

№2 (25) 2022

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN of Vyatka State University

Вятский государственный университет

**Математический вестник
Вятского государственного
университета**

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 2 (25)

Киров
2022

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместители главного редактора

С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5439-9414;

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

Состав редакционной коллегии:

Н. А. Беляева, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Н. А. Бояринцева, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров);

Ю. А. Дробышев, доктор педагогических наук, профессор, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (г. Калуга);

И. В. Игнатушина, доктор педагогических наук, доцент, Оренбургский государственный педагогический университет (г. Оренбург);

С. Н. Ильин, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань);

Г. А. Клековкин, кандидат физико-математических наук, доцент (г. Самара);

И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва), ORCID: 0000-0002-1918-6197;

Е. В. Котельников, доктор технических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-9745-1489;

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5071-6208;

А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург);

Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский), ORCID: 0000-0002-7869-8053;

В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург);

С. М. Окулов, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

Е. А. Перминов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный профессионально-педагогический университет (г. Екатеринбург);

Н. И. Петров, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

В. В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-7303-4485;

И. М. Смирнова, доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

О. А. Сотникова, доктор педагогических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Т. Н. Суворова, доктор педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет (г. Москва);

В. А. Тестов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет (г. Вологда);

А. А. Фомин, доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

В. В. Черных, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар), ORCID: 0000-0002-8650-4554;

Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-0042-3700;

А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (г. Ярославль)

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»

**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)**

Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **А. В. Мариева**

Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**

Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Бозиев О. Л.</i> О линеаризации параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений	4
<i>Вечтомов Е. М.</i> Полукольца непрерывных функций на топологических пространствах	9
<i>Калинин С. И., Протасов Н. С., Макарова Ю. И.</i> О функциях, выпуклых по М. Avriel. I. Геометрическая характеристика.....	23
<i>Кириллова Н. А., Куликова Ю. А.</i> О методах приближенного вычисления определенного интеграла.....	28

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

<i>Бегмов Х. Х.</i> Использование компетентностного подхода в процессе обучения в начальных классах	32
<i>Гриншпон И. Э., Гриншпон Я. С.</i> О различных методах решения квадратных уравнений	38
<i>Трефилова Е. С., Шилова З. В.</i> Использование функционального подхода при решении задач с параметрами	43

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

<i>Анисова Т. Л., Дудин В. И., Павлов Д. С.</i> В поисках доказательства Великой теоремы Ферма	50
<i>Асланов Р. М., Сушков В. В.</i> Об отражении исторического развития комплексного анализа в рамках курса ТФКП	55

О линеаризации параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений

О. Л. Бозиев

кандидат физико-математических наук, доцент, Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х. М. Бербекова; старший научный сотрудник института информатики
и проблем регионального управления, Кабардино-Балкарский научный центр РАН. Россия, г. Нальчик.
ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: bozиеv@yandex.ru

Аннотация. Описывается метод линеаризации одномерных неоднородных параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части. Интегральная нагрузка здесь представляет собой некоторую функцию $a(s)$, где s – интеграл по пространственной переменной от квадрата модуля производной решения уравнения по x . Рассматриваются неоднородные начальные и однородные граничные условия. В случае линейной функции $a(s)$, а также в двух случаях, когда $a(s)$ не линейна, установлены априорные оценки производной решения поставленной задачи в пространстве L_2 . Правые части этих оценок используются для линеаризации соответствующих уравнений. Приводятся примеры линеаризации нагруженных уравнений данным методом.

Ключевые слова: параболическое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация.

Введение

Моделирование ряда физических процессов приводит к начально-краевым задачам для уравнений параболического типа, содержащих в главной части интегральную нагрузку, под которой понимается некоторая функция, содержащая интеграл от искомого решения или его производной. Такими являются, например, уравнения видов

$$u_t - a(s)u_{xx} = 0, \quad u_t - (a(s)u_x)_x = f(x, t),$$
$$s = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \quad \Omega = [0, l],$$

исследовавшиеся, в частности, в работах [1; 4; 5].

В данном и некоторых других нагруженных уравнениях функция s представляет собой норму искомого решения или его производной в некотором лебеговом пространстве. Это приводит к мысли о возможности использования априорной оценки решения задачи или его производной в соответствующей норме для линеаризации исходного уравнения. Такой подход был использован в [2; 3] и некоторых других работах автора. Однако в этих работах интегральная нагрузка содержалась в младших членах уравнений.

