УДК 512 DOI 10.25730/VSU.0536.22.016

Использование функционального подхода при решении задач с параметрами

Е. С. Трефилова[1], З. В. Шилова[2]

[1]старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

[2]кандидат педагогических наук, доцент кафедры гуманитарных и естественных наук, Дмитровский институт непрерывного образования филиал «Университет «Дубна». Россия, г. Дмитров. ORCID: 0000-0003-1715-2513. E-mail: zoya@soi.su

Аннотация. В статье рассматривается применение функционального метода решения задач с параметрами. В частности, показано применение таких свойств функций, как монотонность, области определения и значений функций, экстремальные значения функции – наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, показаны примеры использования четности и обратимости функции. В статье приведено большое количество примеров, в некоторых указано несколько способов решения. Приведенная подборка задач будет полезна при подготовке к экзаменам за курс полной школы, а также для итогового повторения материала.

Ключевые слова: функциональный подход, параметр, свойства функции: область определения, монотонность, множество значений функции.

Одним из важных понятий математической науки является понятие функции, поэтому в школьном курсе математики функция изучается, начиная с 7-го класса. В свою очередь, в научной и методической литературе говорится о необходимости и важности применения функционального подхода при решении различного рода математических задач, например, уравнений и неравенств. Заметим также, что линии уравнений и неравенств и функциональная тесно связаны между собой. Примерами такой связи могут служить задачи на нахождение области определения функций, например, функций, составленных из нескольких элементарных, промежутков знакопостоянства, нулей функции и т. п. Аналогично, и функциональная линия оказывает существенное влияние на содержание и стиль изучения линии уравнений и неравенств, так, в УМК Мордковича А. Г. линия уравнений и неравенств подчинена линии функциональной, при этом идея функционального подхода в школьных учебниках полностью не реализована. Прежде всего, это проявляется в отсутствии целостной системы задач, которая бы позволила осуществлять их отбор и составление, адекватной содержанию изучаемого материала, и способствовала бы организации учебно-познавательной деятельности учащихся. А эффективность обучения зависит от возможности отбора, конструирования, организации задач, поэтому их должно быть много. Задачи, в решении которых используются свойства функций, считаются для школьников трудными. И хотя во многих учебных пособиях и статьях приводятся примеры уравнений, неравенств и задач, в решении которых используются свойства входящих в них функций, методические проблемы, связанные с ними, не разработаны, практически не встречаются в литературе методические рекомендации для школьников и учителей.

Между тем в последние годы любая итоговая аттестация учеников по математике – ОГЭ или ЕГЭ – во второй части обязательно содержит решение задачи с параметром.

Если за основную школу предлагаются несложные для решения задачи (из формулировки чаще всего понятен способ ее решения), которые формулируются в виде «постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях *c* прямая *y=c* имеет с графиком ровно одну общую точку» (демовариант 2022), то задача в ЕГЭ предлагается более сложная и по ее виду не всегда очевиден путь ее решения.

Рассмотрим один из способов решения задач с параметром, основанный на применении некоторых свойств функции, изучаемых в курсе математики 7–11 класса.

Функционально-графический способ можно условно разделить на графический способ, в котором при решении уравнения (неравенства) используются графики функций или их части. Использование графического метода целесообразно, например, при решении задач, в которых необходимо определить число решений уравнения, найти приближенное решение уравнения, а также в качестве одного из способов поиска решения задачи. Вторая часть метода предполагает использование свойств функции, при этом графики в решении могут как присутствовать, так и отсутствовать. В нашей статье мы подробно остановимся на применении второй части функционально-графического метода – использовании свойств функции.

Классифицируем задачи по пунктам исследования функции.

Любое исследование функции, как известно, начинается с нахождения *области определения*.

Пример. Найти все действительные значения a, при которых область определения функции $f(x)=\sqrt{1-\log_{5+4a-a^2}(5-a)-\log_{5+4a-a^2}(4+\sin x)}$ совпадет с множеством всех действительных чисел.

Решение. Областью определения функции является множество действительных чисел, то есть функция должна быть определена в любой точке, и задача сводится к нахождению параметра a. Для этого нужно составить и решить систему:

$$\begin{cases} 5+4a-a^2>0, \\ 5+4a-a^2\neq 1, \\ 5-a>0, \\ \log_{5+4a-a^2}\left(\dfrac{a+1}{4+\sin x}\right)\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-a)(a+1)>0, \\ a\neq 2\pm 2\sqrt{2}, \\ 5>a, \\ (4+4a-a^2)\left(\dfrac{a+1}{4+\sin x}-1\right)\geq 0. \end{cases}$$

Учитываем условие $a<5$, тогда решением последнего неравенства системы будет служить интервал $(-1;-2\sqrt{2})$.

