

О методах приближенного вычисления определенного интеграла

Н. А. Кириллова¹, Ю. А. Куликова²

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики, Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова.

Россия, г. Абакан. ORCID: 0000-0001-6946-8486. E-mail: nadyakirillova@mail.ru

²студент 4 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (направленность Математика, Физика), Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова. Россия, г. Абакан. E-mail: yul_kulikova@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о различных способах приближенного вычисления определенного интеграла. В школьных учебниках по началам математического анализа, учебниках по высшей математике и не в каждом современном учебнике вуза по математическому анализу учащихся знакомят с разнообразием способов приближенного вычисления определенного интеграла. В основном рассматривается один способ – это метод прямоугольников. Однако помимо него существует еще метод трапеций и парабол. Даже если рассматривать один метод прямоугольников, то и там существуют разные подходы – это методы средних прямоугольников, левых и правых прямоугольников. Изучение всех этих подходов при рассмотрении определенного интеграла поможет учащимся увидеть разнообразие математической науки, что одна и та же задача может иметь несколько способов решений.

Ключевые слова: формулы Ньютона – Лейбница, прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона).

Как всем известно, формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где функция $f(x)$

непрерывна, применяется для нахождения определенного интеграла. Но чтобы ею воспользоваться, должна быть известна одна из первообразных функций $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$. Однако не для всех элементарных функций их первообразные также являются элементарными функциями. Приведем примеры: интеграл Пуассона $\int e^{-x^2} dx$, интегралы Френеля $\int \cos x^2 dx$ и

$\int \sin x^2 dx$, интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$ и многие другие. Заметим, что функция $f(x)$ может быть

задана не аналитически, а например, графически. Тогда в этих случаях использовать формулу Ньютона – Лейбница невозможно. Вследствие этого возникает необходимость использования методов приближенного вычисления определенного интеграла. В основу этих методов положен геометрический смысл определенного интеграла, который состоит в том, что определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ для функции $y=f(x)$, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$, есть площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$. Приближенное значение площади криволинейной трапеции и принимается за приближенное значение соответствующего определенного интеграла.

На практике чаще других используют три метода (формулы) приближенного вычисления определенного интеграла – это формула прямоугольников, формула трапеций и формула парабол (Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) - \text{формула прямоугольников;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} * \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \text{формула трапеций;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} * ((f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})))$$

– формула Симпсона (парабол).

Заметим, что в формулах n – это количество равных интервалов, на которые поделен отрезок $[a; b]$, h – длина интервала, равная $\frac{b-a}{n}$.

С помощью приведенных выше формул решим следующую задачу: вычислить точно по формуле Ньютона – Лейбница, а также приближенно тремя методами определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx$, сравнить полученные результаты.

Найдем значение интеграла от функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{5}$ на отрезке $[1; 3]$ с помощью формулы Ньютона – Лейбница методом интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx &= \frac{1}{5} \int_1^3 x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \frac{1}{5} \left(-x^2 \cos x \Big|_1^3 + 2 \int_1^3 x \cos x dx \right) = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| = \frac{1}{5} \left(-x^2 \cos x \Big|_1^3 + 2 \left(x \sin x \Big|_1^3 - \int_1^3 \sin x dx \right) \right) = \frac{1}{5} (-x^2 \cos x + 2x \sin x + \\ &+ 2 \cos x) \Big|_1^3 \approx 1,111. \end{aligned}$$

Узнаем, какой результат даст нам метод прямоугольников. Проиллюстрируем графически, площадь какой фигуры мы будем находить этим методом. На рисунке 1 эта ступенчатая фигура окрашена в серый цвет.

