УДК 51(091) DOI 10.25730/VSU.0536.22.018

Об отражении исторического развития комплексного анализа в рамках курса ТФКП

Р. М. Асланов[1], В. В. Сушков[2]

[1]доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник института математики и механики, Национальная академия наук. Азербайджанская Республика, г. Баку. E-mail: r_aslanov@list.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент, начальник учебного управления, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина. Россия, г. Сыктывкар. E-mail: vvsu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена история возникновения и развития теории функции комплексного переменного как отрасли науки и ее влияния на развитие соответствующей учебной дисциплины. В обоих случаях выделены основные этапы исторического процесса, указаны ключевые фигуры, даты, факты, публикации и результаты. Утверждается, что традиционная логика изложения учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. Разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, должна учитывать историю развития дисциплины, но должна опираться на современные образовательные технологии и возможности электронных обучающих средств и ресурсов.

Ключевые слова: теория функций комплексного переменного, комплексный анализ, история математики, учебная дисциплина, этапы развития, образовательные технологии, методическая составляющая.

«Теория функций комплексного переменного» (ТФКП), или «Комплексный анализ» – одна из дисциплин, считающихся сегодня классической и обязательной в рамках образовательных программ высшего образования для подготовки математиков, физиков, инженеров, педагогов и не только. В то же время ее место и значение как в математической науке, так и в математическом образовании были сформированы исторической необходимостью. Более того, можно утверждать, что содержание и логика изложения ТФКП как дисциплины в значительной степени повторяют историю развития ТФКП как научной дисциплины. Эта логика развития понятийного аппарата, повторяемая в рамках учебного курса, позволяет в значительной степени обеспечить логику освоения студентами учебного материала.

Начало развития комплексного анализа как науки принято отсчитывать с работ Джероламо Кардано, в частности, с Artis magnae sive de regulis algebraicis (1545). Значение этой книги в истории математики позже, уже в XX в., описано словами Феликса Клейна: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики». В работе Кардано приведено описание и обоснование приемов решений уравнений третьей и четвертой степени, как известно, открытых и развитых С. дель Ферро, Н. Тарталья и Л. Феррари. Однако обвинять Кардано в плагиате было бы неправомерно, он прямо указывал не только на авторство формул, но и на порядок попадания этих формул в его поле зрения. Несмотря на то, что опубликованные формулы подразумевали использование квадратных корней из отрицательных чисел, сам Дж. Кардано полагал такие величины «софистически отрицательными», бесполезными – и старался не обращаться к ним вне умозрительных построений в рамках развитой теории. Аргументировал свое отношение невозможностью измерения с помощью таких чисел какой-нибудь величины, как и выражения изменения какой-либо реальной величины.

В то же время чисто мыслительный эксперимент итальянских математиков привлек внимание других ученых, в частности, их земляка Р. Бомбелли, который в своей книге (1572) описал первые правила арифметических операций над «невозможными» числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. А вскоре, в 1637 г., появился и термин «мнимые числа», введенный французским математиком и философом Рене Декартом, а спустя еще полтора столетия, в 1777 г., Леонард Эйлер предложил использовать первую букву французского слова imaginaire (мнимый) для обозначения корня из -1. Надо сказать, что сам Декарт полагал какую бы то ни было интерпретацию комплексных чисел бесполезной и писал: «Не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням». Осмысление новой отрасли знания продолжалось, отчасти не столько формализованное, сколько романтизированное (в 1702 г. Г. В. Лейбниц писал: «То, что мы называем мнимым корнем, – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием»).

Впрочем, даже интуитивное использование комплексных чисел зачастую приводило к формулировке важных результатов, как, например, в 1707 г., когда Абрахам де Муавр опубликовал свою знаменитую формулу для вычисления степеней комплексных чисел для положительных целых *n*. А еще до того, в 1685 г., Джон Валлис опубликовал «Трактат по алгебре», в котором кроме всего прочего привел геометрическую интерпретацию комплексных чисел, впрочем, совершенно незамеченную современниками. Комплексные числа все еще оставались для математики «вещью в себе», используясь «по необходимости». Одной из областей таких приложений оказалась гидродинамика – в 1752 г. Жан Д'Аламбер впервые сумел применить комплексный анализ при решении дифференциальных уравнений с частными производными. В его работах появились соотношения между частными производными от действительной и мнимой части аналитической функции, впоследствии названные условиями Коши – Римана, хотя если исходить из принципа первенства, их стоило бы именовать условиями Д'Аламбера – Эйлера. Разработанные Д'Аламбером математический аппарат и методология впоследствии начали применяться в теории потенциала – и далее широко и плодотворно практически повсеместно в гидродинамике и вообще математической физике.

