УДК 517.93 DOI 10.25730/VSU.0536.22.015

О различных методах решения квадратных уравнений

И. Э. Гриншпон[1], Я. С. Гриншпон[2]
[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики,
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники.
Россия, г. Томск. E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики,
Томский государственный университет. Россия, г. Томск. E-mail: grinshpon@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются различные методы решения квадратных уравнений. Выделены наиболее популярные основные методы: вычислительная формула через дискриминант, выделение полного квадрата, разложение на множители, теорема Виета, метод коэффициентов. Для этих методов приведен сравнительный анализ их применения в различных ситуациях. Показана возможность обобщения этих методов для решения других задач элементарной и высшей математики. Для каждого основного метода обоснована важность его изучения как для получения преимущества в скорости и точности решения квадратных уравнений, так и для дальнейшего обучения решению других более сложных задач.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, дискриминант, теорема Виета, разложение на множители.

Умение решать квадратные уравнения является одним из базовых навыков, который формируется в школе при изучении курса алгебры.

Квадратные уравнения находят широкое применение при решении многих классов математических задач, например, при решении и исследовании тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений или неравенств и их систем или совокупностей (в том числе, при выполнении заданий с параметром на перечисленные типы уравнений и неравенств), а также при решении текстовых и геометрических задач, сводящихся к уравнениям и неравенствам. Кроме того, квадратные уравнения регулярно возникают при решении прикладных задач из различных предметных областей (в том числе по учебным предметам – информатика, физика, химия, география), математической моделью которых являются уравнения или неравенства перечисленных выше типов. Отметим, что без уверенного владения навыком решения квадратных уравнений невозможно успешно пройти любую форму государственной аттестации (включая ВПР, ГВЭ, ОГЭ и ЕГЭ).

Решать квадратные уравнения необходимо и при освоении математических и прикладных дисциплин в вузе, например, в курсе «Высшая математика» (или в курсах «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения») при нахождении собственных чисел линейного оператора, построении кривых второго порядка, вычислении пределов и интегралов от рациональных дробей, решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, извлечении квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме и т. д.

Существует много разнообразных методов решения квадратных уравнений, как универсальных (применимых к любому квадратному уравнению), так и более специальных (применимых только к уравнениям некоторого частного вида); как общеизвестных, так и экзотических (например, с помощью номограмм или геометрическими построениями циркулем и линейкой [3]). К основным методам решения квадратных уравнений обычно относят:

– через дискриминант (включая сокращенный дискриминант);
– выделение полного квадрата;
– разложение на множители (включая метод группировки);
– по теореме Виета (включая переброску старшего коэффициента);
– метод коэффициентов.

Описание всех этих методов приведено в [3]. Предполагается, что читатель данной статьи знаком с основными методами и умеет их применять.

Изучение основных методов важно не только с точки зрения овладения техникой быстрого и безошибочного решения любого квадратного уравнения, но и с точки зрения развития творческого критического мышления учащихся, необходимого как для выбора метода решения, так и для понимания возможности обобщения этих методов (например, при решении алгебраических уравнений высших порядков с действительными коэффициентами или при решении квадратных уравнений с комплексными коэффициентами).

Наиболее популярным у российских учащихся является метод нахождения корней квадратного уравнения по вычислительной формуле, содержащей дискриминант. Этот метод позволяет не только вычислить корни, но и сделать заключение о количестве действительных корней уравнения. Абсолютная универсальность данного метода делает его привлекательным для учащихся со слабой подготовкой: некоторые студенты (особенно те, кто давно закончил школу) через дискриминант успешно решают и неполные квадратные уравнения (например, $2x^2+3x=0$ или $4x^2-9=0$).

Более того, идея дискриминанта позволяет доступно объяснить понятия кратности корня (при нулевом дискриминанте два различных корня как бы сливаются в один «двойной» корень) и комплексного числа (при отрицательном дискриминанте можно пользоваться той же любимой формулой, если придумать способ записи для новых чисел, являющихся квадратными корнями из отрицательных чисел). Необходимость оперирования понятиями кратного корня и комплексного числа возникает, например, при изучении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому в инженерных вузах при дефиците часов часто приблизительно таким способом «на пальцах» и вводятся эти понятия.

Также метод дискриминанта применим для квадратных уравнений с комплексными коэффициентами, при этом символ «плюс-минус» в формуле можно опускать, считая, что квадратный корень из ненулевого комплексного числа принимает два противоположных значения. Например, сокращенный дискриминант уравнения $(2-3i)x^2+(4+2i)x+i=0$ равен $2i$, а так как $\sqrt{2i}=\pm(1+i)$, то $x_{1,2}=\frac{-2-i\pm(1+i)}{2-3i}$, откуда $x_1=-i$ и $x_2=\frac{-2-3i}{13}$.

