УДК 511.343(091) DOI 10.25730/VSU.0536.22.017

В поисках доказательства Великой теоремы Ферма

Т. Л. Анисова[1], В. И. Дудин[2], Д. С. Павлов[3]
[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-3755-5718. E-mail: bolashova1@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент. Россия, г. Москва.
ORCID: 0000-0002-8414-4612. E-mail: olgapavru@yandex.ru
[3]магистрант, Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт».
Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-6714-1161. E-mail: denpav98@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены и доказаны утверждения, связанные с поиском доказательства Великой теоремы Ферма. Материал, изложенный в статье, может быть полезен школьникам и студентам, интересующимся математикой, а также руководителям математических кружков и факультативов.

Ключевые слова: математический кружок, дополнительное образование, теорема Ферма.

Французский математик XVII в. Пьер Ферма (Pierre Fermat) считается отцом современной теории чисел. Первые достижения этой науки возникли при попытке решения ряда задач, им же и поставленных.

В 1670 г. сын Пьера Ферма издал книгу «Арифметика» александрийского математика Диофанта. В издании содержались примечания Пьера Ферма, оставленные им на полях одного из экземпляров этого сочинения.

Одно из этих примечаний и содержит предложение, получившее название Великой теоремы Ферма.

Если n означает какое угодно целое положительное число больше нежели 2, то уравнению $x^n + y^n = z^n$ не могут удовлетворять никакие три целых положительных числа x, y, z.

Ферма на полях книги записал: «Я нашел удивительное доказательство этого предложения, но поля книги слишком узки, чтобы оно могло на них поместиться» [2]. Таким образом, доказательство, которым обладал сам Ферма, осталось необнародованным.

А. Я. Хинчин в своей книге «Великая теорема Ферма» (1927 г.) [2] дал необходимые справки, касающиеся проблемы Ферма, ее истории, привел доказательство для случая $n = 4$ и краткий обзор других важнейших результатов (по состоянию на 1925 г.). Материалы, изложенные в книге, могут быть интересны студентам вузов и учащимся школ, увлекающимся математикой. В данной статье содержатся утверждения и их доказательства, которые могут быть использованы для занятий на факультативах по математике, в школьных и студенческих математических кружках [1].

Прежде всего мы замечаем, что числа x, y, z мы вправе считать попарно, не имеющими общих делителей. Если бы какие-нибудь два из них, например, x и y, имели какой-нибудь общий делитель $t > 1$, то, как показывает уравнение $x^n + y^n = z^n$, и z должно было делиться на t, так что все уравнение можно было бы сократить на t^n. Поэтому предполагаем, что числа x, y, z попарно не имеют общих делителей.

Предположим, что есть три числа x, y, z, которые являются решениями уравнения

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1}$$

где n – простое число ($n > 2$).

Если предположить, что $x = y$ есть решение уравнения (1), то $2x^n = z^n$. Поэтому z – четное число и $z = 2z_1$, $2x^n = 2^n z_1^n \Rightarrow 2x^n = 2^{n-1} z_1^n$, то x – четное число, что противоречит тому, что x, y, z попарно не имеют общих делителей.

Далее будем считать, что $x < y$.

По формуле Бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = \underline{x^n} + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + \underline{y^n}.$$

$$x^n + y^n = z^n < (x+y)^n \Rightarrow z < x + y. \quad (2)$$

Итак, имеем $x < y < z < x + y$.

Ясно, что $z = x + t < x + y$, $t < y$ (3)

$$x^n + y^n = z^n = (x+t)^n = x^n + nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \ldots + nxt^{n-1} + t^n,$$

откуда имеем

$$y^n = nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \ldots + nxt^{n-1} + t^n. \quad (4)$$

Так как правая часть делится на t, то y делится на t.

Если $t = 1$, то $z = x + 1$ и тогда

$$x < y < x + 1.$$

Не существует целого числа между двумя последовательными целыми числами, поэтому t не может быть равно единице.

Пусть $t \neq 1$, тогда из соотношений (3), (4) следует, что $y = t \cdot a$. Подставим $y = t \cdot a$ в (4)

$$a^n t^n = nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \ldots + nxt^{n-1} + t^n.$$

Сократим на t, получим

$$a^n t^{n-1} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t + \ldots + nxt^{n-2} + t^{n-1}. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что либо x^{n-1} делится на t, либо n делится на t.

1) Если x^{n-1} делится на t, то это означает, так как y делится на t, что x и y делятся на t. Это противоречит условию о том, что x, y не имеют общих делителей.

2) Если n делится на t, то это означает, что $t = n$, так как n – простое число. Тогда соотношение (5) имеет вид

$$a^n n^{n-1} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}n + \ldots + nxn^{n-2} + n^{n-1}.$$

Сокращая на n, получаем:

$$a^n n^{n-2} = x^{n-1} + \frac{(n-1)}{2}x^{n-2}n + \ldots + xn^{n-2} + n^{n-2}. \quad (6)$$

Так как коэффициенты бинома Ньютона C_n^k делятся на n, если n – простое число и $n > 2$.

Из соотношения (6) следует, что x делится на n. Следовательно, x и y делятся на n, что невозможно.

Итак, не существует никаких целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$, где n – простое число ($n > 2$).

Теорема 1. Уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2$$

имеет решение в целых числах.

Доказательство. Имеем $x < y < z$. Положим, $z = x + t$, тогда

$$x^2 + y^2 = (x+t)^2 = x^2 + 2xt + t^2;$$

$$y^2 = 2xt + t^2;$$

$$y = t \cdot a \ (t \neq 1) \Rightarrow a^2t^2 = 2xt + t^2, a^2t = 2x + t.$$

По доказанному выше $n = 2$ делится на $t \neq 1$, следовательно, $t = 2$. Получаем $2a^2 = 2x + 2$.