Но все же только с работ Леонарда Эйлера (в частности, с «Введения в анализ бесконечно малых», 1748) в научный обиход вошли и комплексная переменная, и величина *i* – и тогда же началось систематическое освоение математиками возможностей нового аналитического аппарата. Изначально он рассматривал комплексную переменную при решении задачи разложения на линейные сомножители, однако впоследствии дал подробное описание элементарных функций комплексного переменного, а еще позже – условий дифференцируемости и основных положений интегрального исчисления комплексного анализа.

В 1777 г. Эйлер фактически ввел в рассмотрение конформные отображения, называя их «подобными в малом». Отсюда взяло свое начало новое направление приложений комплексного анализа. Продолжая идеи Л. Эйлера, сам термин «конформность» был впервые использован двенадцатью годами позже него академиком Российской академии наук Ф. И. Шубертом, рассматривавшим в связи с астрономией и картографией понятие «конформная проекция» (некоторые историки математики полагают первооткрывателем практического применения конформного отображения стереографической проекции на плоскость Птолемея, описавшего его еще около 150 г.). Дальнейшее развитие теории нашло свое место в работах Ж. Л. Лагранжа – а после того, как в 1797 г. в работе Каспара Весселя «Об аналитическом представлении направлений» была предложена непротиворечивая наглядная геометрическая интерпретация комплексных чисел, начинают появляться работы, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены действия над ними. Достаточно же общая теоретическая трактовка и геометрическая интерпретация была опубликована К.-Ф. Гауссом лишь в 1831 г. [1].

Параллельно в работах того же Гаусса получила свое развитие теория интеграла от функции комплексного переменного. Новая отрасль ТФКП началась с данного им определения интеграла в комплексной плоскости, с доказанной интегральной теоремы о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Чуть позже П.-С. Лаплас использовал комплексные переменные для вычисления отдельных трудных интегралов и развил метод решения разностных и дифференциальных линейных уравнений, известный сейчас под названием метода преобразований Лапласа.

Таким образом, Л. Эйлер и его современники оставили потомкам богатое наследие в виде огромного массива частично систематизированных, но в целом разрозненных фактов из области комплексного анализа. Фактологический материал требовал систематизации в виде единой теории – и вскоре явились математики, сумевшие сформировать стройное здание комплексного анализа, математической отрасли, давшей последователям богатейший инструментарий для применений.

Основные заслуги в создании целостной теории функций комплексного переменного принадлежат О.-Л. Коши, Б. Риману и К. Вейерштрассу. Каждый из них сформировал и развил одно из направлений ТФКП, ныне образующие совместно основное тело комплексного анализа. Каждый из них заложил фундамент огромной области комплексного анализа. Первая такая область получила название «теория моногенных или дифференцируемых функций». Ее отцом-основателем принято считать Огюстена-Луи Коши. Он не только объединил и систематизировал разрозненные факты, доказанные предшественниками в области дифференциального и интегрального исчисления в комплексном анализе, но и сумел разъяснить глубинный смысл и взаимосвязь основных понятий и операций с мнимыми величинами. В своих работах О.-Л. Коши изложил базу всего последующего анализа – систематическую теорию пределов и основанные на ней теории рядов и элементарных функций, именно Коши представил теорему, полностью проясняющую проблему области сходимости степенного ряда. Чуть позже, в 1826 г., он ввел в обиход термин «вычет», понимая его как разность между значениями интегралов от функции комплексного переменного по двум разным путям. В последующие три года он фактически создал стройную и логически безупречную теорию вычетов, ставшую в итоге мощнейшим инструментом в приложениях ТФКП.

Коши вывел интегральную формулу, связавшую значение контурного интеграла со значением подынтегральной функции внутри контура; получил теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды, заложил основы теории аналитических функций многих переменных, определил главные ветви многозначных функций комплексного переменного, впервые использовал для вычислений разрезы плоскости. В 1850 г. Коши ввел понятие монодромных функций и выделил класс моногенных функций. Материал, сформулированный и представленный Огюстеном-Луи Коши и его предшественниками, в первую очередь Леонардом Эйлером, составляет базу любого учебного курса ТФКП, в каком варианте бы он ни излагался.