Метод дискриминанта фактически является краткой записью метода выделения полного квадрата, так как вывод формулы корней квадратного уравнения через дискриминант представляет собой процедуру выделения полного квадрата, реализованную в общем «буквенном» виде. Метод полного квадрата настолько же универсален, как и дискриминант, но выделять полный квадрат при решении каждого уравнения долго и громоздко, быстрее и удобнее воспользоваться готовым общим преобразованием, т. е. формулой через дискриминант. Этот недостаток метода выделения полного квадрата, к сожалению, часто приводит к тому, что в школе он изучается вскользь.

Однако на самом деле обучать этому методу необходимо, так как умение выделять полный квадрат чрезвычайно полезно при решении многих задач высшей математики, например, при составлении канонических уравнений кривых второго порядка (в частности, окружности), при интегрировании некоторых рациональных дробей, при приведении квадратичных форм к каноническому виду.

Для большинства школьников, как правило, неубедительны ссылки на то, что сейчас на уроках им придется осваивать неудобный метод из-за будущей полезности этого метода при обучении в вузе (тем более что интернет предлагает им быстрый вариант готовой формулы). Поэтому целесообразно приводить примеры уравнений, в которых удобнее выделять полный квадрат, чем вычислять дискриминант, например, для уравнений $121x^2+286x+168=0$ и $\frac{36}{49}\cdot x^2+1\frac{11}{21}\cdot x+\frac{64}{81}=0$ быстрее заметить их преобразования к виду $(11x+13)^2-1=0$ и $\left(\frac{6}{7}x+\frac{8}{9}\right)^2=0$, чем вычислять дискриминант. Еще более эффектно идея выделения полного квадрата выглядит при решении некоторых неквадратных уравнений, например, уравнение $x^6+x^4-2x^3-2x^2+2=0$ сводится к виду $(x^3-1)^2+(x^2-1)^2=0$, а уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}=5$ – к виду $\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\left(\sqrt{x-1}+2\right)=5$. Можно выделять полный квадрат трех и более слагаемых, т. е. применять формулы типа $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, например, уравнение $x^4+2x^3+5x^2+4x-5=0$ таким образом сводится к $(x^2+x+2)^2-9=0$.

Кроме того, выделение полного квадрата обобщается на выделение более высоких степеней. Например, в уравнении $8x^3-12x^2+6x+7=0$ можно выделить полный куб $(2x-1)^3+8=0$, в уравнении $x^4+4x^3+6x^2+5x+2=0$ – полную четвертую степень $(x+1)^4+(x+1)=0$.

Метод разложения на множители традиционно применяется при решении неполных квадратных уравнений. Однако в последнее время он становится популярным у российских учащихся и при решении полных уравнений, при этом используется группировка, заключающаяся в таком представлении второго члена уравнения в виде суммы двух слагаемых, при котором из двух пар образовавшихся слагаемых выносятся одинаковые общие множители. Растущая популярность этого метода, по-видимому, обусловлена тем, что этот метод широко практикуется в зарубежных школах (под названием factoring quadratics в США и factorising quadratics в Великобритании [4]), и этот метод запрограммирован в большинстве приложений и онлайн-сервисов по пошаговому решению математических задач (в частности, в наиболее популярном бесплатном мобильном приложении Photomath).

Заметим, что широкое распространение ресурсов типа Photomath привело к серьезной проблеме нецелесообразности оценивания достижений учащихся, основываясь на качестве выполнения ими домашних заданий (это глобальная проблема, относящаяся к широкому классу навыков, а не только к уравнениям). Маркером, помогающим определить несамостоятельность выполнения задания учащимся, как раз можно считать применение факторизации при решении квадратных уравнений. Действительно, большинство студентов не могут объяснить, почему они именно таким образом разложили второй коэффициент на слагаемые, а это означает, что данный пример был бездумно переписан из интернета. Однако иногда попадаются студенты, реально освоившие метод факторизации и успешно пользующиеся им!

В традиционном школьном российском образовании метод факторизации заменяется практически равносильным ему методом применения теоремы Виета (и переброской старшего коэффициента, если уравнение неприведенное). Отличие состоит только в том, что при факторизации подбираются числа, противоположные корням, а в теореме Виета – сами корни. При этом факторизация выполняется немного дольше, так как требуется разложить трехчлен на множители и найти корни двух линейных уравнений, а в теореме Виета корни находятся сразу из системы уравнений (и правилом деления на переброшенный старший коэффициент для неприведенных уравнений).