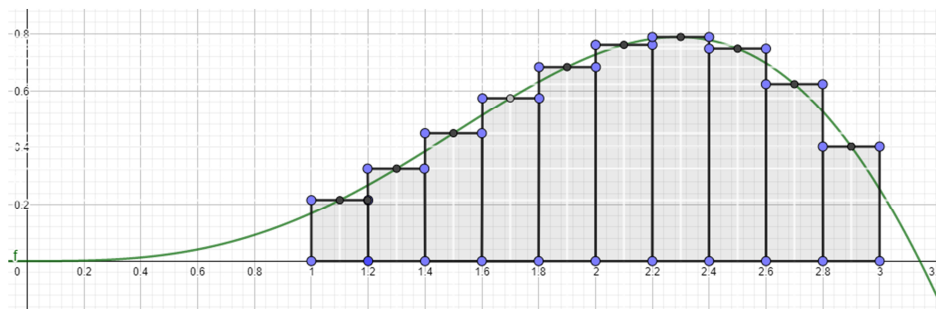


Рис. 1. Метод прямоугольников

Определим шаг h , учитывая, что $n=10$. $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0,2$. Результаты вычислений приведем в таблице 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i-1} + \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$	0,21567	0,32568	0,44887	0,57318	0,68323	0,76135	0,78896	0,74809	0,62312	0,40242

Таким образом, по формуле прямоугольников получаем, что

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx 0,2 * 5,57054 = 1,114114.$$

При получении этого результата мы использовали метод прямоугольников. Можно видеть, что различие в вычислении данного интеграла по формулам Ньютона – Лейбница и прямоугольников составляет в 0,3 %. Это говорит о том, что применение рассматриваемого метода приближенно-го вычисления дает достаточно хорошую точность вычислений.

Используя метод трапеций, мы будем находить площадь фигуры, которая изображена на рисунке 2.

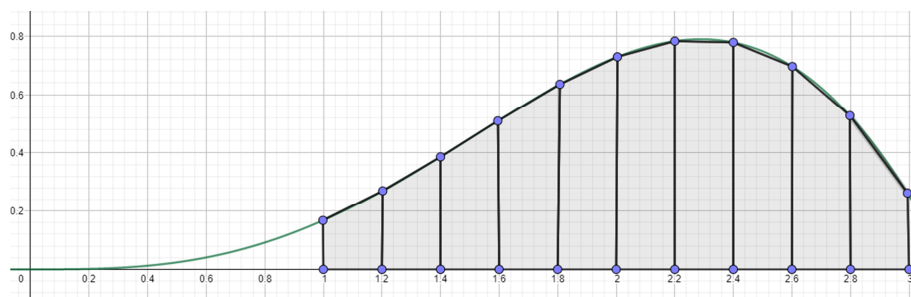


Рис. 2. Метод трапеций

По этому методу результаты вычислений приведены в таблице 2. Напомним, что шаг $h = 0,2$ при $n=10$.

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x_i)$	0,16830	0,26842	0,38632	0,51180	0,63109	0,72264	0,78263	0,77818	0,69696	0,52512	0,25402

Тогда по формуле трапеций имеем следующее:

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx \frac{0,2}{2} * (0,16830 + 2 * 5,30316 + 0,25402) = 1,102864.$$

Заметим, что результаты вычислений по формуле Ньютона – Лейбница и методу трапеций различаются на 0,8 %. Этот результат является несколько хуже, чем при использовании метода прямоугольников.

Применим к рассматриваемому интегралу метод парабол. Длина шага и количество интервалов разбиения отрезка интегрирования остаются такими же: $h = 0,2$. $n=10$. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x_i)$	0,16830	0,26842	0,38632	0,51180	0,63109	0,72264	0,78263	0,77818	0,69696	0,52512	0,25402

Вычислим интеграл по формуле:

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx \frac{0,2}{3} * (0,42232 + 2 * 2,49700 + 4 * 2,80616) = 1,109397.$$

Графическая иллюстрация фигуры, площадь которой мы сейчас нашли, приведена на рисунке 3 (окрашена в серый цвет).