Ответ: при $a\in(-1;-2\sqrt{2})$ условие выполняется.

Однако не всегда отсылка к нахождению области определения бывает явной, и чаще всего такая необходимость возникает в процессе решения задачи. Дополнительное исследование области определения позволяет ввести замену, с помощью которой уравнение (неравенство) решится достаточно просто.

Пример. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{1-x^2}>a-x$ имеет решение?

Решение. Предложенное неравенство является иррациональным, традиционным способом его решения является возведение в квадрат. Однако возведение в квадрат в данном случае осуществить проблематично, так как сложно из-за параметра сделать оценку правой части. Поэтому попробуем преобразовать подкоренное выражение так, чтобы можно было извлечь корень.

Найдем ограничения на переменную: $|x|\leq 1$. Заметим, что переменная принимает значения из ограниченного промежутка, данный промежуток является областью значений функций косинус и синус. Введем тригонометрическую подстановку $x=\cos\alpha,\quad \alpha\in[0;\pi]$.

Тогда

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha}>a-\cos\alpha \text{ или } |\sin\alpha|>a-\cos\alpha.$$

Но так как $\alpha\in[0;\pi]$, то $\sin\alpha\geq 0$, следовательно,

$$a<\sin\alpha+\cos\alpha,$$

$$|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq\sqrt{2}.$$

Заметим, что, так как $\alpha\in[0;\pi]$, то $\max\left(\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\quad\Rightarrow a<\sqrt{2}$.

Ответ: $a<\sqrt{2}$.

Область (множество) значения функции и связанная с ним ограниченность функции встречается в задачах реже, чем область определения. Для решения уравнений и неравенств, в том числе с параметром, область значений используется нечасто, так как по виду функции не всегда ее можно найти.

Однако введение новой переменной позволяет получить ограниченную функцию, например, квадратичную или тригонометрическую функцию, что облегчает поиск решения задачи.

Пример. Решить уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}=a$.

Решение. Областью допустимых значений переменной является отрезок [–1; 1], поэтому можно ввести тригонометрическую подстановку $x=\cos\alpha, \quad \alpha\in[0;\pi]$.

После подстановки новой переменной и преобразований получаем:

$$\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\sin\alpha=a,\ \sin4\alpha=4a.$$

Уравнение имеет решение при $|a|\le\frac{1}{4}$ и его корнями являются числа вида $\alpha=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin4a+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$, так как $\alpha\in[0;\pi]$, то рассмотрим три случая:

1) a=0, тогда $\alpha=\frac{\pi k}{4},\ k=0,1,2,3,4.$

2) $-\frac{1}{4}\le a<0$, $\alpha=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin4a+\frac{\pi k}{4},\ k=1,2,3,4.$

3) $0<a\le\frac{1}{4}, \alpha=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin4a+\frac{\pi k}{4},\ k=0,1,2,3.$

Ответ: если $-\frac{1}{4}\le a<0$, то $x=\cos\left((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin4a+\frac{\pi k}{4}\right),\ k=1,2,3,4,$

если a=0, то $x=\cos\frac{\pi k}{4}, k=0,1,2,3,4,$

если $0<a\le\frac{1}{4}$, то $x=\cos\left((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin4a+\frac{\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$

Приведем еще один пример использования тригонометрической подстановки.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{p-x}+\sqrt{p+x}=x$.

Решение. Область допустимых значений – $|x|\le p$, тогда $x=p\cos\alpha, \quad \alpha\in[0;\pi]$, получаем равносильное уравнение:

$$\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=\sqrt{p}\cos\alpha.$$

В силу того, что $|x|\le p$, то $p\ge0$. Тогда

1) если p=0, то $\sqrt{-x}+\sqrt{+x}=x\Rightarrow x=0$.

2) если p> 0, то возведения в квадрат, получаем уравнение

$$p\sin^2\alpha+2\sin\alpha+2-p=0,$$

корнями которого являются $\sin\alpha=-1$ или $\sin\alpha=\frac{p-2}{p}$.