Например, при факторизации уравнения $6x^2 + 17x + 5 = 0$ подбираются числа с суммой 17 и произведением 30, это 15 и 2. Тогда $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + 15x + 2x + 5 = 3x(2x + 5) + (2x + 5) = (3x + 1)(2x + 5) = 0$. Если же пользоваться теоремой Виета (более строго, теоремой, обратной теореме Виета) и переброской старшего коэффициента, то корни уравнения $y^2 + 17y + 30 = 0$ находятся из системы $\begin{cases} y_1 + y_2 = -17, \\ y_1 y_2 = 30, \end{cases}$ откуда $y_1 = -15$ и $y_2 = -2$. Тогда $x_1 = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$ и $x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

При изучении методов факторизации и теоремы Виета учащимся обязательно нужно объяснять ограниченность сферы применения этих методов. А именно, данные методы эффективны при решении квадратных уравнений только в том случае, когда: 1) коэффициенты уравнения являются целыми; 2) уравнение имеет два действительных корня (или один корень кратности два, который в этих методах рассматривается как два одинаковых корня); 3) корни уравнения являются рациональными; 4) произведение старшего коэффициента и свободного члена имеет сравнительно немного целых делителей (т. е. модуль этого произведения несложно раскладывается на простые множители).

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих эти ограничения. Уравнение $x^2 - 54x + 504 = 0$ хотя и решаемо факторизацией или теоремой Виета, но эти методы здесь вряд ли можно назвать удобными, так как даже опытному учителю сложно быстро увидеть, что 504 = 42·12 и 54 = 42 + 12. Коэффициенты уравнения $x^2 - 2x - 18 = 0$ по модулю невелики, но методы факторизации и теоремы Виета здесь неэффективны, так как корни этого уравнения иррациональны $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$ (хотя, конечно же, сами методы остаются математически корректными, т. е. сумма и произведение этих корней дают второй коэффициент с противоположным знаком и свободный член соответственно). Уравнение же $x^2 - 8x + 20 = 0$ не имеет действительных корней, поэтому факторизация и теорема Виета для ученика, не знающего комплексных чисел, здесь абсолютно бесполезна, а для тех, кто владеет комплексными числами, быстрее применить формулу через дискриминант или выделить полный квадрат.

Однако при этом стоит отметить, что иногда идеи теоремы Виета и переброски старшего коэффициента позволяют быстро «в уме» решать квадратные уравнения и с весьма большим по модулю произведением старшего коэффициента и свободного члена, если при решении догадаться не вычислять напрямую это произведение. Например, уравнение $56x^2 - 46x + 9 = 0$ после переброски имеет вид $y^2 - 46y + 56 \cdot 9 = 0$, и если заметить, что 56·9 = 28·18 и 28 + 18 = 46, то $y_1 = 28$ и $y_2 = 18$, а значит, $x_1 = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.

С точки зрения возможных дальнейших применений и обобщений знание обоих методов (факторизация и теорема Виета) крайне полезно! Действительно, идея факторизации лежит в основе классического метода решения уравнений высших степеней с целыми коэффициентами. Ведь если удается подобрать корень x_0 алгебраического уравнения (а рациональные корни удобно подбирать, пользуясь тем фактом, что у любого такого корня, записанного в виде несократимой дроби, числитель является делителем свободного члена, а знаменатель – делителем старшего коэффициента), то теорема Безу утверждает, что многочлен можно разложить на множители, один из которых равен $(x - x_0)$, а второй находится делением исходного многочлена на этот двучлен. Например, уравнение $2x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = 0$ имеет рациональный корень $x_0 = -\frac{1}{2}$, откуда деля «уголком» или по схеме Горнера получаем, что $2x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x - 6) = 0$.

Идея факторизации иногда помогает даже в тех случаях, когда уравнение не имеет рациональных корней. Например, для решения уравнения $x^4 - x^3 + 5x - 3 = 0$ предположим, что его левая часть раскладывается в произведение квадратных трехчленов с целыми коэффициентами. Тогда раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве $x^4 - x^3 + 5x - 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + 3)$, находим, что $a = 1$ и $b = -2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 3 = 0. \end{array}\right.$

Также важно отметить, что в некоторых задачах процедура разложения на множители даже более важна, чем вычисление корней многочлена. Например, при сокращении дробей или приведении дробей к общему знаменателю.

Теорема Виета полезна, если требуется найти не сами корни, а какие-либо выражения, несложно выражающиеся через сумму и произведение корней. Например, в задаче: «Докажите, что уравнение $2x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. Вычислите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$». Теорема Виета также эффективна при решении многих заданий с параметром, так как она позволяет сформулировать условия на коэффициенты квадратного уравнения, равносильные положительности или отрицательности корней этого уравнения. Например: «Найдите значения параметра a, при которых уравнение $9^x(a - 4) + 3^x(a + 1) + 2a - 1 = 0$ имеет два действительных корня» [3].

