zhang K. S., Wan J. P. P*-convex functions and their properties // Pure Appl. Math. 2007. No. 23 (1). Pp. 130–133.

14. *Zhao Y. X., Wang S. Y., Coladas Uria L.* Characterizations of r-Convex Functions // J Optim. Theory Appl. 2010. No. 145. Pp. 186–195.