В отличном от идей Коши направлений начал развивать комплексный анализ Бернхард Риман – он оформил другое, «геометрическое», направление развития ТФКП. В 1851 г. в докторской диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» он предложил связывать функции комплексного переменного с отображениями одной области комплексной плоскости на другую, что, во-первых, позволило воспользоваться сильными сторонами имеющейся геометрической интерпретации и сразу же дало простор для возможных приложений, а во-вторых – позволило наглядно продемонстрировать, что функции комплексного переменного являются расширением понятия функции вещественного переменного, что стало существенно новым шагом в истории теории аналитических функций и позволило в дальнейшем эффективно выстраивать учебный курс ТФКП как учебную дисциплину, расширяющую стандартный курс вещественного математического анализа и дающую логическое объяснение многим фактам, необъяснимым в рамках этого вещественного анализа. Именно Риман описал различия между функциями комплексного и действительного переменного, а также положил начало геометрической теории функций, введя понятие точек ветвления, логичным продолжением чего стало рассмотрение так называемых римановых поверхностей. Доказательство теоремы о существовании конформного отображения односвязных областей позволило Б. Риману стать основателем полноценной теории конформных отображений. В своих работах Риман вскрыл внутреннюю взаимосвязь ТФКП с другими отраслями математики, что позволило ему создавать новые разделы теории на стыке с другими дисциплинами. В частности, именно Риман установил взаимосвязь между аналитическими и гармоническими функциями, а также смог применить комплексный анализ в теории чисел, в частности, введя в рассмотрение дзета-функцию.

Следующий этап развития ТФКП начался с реализацией возможности представления функций степенными рядами, что породило новое, «аналитическое» направление развития комплексного анализа. В его основу легли результаты Карла Вейерштрасса, доказавшего, что множество всех комплекснозначных многочленов позволяет с любой требуемой точностью воспроизводить значения любой непрерывной функции. Он сумел описать сходимость последовательности аналитических функций, обобщить теорему Коши о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд, описал процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применение в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках развитой теории Вейерштрасс сформулировал и доказал теоремы об операциях над степенными рядами и поставил их, с учетом отношения аналитического продолжения, в центр теории аналитических функций. Также Вейерштрассом была доказана теорема о разложении целой функции в произведение, он заложил основы теории аналитических функций многих переменных, построил основы теории делимости степенных рядов. Идеи Вейерштрасса продолжили в своих работах его ученики М. Г. Миттаг-Лефлер и К. Г. Шварц.

Несмотря на то, что еще в 1850 г. профессор И. И. Сомов, опираясь на работы Якоби, издал свой труд «Основания теории аналитических функций», а в 1856 г. небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного» Ш. Брио и Т. Буке стал первым известным учебным пособием по комплексному анализу, но именно Карла Вейерштрасса принято считать основателем ТФКП как учебной дисциплины. С 1856 г. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций в виде степенных рядов, а с 1861 г. – лекции по ТФКП в целом. В 1876 г. появилось его сочинение «К теории однозначных аналитических функций», а в 1880 г. «К учению о функциях». С изданием упомянутых трудов, максимально близко соответствующих понятию учебника в современном его понимании, развитая Вейерштрассом и его предшественниками теория аналитических функций приобрела завершенную форму.

В этот же период одним из первых российских математиков, обратившихся к теме комплексных переменных, стал М. В. Остроградский, который исследовал интегралы от функций комплексного переменного, обобщил некоторые ранее доказанные частные утверждения, в частности, вывел формулу для вычета функции относительно полюса n-го порядка. О нем с уважением отзывался О.-Л. Коши («Этот русский молодой человек одарен большой проницательностью и весьма сведущ»). В обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858–1859 гг., ставшем первым учебным курсом ТФКП в России, М. В. Остроградский делал упор на применения теории вычетов и формулы Коши к вычислению определенных интегралов.

Однако первым по-настоящему оригинальным русским исследователем в области ТФКП стал Ю. В. Сохоцкий, описавший свои результаты в области приложений теории вычетов, аналитических функций, многочленов Лежандра в своей магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (1868). Там же был сформулирован и доказан общеизвестный фундаментальный результат о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Впоследствии Ю. В. Сохоцкий начал читать лекционные курсы, а в его докторской диссертации (1873) впервые было введено в развернутом виде понятие интеграла типа Коши, понимаемого как интеграл «по траектории», соединяющей точки a и b, доказан ряд базовых теорем теории интегралов типа Коши.