Итак, $a^2 = x + 1$; $y = 2a$; $z = x + 2$.

Если $x = 3$, то $a = 2$ и $y = 4$, $z = 5$.

$x = 3, y = 4, z = 5$ – решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4, \tag{7}$$

где x, y, z – натуральные числа, решений не имеет.

Доказательство. Как было показано выше, имеем, что x, y, z попарно простые числа, $x = y$ не является решением. Кроме того,

$$x < y < z \tag{8}$$

Положим, $z = x + t$, тогда

$$z^4 = (x+t)^4 = x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получаем:

$$y^4 = 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4. \tag{10}$$

Из последнего соотношения следует, что $y^4 > t^4 \Rightarrow y > t$, y^4 делится на t, значит, y делится на t.

Если $t = 1$, то $z = x + 1$. Из соотношения (8) следует, что $x < y < x + 1$, то есть y заключен между двумя последовательными натуральными числами. Следовательно, $t \neq 1$.

Если $t > 1$ и y делится на t, то $y = ct$. Тогда соотношение (10) имеет вид

$$c^4t^4 = 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4.$$

Сокращая на t, получаем:

$$c^4t^3 = 4x^3 + 6x^2t + 4xt^2 + t^3. \tag{11}$$

Из соотношения (11) заключаем, что либо 4 делится на t, либо x^3 делится на t. Во втором случае x делится на t, то есть x и y имеют общий делитель, чего не может быть.

Итак, 4 делится на t, то есть $t = 2$ или $t = 4$.

1) Если $t = 4$, то соотношение (11) имеет вид

$$c^4 4^3 = 4x^3 + 6x^2 4 + 4x4^2 + 4^3.$$

Сокращая на 4, получаем:

$$c^4 4^2 = x^3 + 6x^2 + x4^2 + 4^2. \tag{12}$$

Из соотношения (12) заключаем, что x – четное число, $x = 2x_1$. Таким образом, x и $t = 4$ имеют общий делитель, но $y = c \cdot 4$, то есть x и y имеют общий делитель 2. Это противоречит условию: x и y взаимно простые числа.

2) Пусть $t=2$. Тогда уравнение (7) имеет вид

$$x^4+y^4=(x+2)^4.$$

Так как $x<y<x+2$, то $y=x+1$.

Итак, уравнение

$$x^4+(x+1)^4=(x+2)^4,$$

где x – натуральное число, должно иметь решение.

Выполним преобразования:

$$x^4+x^4+4x^3+6x^2+4x+1=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$$
$$x^4-4x^3-18x^2-28x-15=0.$$

Так как x – натуральное число, а произведение корней равно (-15), то заключаем, что x может быть равно 1, 3, 5, 15.

Проверим эти значения.

$$\varphi(x)=x^4+(x+1)^4-(x+2)^4;$$
$$\varphi(1)=1+16-81\neq 0;$$
$$\varphi(3)=3^4+4^4-5^4=-278\neq 0;$$
$$\varphi(5)=5^4+6^4-7^4=-488\neq 0;$$
$$\varphi(15)=15^4+16^4-17^4=32640\neq 0.$$

Таким образом, ни одно из значений не является корнем уравнения. Теорема доказана.

Теорема 3. Уравнение

$$x^{2^n}+y^{2^n}=z^{2^n}, \tag{13}$$

где $n>2$, x,y,z – натуральные числа, решений не имеет.

Доказательство. $x^{2^n}+y^{2^n}=z^{2^n}$ можно переписать в виде

$$(x^{2^{n-2}})^4+(y^{2^{n-2}})^4=(z^{2^{n-2}})^4.$$

Это уравнение по теореме 2 решений не имеет, следовательно, уравнение (13) решений не имеет. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теорем использовались следующие утверждения:

1. Если каждое из слагаемых делится на одно и то же число, то их сумма делится на это число;
2. Между двумя последовательными натуральными числами нет натурального числа;
3. Если n – простое число, то коэффициенты бинома Ньютона C_n^k, кроме первого и последнего, делятся на n.

Список литературы

1. *Алфутова Н. Б., Устинов А. В.* Алгебра и теория чисел : сб. задач для математических школ. М. : МЦНМО, 2002. 264 с.
2. *Хинчин А. Я.* Великая теорема Ферма. Изд. 4-е. М. : URSS, 2015. 80 с.

In search of a proof of Fermat's Great Theorem

T. L. Anisova[1], V. I. Dudin[2], D. S. Pavlov[3]

[1]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-3755-5718. E-mail: bolashova1@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor.
Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-8414-4612. E-mail: olgapavru@yandex.ru

[3]graduate student, National Research Nuclear University "Moscow Engineering Physics Institute".
Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-6714-1161. E-mail: denpav98@yandex.ru

Abstract. The article presents and proves the statements related to the search for a proof of Fermat's Great Theorem. The material presented in the article can be useful to schoolchildren and students interested in mathematics, as well as to the heads of mathematical circles and electives.

Keywords: mathematical circle, additional education, Fermat's theorem.

References

1. *Alfutova N. B., Ustinov A. V. Algebra i teoriya chisel : sb. zadach dlya matematicheskih shkol* [Algebra and number theory : collection of problems for mathematical schools]. M. ICNMO. 2002. 264 p.

2. *Hinchin A. Ya. Velikaya teorema Ferma. Izd. 4-e* [Fermat's Great Theorem. Ed. 4th]. M. URSS. 2015. 80 p.