- $\sin\alpha=-1$, то x=0 и p=0;
- $\sin\alpha=\frac{p-2}{p}$, то $x=p\cos\alpha=p\sqrt{1-\left(\frac{p-2}{p}\right)^2}==p\sqrt{\frac{4p-4}{p^2}}=\sqrt{4p-4}.$

Ответ: если $p<0$, решений нет;

если $p=0, x=0$;

если $p>0, x=\sqrt{4p-4}$.

К экстремальным свойствам функции можно отнести наибольшее и наименьшее значение функции, а также ее максимум и минимум. При этом в задаче может требоваться найти максимальное (минимальное) значение функции на промежутке или применяться в поиске решения задачи.

Для нахождения наибольшего или наименьшего значений функции можно применить неравенство между средними арифметическим и геометрическим, свойства квадратичной функции, свойства взаимно-обратных величин.

Пример. Найти наибольшее значение величины b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geq -\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Очевидно, что при b=0 решение есть. Значит, будем полагать, что b>0. Тогда

$$\sqrt{b^5}(x-4)^2+\frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2}\leq \frac{2}{3}b|\cos\pi x|.$$

Используя неравенство Коши для средних – $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, если $a\geq 0$ и $b\geq 0$ – получаем:

$$\sqrt{b^5}(x-4)^2+\frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2}\geq 2b\sqrt{b}.$$

При этом равенство будет достигаться при $x=4\pm\dfrac{\sqrt{b}}{b}$.

Следовательно, исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, если

$$2b\sqrt{b}\leq \frac{2}{3}b|\cos\pi x|\text{, т. к. } b>0\text{, то } b\leq\frac{1}{9}\cos^2\pi x\Rightarrow b\leq\frac{1}{9}.$$

Легко можно убедиться, что при $b=\dfrac{1}{9}$ первоначальное неравенство имеет решения, например, $x=7$.

Ответ: $b=\dfrac{1}{9}$.

Использование *монотонности, а именно возрастания и убывания* функции при решении задач используется чаще всего. На основе этого свойства основан метод оценки левой и правой части, который применяется, например, при решении некоторых тригонометрических уравнений.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-a}=\sqrt[3]{a}$.

Решение. Функция $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-a}$, стоящая в левой части уравнения, монотонно возрастает, а значение правой части уравнения фиксировано, поэтому если уравнение имеет решение, то только одно. Легко заметить, что a является корнем.

Ответ: $x=a$.

В следующем примере требуется небольшое преобразование и исследование функции.

Пример. Определить число корней уравнения $\sqrt{3x-5}=b-\sqrt{3x+11}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}=b$.

Поскольку функция $f(x)=\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}$ возрастает на $D(f)=\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$, то $f(x)\geq f\left(\dfrac{5}{3}\right)=4$ и, стало быть, $E(f)=[4;+\infty)$.

Исходное уравнение имеет не более одного корня. При $b\geq 4$ он единственен.

Ответ: если $b\geq 4$, то уравнение имеет единственный корень; если $b<4$, то корней нет.

Приведенный пример показывает самое простое применение монотонности. Приведем примеры, когда сначала требуется ввести функцию и затем исследовать ее монотонность.

Пример. Для $0<a<\dfrac{1}{4}$ решить уравнение

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде, выделив полный квадрат,

$$(x+a)^2+\frac{1}{16}-a^2=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$$

Введем новую переменную $\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}=t,\, t>0 \Rightarrow x-t^2=\frac{1}{16}-a^2$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$(x+a)^2+x-t^2=-a+t,\ (x+a)^2+x+a=t^2+t.$$

Исследуя функцию $f(y)=y^2+y$ на монотонность, получаем, что она возрастает на промежутке $[-\frac{1}{2};+\infty)$. Условие существования функции $t(x)$ - $x\geq\frac{1}{16}-a^2$ и $0<a<\frac{1}{4}$, то $x+a>0$. Следовательно, принадлежат промежутку монотонности функции $f(y)$.

Тогда $x+a=t$, т. е. $\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}=x+a \Rightarrow x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. Сопоставим с исходным и получим $x^2+2ax+\frac{1}{16}=x$.

Для $0<a<\frac{1}{4}$ полученное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант и $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{4a^2-4a+\frac{3}{4}}}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}\left(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16a+3}\right)$.

Покажем, как можно использовать свойства монотонности для решения неравенства.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_a(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)-\log_a 3\leq 0$$

имеет одно решение.