Целью настоящей работы является установление априорных оценок второй смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного параболического уравнения с интегральной нагрузкой в главной части. Рассматривается линейный случай $a(s) = s$, а также нелинейные случаи $a(s) = \sqrt{s}$ и $a(s) = s^{-1}$. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t , определяемой посредством правой части априорной оценки.

1. $a(s) = s$

Рассмотрим уравнение с линейной нагрузкой

$$u_t - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 u_{xx} = f(x, t), \tag{1}$$

в котором

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx = s, \quad \Omega = [0, l],$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть функции $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_x, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^4$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) с u_t :

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Для его отдельных членов имеем

$$\begin{aligned} (u_t, u_t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx = \int_{\Omega} |u_t|^2 dx, \quad (f, u_t) = \int_{\Omega} f u_t dx, \\ -(u_{xx}, u_t) &= -\int_{\Omega} u_{xx} u_t dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx + \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx = -(u_x u_t)|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} (\|u_x\|_{2,\Omega}^2)^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4,$$

что приводит скалярное произведение к виду

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Интегрируя последнее, получаем

$$4 \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = 4 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4. \quad (3)$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с ε , в котором затем положим $\varepsilon = 1/2$:

$$4 \int_{\Omega} f u_t dx \leq 4 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq 2 \left(\varepsilon \int_{\Omega} f^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_t^2 dx \right) = \int_{\Omega} f^2 dx + 4 \int_{\Omega} u_t^2 dx.$$

Это позволяет от (3) перейти к неравенству

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^4 \leq \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^4.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^4 \leq K(t), \quad (4)$$

с правой частью

$$K(t) = \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^4,$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Из (4) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \sqrt{K(t)}.$$

Выбирая равенство в данном выражении, подставим его правую часть в уравнение (1) и получим линейное уравнение

$$u_t - \sqrt{K(t)} u_{xx} = f(x, t). \quad (5)$$

Пример 1. Пусть в условиях (2)

$$l=1, \quad \varphi(x) = x(x-1), \quad f(x, t) = xt. \quad (6)$$

Тогда

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^4 = \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx \right)^2 = \frac{1}{9}, \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \int_0^t \int_0^1 \tau^2 x^2 dx d\tau = \frac{1}{3} \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, K(t) = \frac{1}{9}(t^3 + 1).$$

Подставляя в (5), получаем линеаризованное уравнение

$$u_t - \frac{1}{3} \sqrt{t^3 + 1} u_{xx} = xt.$$

2. $a(s) = \sqrt{s}$

Рассмотрим уравнение с нелинейной нагрузкой

$$u_t - \|u_x\|_{2,\Omega} u_{xx} = f(x, t) \quad (7)$$

при условиях (2).

Теорема 2. Пусть функции $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_x, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^3$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) с u_t :

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3,$$

что приводит к соотношению

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3 = \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Интегрирование последнего дает

$$3 \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|u_x\|_{2,\Omega}^3 = 3 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^3. \quad (8)$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с ε , в котором затем положим $\varepsilon = 1/2$:

$$3 \int_{\Omega} f u_t dx \leq 3 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq \frac{3}{2} \left(\varepsilon \int_{\Omega} f^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u_t^2 dx \right) = \frac{3}{4} \int_{\Omega} f^2 dx + 3 \int_{\Omega} u_t^2 dx.$$

Это позволяет от (8) перейти к неравенству

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq 0,75 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3.$$

Таким образом, получена оценка

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq K(t), \quad (9)$$

с правой частью

$$K(t) = 0,75 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3,$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2 доказана.

Из (9) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega} \leq \sqrt[3]{K(t)}.$$

Выбор равенства в данном выражении позволяет записать уравнение (1) в линеаризованном виде

$$u_t - \sqrt[3]{K(t)} u_{xx} = f(x, t). \quad (10)$$

Пример 2. Пусть имеет место (6). В этом случае

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^3 = \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,19245, \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, K(t) \approx 0,08333t^3 + 0,19245.$$

Подстановка в (10) приводит к линейному уравнению

$$u_t - \sqrt[3]{0,08333t^3 + 0,19245u_{xx}} = xt.$$

3. $a(s) = s^{-1}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение с нелинейной интегральной нагрузкой

$$u_t - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} u_{xx} = f(x, t). \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть функции $u \in H^1(\Omega)$, такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (6), (2), $\|u_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$. Пусть, кроме того, $\varphi_x, f \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Заметим, что в скалярном произведении (11) и функции u_t

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

имеет место

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{d}{dt} \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет записать уравнение

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое получим

$$2 \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \ln \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Первое слагаемое правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши, что дает неравенство

$$\ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \ln \|\varphi_x(x)\|_{2,\Omega}^2,$$

которое, в свою очередь, приводит к оценке

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq K(t), \quad (12)$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$ при

$$K(t) = \|\varphi_x(x)\|_{2,\Omega}^2 e^{\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau}.$$

Теорема 3 доказана.