Известно, что теорема Виета обобщается на алгебраические уравнения высших степеней [4]. В некоторых случаях ее применение позволяет красиво исследовать вопрос о количестве корней. Например: «Докажите, что не все корни уравнения $x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 0$ являются действительными числами». Найдем сумму квадратов корней этого уравнения: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2 < 0$. Противоречие, значит, не все корни этого уравнения действительные числа.

Особенно эффектно применение теоремы Виета и факторизации при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов от дробно-рациональных функций, так как в этом случае один из корней уже известен. Например, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-10x+21}{x^3-6x^2+11x-6}$. Вычисление предела начинается с подстановки, из которой убеждаемся, что $x = 3$ является корнем числителя и знаменателя. Тогда зная, что произведение корней числителя равно 21, а сумма корней знаменателя и произведение равны 6, получаем $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-10x+21}{x^3-6x^2+11x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x-1)(x-2)} = -2$.

Метод коэффициентов является наиболее специальным, так как применим только для тех квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, для которых выполняется одно из равенств $a \pm b + c = 0$. Однако изучение метода коэффициентов оправданно тем, что подобные уравнения довольно часто встречаются в вариантах различных экзаменов, тестов и олимпиад, а незнание данного метода отнимает много времени и повышает вероятность вычислительной ошибки при решении уравнений типа $13x^2 + 41x + 28 = 0$. Также понимание сути метода коэффициентов (а именно, что сумма коэффициентов многочлена равна его значению в единице) помогает при решении некоторых олимпиадных задач. Например: «Найдите сумму коэффициентов многочлена $(3x - 5)^9 + (5 - 7x)^7(3x + 1)$, записанного в стандартном виде».

В заключение хочется отметить, что основной целью данной статьи является обоснование необходимости изучения как можно большего количества методов решений квадратных уравнений. Ведь учащиеся, владеющие только вычислительной формулой через дискриминант, в любом конкурентном конкурсе (включая ЕГЭ) будут проигрывать по времени и точности учащимся, владеющим другими методами. Более того, знание многих методов поможет учащимся при изучении новых разделов математики и будет способствовать осознанию ими взаимосвязи между различными разделами математики и возможностью развития и обобщения элементарных идей при решении более сложных задач.

Список литературы

1. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. М. : Илекса, 2005. 328 с.

2. *Гриншпон И. Э., Гриншпон С. Я.* Многочлены от одной переменной (теория и приложения). Томск : Изд-во ТУСУРа, 2011. 80 с.

3. *Карпенко Н. В.* Нестандартные методы решения квадратных уравнений // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» : сб. статей. Томск : Издательский дом ТГУ, 2017. С. 229–237. URL: http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2015/03/Published.pdf.

4. Factorising quadratics // Хостинг математических ресурсов Mathcenter. URL: https://www.math-centre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-factorisingquadratics-2009-1.pdf.

On various methods of solving quadratic equations

I. E. Grinshpon[1], Ya. S. Grinshpon[2]
[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics,
Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Russia, Tomsk. E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru
[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of General Mathematics,
Tomsk State University. Russia, Tomsk. E-mail: grinshpon@mail.ru

Abstract. The article discusses various methods for solving quadratic equations. The most popular basic methods are highlighted: a computational formula through a discriminant, the allocation of a full square, factorization, the Vieta theorem, the method of coefficients. For these methods, a comparative analysis of their application in various situations is given. The possibility of generalizing these methods for solving other problems of elementary and higher mathematics is shown. For each basic method, the importance of studying it is justified both for gaining an advantage in the speed and accuracy of solving quadratic equations, and for further training in solving other more complex problems.

Keywords: algebraic equations, discriminant, Vieta's theorem, factorization.

References

1. *Gornshtejn P. I., Polonskij V. B., Yakir M. S. Zadachi s parametrami* [Problems with parameters]. M. Ilexa. 2005. 328 p.
2. *Grinshpon I. E., Grinshpon S. Ya. Mnogochleny ot odnoj peremennoj (teoriya i prilozheniya)* [Polynomials in one variable (theory and applications)]. Tomsk. TUSUR publishing house. 2011. 80 p.
3. *Karpenko N. V. Nestandartnye metody resheniya kvadratnyh uravnenij* [Non-standard methods of solving quadratic equations] // *Vserossijskaya molodezhnaya nauchnaya konferenciya "Vse grani matematiki i mekhaniki" : sb. statej* – All-Russian youth scientific conference "All facets of mathematics and mechanics" : collection of articles. Tomsk. TSU publishing house. 2017. Pp. 229–237. Available at: http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2015/03/Published.pdf.
4. Factorising quadratics // Hosting of mathematical resources Mathcenter. Available at: https://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-factorisingquadratics-2009-1.pdf.