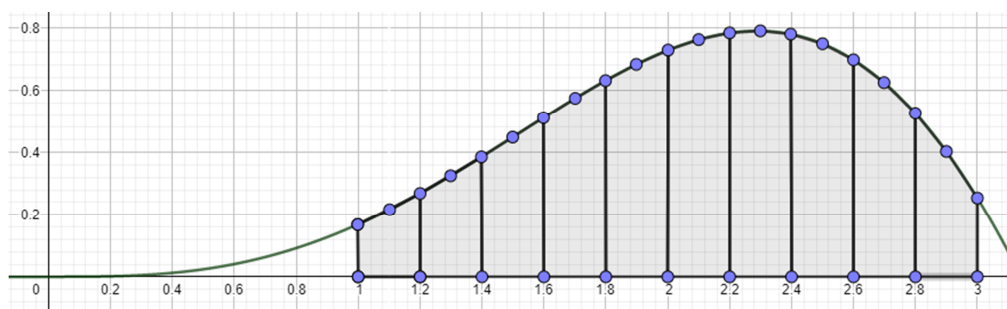


Рис. 3. Метод парабол

В этом случае разность составила 0,2 % между результатами вычислений, полученных по формуле Ньютона – Лейбница и метода парабол.

Очевидно, что вычисление определенных интегралов с помощью методов приближенного вычисления не даст нам истинного значения. Для наилучшего приближения к достоверному значению интеграла важно правильно выбирать метод (формулу), по которой будет вестись расчет. Не последнюю роль в этом играет – какой будет взят шаг интегрирования. Ведь чем больше n , тем точнее результат интегрирования.

В данном примере приближенные значения интеграла, полученные по формулам парабол и трапеций, совпадают до тысячных, но формула прямоугольников дает более точный результат. При этом формула прямоугольников проще для вычислений, из-за чего ее рассматривают не только в вузе, но и в школе.

В заключении отметим, что каждый из рассмотренных нами методов приближенного вычисления определенных интегралов содержит четкий алгоритм их нахождения. Таким образом, описанные методы – это эффективное средство приближенного вычисления интегралов.

Список литературы

1. Волков Е. А. Численные методы : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1990. 248 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : учеб. для вузов. Ч. I. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для вузов. Т. 1. М. : Интеграл-Пресс, 2002. 416 с.

On methods of approximate calculation of a certain integral

N. A. Kirillova¹, Yu. A. Kulikova²

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Khakass State University n. a. N. F. Katanov.

Russia, Abakan. ORCID: 0000-0001-6946-8486. E-mail: nadyakirillova@mail.ru

²student of the 4th year of the direction of training 44.03.05 Pedagogical education (focus Mathematics, Physics), Khakass State University n. a. N. F. Katanov. Russia, Abakan. E-mail: yul_kulikova@mail.ru

Abstract. The article deals with the question of various methods of approximate calculation of a certain integral. In school textbooks on the basics of mathematical analysis, textbooks on higher mathematics and not in every modern university textbook on mathematical analysis, students are introduced to a variety of ways of approximate calculation of a certain integral. Basically, one method is considered – this is the rectangle method. However, in addition to it, there is also the method of trapezoids and parabolas. Even if we consider one method of rectangles, then there are different approaches there – these are methods of middle rectangles, left and right rectangles. Studying all these approaches when considering a certain integral will help students to see the diversity of mathematical science, that the same problem can have several solutions.

Keywords: Newton–Leibniz formulas, rectangles, trapezoids, parabolas (Simpson).

References

1. Volkov E. A. *Chislennyye metody : ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical methods : textbook handbook for universities]. M. Vysshaya Shkola (Higher School). 1990. 248 p.
2. Il'in V. A., Poznyak E. G. *Osnovy matematicheskogo analiza : ucheb. dlya vuzov. Ch. I* [Fundamentals of mathematical analysis : textbook for universities. Part I]. M. FIZMATLIT. 2005. 648 p.
3. Piskunov N. S. *Differentsial'noe i integral'noe ischislenie : ucheb. posobie dlya vtuzov. T. 1* [Differential and integral calculus : textbook for higher education institutions. Vol. 1]. M. Integral-Press. 2002. 416 p.