Выбирая в (12) верхнюю границу оценки и подставляя в (11), получаем

$$u_t - K^{-1}(t) u_{xx} = f(x, t). \quad (13)$$

Пример 3. Пусть имеет место (6). В этом случае

$$\|\varphi_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, \quad K(t) = \frac{1}{3} e^{\frac{t^3}{9}}.$$

Подстановка в (13) приводит к линейному уравнению

$$u_t - 3e^{-\frac{1}{9}t^3} u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки (4), (9) и (12) производных решений второй смешанной задачи для одномерных неоднородных уравнений с интегральной нагрузкой $a(s) = s^p$ в главной части при $p=1, 0,5$ и -1 соответственно. Во всех случаях граничные условия являются однородными. Метод линеаризации с использованием априорных оценок состоит в замене интегральной нагрузки в уравнении функциями от t , полученными из правых частей соответствующих оценок. Данный способ линеаризации в отличие от других позволяет переходить от исходного уравне-

ния к линейному с сохранением в основном физического смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальном и граничных условиях, будем считать приближенным решением нагруженного уравнения. Это решение может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. Об одном классе функциональных уравнений : собрание сочинений. М. : Изд-во Академии Наук СССР. 1960. Т. III. С. 323–331.
2. Бозиев О. Л. О приближенном методе решения нагруженных уравнений гиперболического и параболического типов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. № 2 (100). С. 5–10.
3. Бозиев О. Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2 (21). С. 9–12.
4. Джангвеладзе Т. А. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 41–46.
5. Лантев Г. И. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 306–309.

On the linearization of parabolic equations with integral load in the main part by a priori estimation of their solutions

O. L. Bosiev

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Kabardino-Balkarian State University n. a. H. M. Berbekov; Senior Researcher at the Institute of Informatics and Regional Management Problems, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Russia, Nalchik.
ORCID: 0000-0001-6660-7444. E-mail: boziev@yandex.ru

Abstract. A method of linearization of one-dimensional inhomogeneous parabolic equations with an integral load in the main part is described. The integral load here is some function $a(s)$, where s is the integral over the spatial variable from the square of the modulus of the derivative of the solution of the equation in x . Inhomogeneous initial and homogeneous boundary conditions are considered. In the case of a linear function $a(s)$, as well as in two cases when $a(s)$ is not linear, a priori estimates of the derivative of the solution of the problem in the L_2 space are established. The right-hand sides of these estimates are used to linearize the corresponding equations. Examples of linearization of loaded equations by this method are given.

Keywords: parabolic equation, integral load, a priori estimation, linearization.

References

1. Bernshtejn S. N. *Ob odnom klasse funkcional'nyh uravnenij : sobranie sochinenij* [On one class of functional equations : collected works]. M. Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1960. Vol. III. Pp. 323–331.
2. Boziev O. L. *O priblizhennom metode reshenija nagruzhenykh uravnenij giperbolicheskogo i parabolicheskogo tipov* [On an approximate method for solving loaded equations of hyperbolic and parabolic types] // *Izvestija Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN* – News of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2021. No. 2 (100). Pp. 5–10.
3. Boziev O. L. *Ob odnom metode priblizhennogo reshenija parabolicheskogo uravnenija s integral'noj nagruzkoj* [On one method of approximate solution of a parabolic equation with an integral load] // *Matematicheskij vestnik Vjatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical herald of Vyatka State University. 2021. No. 2 (21). Pp. 9–12.
4. Dzhangveladze T. A. *Ob odnom nelinejnom integro-differencial'nom uravnenii parabolicheskogo tipa* [On one nonlinear integro-differential equation of parabolic type] // *Differencial'nye uravnenija* – Differential equations. 1985. Vol. 21. No. 1. Pp. 41–46.
5. Laptjev G. I. *Kvazilinejnye parabolicheskie uravnenija vtorogo porjadka s integral'nymi koeficientami* [Quasi-linear parabolic equations of the second order with integral coefficients] // *DAN SSSR* – DAN USSR. 1987. Vol. 293. No. 2. Pp. 306–309.