С этого момента ТФКП как научная дисциплина вышла на этап экстенсивного расширения, математики всего мира начали создавать функциональные отрасли приложений комплексного анализа, – и началось развитие полноценной учебной дисциплины. К концу XIX в. теория функций комплексного переменного включала в себя обширный комплекс разделов и дисциплин, а в начале XX в. произошло формирование учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного».

В отечественной высшей школе эта традиция длилась до середины XX в., например, в классическом учебнике В. И. Смирнова «Курс высшей математики» (1930) ТФКП все еще рассматривается как составная часть общих курсов, и только к 1950-м гг. сформировались общие традиции преподавания дисциплины и были изданы классические учебники – А. И. Маркушевича («Теория аналитических функций» и «Очерки по истории теории аналитических функций») и И. И. Привалова («Введение в теорию функций комплексного переменного»). После этого параллельно с развитием комплексного анализа как научной дисциплины был издан целый комплекс классических университетских учебников для студентов-математиков, физиков и обучающихся инженерных специальностей за авторством Б. А. Фукса, Б. В. Шабата, М. А. Лаврентьева, задачники и курсы лекций А. И. Маркушевича, М. И. Шабунина, М. А. Евграфова и других отечественных математиков. К тому времени базовый учебный курс «ТФКП» уже сформировался, что явственно следует из пояснения автора (Б. В. Шабат) к учебнику «Введение в комплексный анализ» 1969 г.: «Первая часть, посвященная функциям одного переменного, содержит материал обязательного университетского курса. Вторая часть посвящена функциям нескольких переменных и содержит материал основного спецкурса» [2].

С этого момента можно говорить о «канонизации» дисциплины ТФКП, ставшей полноценной частью учебного процесса. Необходимо отметить, что традиционно логика изложения учебной дисциплины в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. В последние годы работа математиков в области комплексного анализа была посвящена в первую очередь разработке эффективных приложений теории и, соответственно, учебных пособий в сопровождение соответствующих спецкурсов. Это породило значительный массив учебных пособий, учебников, сборников задач, ориентированных не на целостное освещение теории, а на проработку более-менее специфического материала, ориентированного на конкретные приложения ТФКП. Отдельным направлением деятельности в развитии методической составляющей преподавания дисциплины является разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, а также соответствующих электронных образовательных ресурсов и электронных пособий. Использование современных образовательных технологий открывает перед преподавателем новые перспективы в формировании учебного курса по комплексному анализу в зависимости от поставленных задач.

Список литературы

1. *Анохина Е. Ю.* История развития и становление теории функции комплексного переменного (ТФКП) учебным предметом // Вестник ТГПИ. Естественные науки. 2008. С. 83–87.

2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. В 2-х т. М. : Ленанд, 2020. 344 с.

On the reflection of the historical development of complex analysis in the framework of the TFCP course

R. M. Aslanov[1], V. V. Sushkov[2]
[1]Doctor of Pedagogical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, senior researcher at the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences.
Azerbaijan Republic, Baku. E-mail: r_aslanov@list.ru
[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Head of the Educational Department,
Syktyvkar State University n. a. Pitirim Sorokin. Russia, Syktyvkar. E-mail: vvsu@mail.ru

Abstract. The paper considers the history of the emergence and development of the theory of the function of a complex variable as a branch of science and its influence on the development of the relevant academic discipline. In both cases, the main stages of the historical process are highlighted, key figures, dates, facts, publications and results are indicated. It is argued that the traditional logic of the presentation of the discipline "Theory of functions of a complex variable" repeats to a greater or lesser extent the historical logic of the development of the scientific branch. The development of either specialized or maximally universal textbooks adapted to different levels of teaching should take into account the history of the development of the discipline, but should rely on modern educational technologies and the possibilities of electronic learning tools and resources.

Keywords: theory of functions of a complex variable, complex analysis, history of mathematics, academic discipline, stages of development, educational technologies, methodological component.

References

1. *Anohina E. Yu. Istoriya razvitiya i stanovlenie teorii funkcii kompleksnogo peremennogo (TFKP) uchebnym predmetom* [History of development and formation of the theory of the function of a complex variable (TFCP) as an educational subject] // *Vestnik TGPI. Estestvennye nauki* – Herald of TSPI. Natural sciences. 2008. Pp. 83–87.

2. *Shabat B. V. Vvedenie v kompleksnyj analiz. V 2-h t.* [Introduction to complex analysis. In 2 vols.]. M. Lenand. 2020. 344 p.