Решение. Проведем необходимые преобразования в левой части неравенства:

$$\frac{\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5((x^2+ax+5)+1)}{\log_3 a}-\frac{1}{\log_3 a}\geq 0.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $0<a<1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\geq 1.$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\log_3(\sqrt{t}+1)\cdot\log_5(t+1)$, она возрастает на всей области определения, отметим, что $f(4)=\log_3 3\cdot\log_5 5=1$.

Тогда на полученное неравенство можно смотреть так $f(x^2+ax+5)\geq f(4)$, следовательно, $x^2+ax+5\geq 4,\ x^2+ax+1\geq 0$. Однако, это неравенство на указанном промежутке не имеет корней, поэтому и единственного корня не будет.

2) если a>1, то получаем $\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\le 1$. Придерживаясь схемы рассуждений первого случая, легко установить, что это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+ax+5\ge 0, \\ x^2+ax+5\le 4. \end{cases}$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо, чтобы дискриминант второго неравенства системы был неотрицательным. Если он положительный, то найдутся корни соответствующего уравнения, причем для них неравенство $x^2+ax+5=x^2+ax+1+4>0$. Поэтому полученная система будет иметь по крайней мере два решения x_1 и x_2, что нас не устраивает. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда дискриминант $a^2-4=0$, а с учетом $a>1$ достаточно проверить a=2. Подставив a=2, получим систему, имеющую одно решение.

Ответ: a=2.

Использование *четности, периодичности и обратимости* функции встречается в задачах очень редко. Однако их применение в некоторых случаях приводит к более быстрому решению задачи. Продемонстрируем на примерах.

Пример. Указать все значения параметра a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решения.

Решение. Введем новую переменную $t=\sqrt{a+\sin x}$, $t\ge 0$ и запишем систему для решения уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{a+t}=t^2-a, \\ 0\le t. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y=t^2-a$ при $t\ge 0$. Отметим, что эта функция обратима и обратной к ней является функция $y=\sqrt{t+a}$, учтем, что все общие точки взаимно обратных функций лежат на прямой y=t. Из уравнения $t^2-a=t$ получаем ответ.

Ответ: $a\ge -\dfrac{1}{4}$.

Пример. Решить уравнение $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$.

Решение. Введем в рассмотрение функции $f(a)=a^5+x$ и $g(a)=\sqrt[5]{a-x}$. Данные функции являются возрастающими и взаимно обратными. Тогда $a^5+x=a$ равносильно исходному.

Ответ: $x=a-a^5$.

Приведем еще одно решение уравнения, но уже с использованием свойств обратимости функции.

Пример. Для $0<a<\dfrac{1}{4}$ решить уравнение

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}.$$

Решение. Очевидно $x\ge\dfrac{1}{16}-a^2$ и согласно условию, то x>0. Рассмотрим функцию $y=x^2+2ax+\dfrac{1}{16}$. Она строго возрастает на $[-a;+\infty)$, поэтому при $x\ge\dfrac{1}{16}-a^2$ эта функция обратима, обратной для нее будет функция $y=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$. Отсюда

$x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. Заметим, что мы использовали функцию, стоящую в правой части уравнения, т. к. выбор такой функции не повлиял на область допустимых значений первоначального уравнения.

Ответ: $x=\frac{1}{4}(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16a+3})$.

Таким образом, хорошее знание свойств функций, а также свойств конкретных элементарных функций позволяет применять их при решении задач с параметрами. Регулярное использование в учебном процессе функционального подхода при решении задач позволяет сформировать у обучающихся целостную картину восприятия математики, развивать математическую культуру.

Using a functional approach to solving problems with parameters

E. S. Trefilova[1], Z. V. Shilova[2]
[1]senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru
[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Humanities and Natural Sciences,
Dmitrov Institute of Continuing Education branch "Dubna University".
Russia, Dmitrov. ORCID: 0000-0003-1715-2513. E-mail: zoya@soi.su

Abstract. The article discusses the application of a functional method for solving problems with parameters. In particular, the application of such properties of functions as monotonicity, areas of definition and values of functions, extreme values of a function – the largest and smallest values of a function on a segment is shown, examples of the use of parity and reversibility of a function are shown. The article contains a large number of examples, some of them indicate several solutions. The given selection of tasks will be useful when preparing for exams for a full school course, as well as for the final repetition of the material.

Keywords: functional approach, parameter, function properties: domain of definition, monotonicity, set of function values.