Полукольца непрерывных функций на топологических пространствах

Е. М. Вечтомов

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Статья представляет собой введение в теорию колец и полуколец непрерывных действительных функций, дающее возможность читателю получить начальное представление по существу предмета. Излагаются элементы теории колец непрерывных функций и общей топологии, необходимые для изучения функциональной алгебры. Рассматриваются различные алгебраические и функционально-топологические характеристики F -пространств и P -пространств. Сформулированы исследовательские задачи по теории полуколец непрерывных функций.

Ключевые слова: кольцо непрерывных функций, полукольцо непрерывных функций, F -пространство, P -пространство.

Введение

Статья посвящена теории колец и полуколец непрерывных числовых функций на топологических пространствах – теории, представляющей собой важный раздел и направление развития функциональной алгебры. Она может служить введением в полукольца непрерывных функций для изучающих современную математику и заинтересовавшихся данным ее направлением. Представленный материал дает пищу для самостоятельных размышлений и исследований в области функциональной алгебры.

Кольца $C(X)$ непрерывных действительных функций уже стали классическим объектом в современной математике. Начало изучению колец $C(X)$ положили работы С. Банаха, М. Стоуна [36], И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [22] 1930-х гг. Большую роль в развитии теории колец непрерывных функций сыграли статьи Э. Хьюитта [33], Л. Гиллмана и М. Хенриксена [29; 30].

Первым обобщающим трудом стала монография Л. Гиллмана и М. Джерисона «Кольца непрерывных функций», вышедшая из печати в 1960 г.; второе издание [31] опубликовано в 1976 г. Дальнейшую информацию о кольцах непрерывных функций можно найти в обзорных статьях [10; 11; 33; 37; 38], а также в книгах [12; 13]. Общей теории колец непрерывных функций посвящены работы [35; 38].

Классическая теория колец непрерывных функций зиждется на теории множеств, общей топологии, абстрактной алгебре (кольца, полугруппы, решетки), специфике числовой системы $\mathbf{R}$ действительных (вещественных) чисел, находится на стыке с функциональным анализом, топологической алгеброй, теорией пучков. Как подчеркнуто в [18, с. 12–13], «основой возникновения плодотворной теории колец $C(X)$ стало успешное внедрение действительных чисел в общую топологию – в теорию тихоновских пространств (большая лемма Урысона, вложение в тихоновские кубы, компактификация βX , метризация)». В своем Предисловии к книге [2, с. 7–8] П. С. Александров отмечал: «На этой почве возникла теория колец непрерывных действительных функций, определенных на топологических пространствах, – теория, являющаяся одновременно и плодотворным методом, и обширной областью исследований, в которой общая топология соприкасается с функциональным анализом и топологической алгеброй».

Система $\mathbf{R}$ является уникальным математическим объектом, в котором естественным образом переплетаются и взаимодействуют фундаментальные типы математических структур: алгебраическая структура (поле), порядковая структура (линейно упорядоченное множество), топологическая структура (интервальная топология, метрика). Отметим, что система $\mathbf{R}$ имеет следующие абстрактные характеристики (с точностью до соответствующего изоморфизма):

$\mathbf{R}$ – непрерывное линейно упорядоченное поле;

$\mathbf{R}$ – связанное локально компактное вещественное поле (теорема Понтрягина).

Полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций и полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций возникли на основе теории колец $C(X)$ около 30 лет тому назад. Основопологающей явилась статья 1998 г. [6]. Некоторые другие классы полуколец непрерывных функций рассматривались в [5; 19; 20]. Развитие теории полуколец непрерывных функций подытожено в двухтомной монографии [18; 19] 2016 г. и обзорной статье [21].

Главные направления в исследовании колец $C(X)$:

I. Установление связей между топологическими свойствами топологических пространств X и алгебраическими свойствами колец $C(X)$.

В частности:

- решение проблемы определяемости пространств X из различных классов K топологических пространств кольцом $C(X)$ или связанными с ним алгебраическими системами;
- открытие и определение двойственностей между той или иной категорией K топологических пространств X с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорией соответствующих колец $C(X)$ и их гомоморфизмов.

II. Нахождение алгебраических свойств, общих всем кольцам $C(X)$.

В частности:

- получение алгебраических характеристик колец, изоморфных кольцам вида $C(X)$, т. е. абстрактное описание класса колец $C(X)$.

Аналогичные направления и задачи выделяются и главенствуют в теории полуколец непрерывных числовых функций: полукольцо $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$, полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$.

Отметим, что кольца, полукольца и полуполя непрерывных числовых функций могут рассматриваться с той или иной топологией (поточечной сходимости, компактно-открытой, sup -нормой), превращающей их в тополого-алгебраические объекты.

В настоящей работе сформулированы исходные определения и предварительные результаты, необходимые для понимания ее содержания, приведены важные понятия и факты, касающиеся колец, полуколец и полуполей непрерывных действительных функций на топологических пространствах.

Статья преследует следующие цели:

- мотивированное краткое введение в теорию колец и полуколец непрерывных действительных функций, дающее возможность студенту-математику погрузиться в предмет;
- сжатое изложение совокупности алгебраических и функционально-топологических характеристик F -пространств и их важнейших классов: P -пространств, экстремально несвязных пространств, базисно несвязных пространств и др.;
- постановка новых исследовательских задач по теории полуколец непрерывных функций.

Предполагаются известными исходные теоретико-множественные понятия и обозначения (имеются в учебных пособиях [1; 17; 25]).

В процессе изучения предлагаемой тематики полезно ознакомиться с некоторыми свойствами абстрактных колец, полуколец, решеток, информацию о которых можно найти в книгах [4; 12; 13; 17; 20; 23; 26; 27]. Весь требуемый материал по общей топологии содержится в трудах [1–3; 17; 24; 25; 31].

Статья имеет следующую структуру.

1. Основные понятия.
2. Предварительные сведения.
3. F -пространства и их характеристики.
4. P -пространства и другие классы пространств.
5. Задачи для исследований.

Библиография включает 38 источников.

Отметим, что параграфы 1–4 разбиты на отдельные пункты с двойной нумерацией, а теоремы, предложения, следствия, примеры и замечания имеют свои сквозные нумерации.

В заключении Введения перечислим имена наиболее известных математиков, так или иначе причастных к исследованию колец функций.

Персоналии:

Александров Павел Сергеевич (1896–1982) – выдающийся русский советский математик, тополог, академик, основатель и руководитель московской топологической школы.

Банах Стефан (1892–1945) – выдающийся польский математик, один из создателей современного функционального анализа, основатель львовской математической школы.

Гельфанд Израиль Моисеевич (1913–2009) – российский математик, академик, выдающийся специалист в области функционального анализа.

Гиллман Леонард (1917–2009) – американский математик, один из создателей теории колец непрерывных функций.

Джерисон Мейер (1922–1995) – американский математик, специалист по функциональному анализу и теории колец.

Зариский Оскар (1899–1986) – американский математик, крупный специалист по алгебраической топологии.

Исбелл Джон (1930–2005) – американский математик, тополог.

Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик, создатель теории множеств.

Капланский Ирвинг (1917–2006) – канадский и американский математик, известный алгебраист.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – выдающийся русский советский математик, академик, создатель целого ряда математических теорий.

Куратовский Казимеж (1896–1980) – выдающийся польский математик, один из основоположников современной топологии, глава польской топологической школы.

Понтрягин Лев Семенович (1908–1988) – выдающийся русский советский математик, академик, ведущий ученый по топологической алгебре, известный специалист в области приложений математики.

Стоун Маршалл (1903–1989) – американский математик, видный специалист в области алгебры, общей топологии (именно он, в 1937 г., ввел понятие *general topology*), функционального анализа, создатель современной теории булевых алгебр.

Титце Генрих (1880–1964) – австрийский математик, специалист по топологии и теории групп.

Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) – выдающийся русский советский математик, академик, тополог, видный специалист в области вычислительной математики.

Улам Станислав (1902–1984) – польский и американский математик, известный специалист по теории множеств.

Урысон Павел Самуилович (1898–1924) – выдающийся российский математик, тополог, вместе с П. С. Александровым явился создателем московской топологической школы.

Френкель Абрахам (1891–1965) – немецкий и израильский математик, известный специалист по основаниям математики, один из авторов классической аксиоматики теории множеств – системы Цермело – Френкеля.

Фреше Морис (1878–1973) – французский математик, известный специалист по топологии и функциональному анализу, определил понятие метрического пространства (1906).

Хаусдорф Феликс (1868–1942) – немецкий математик, один из основоположников современной топологии, определил понятие (хаусдорфова) топологического пространства (1914).

Хенриксен Мелвин (1927–2009) – американский математик, известный специалист по функциональному анализу и решеточно упорядоченным кольцам.

Хьюитт Эдвин (1920–1999) – американский математик, крупный специалист по функциональному анализу и абстрактному гармоническому анализу.

Цермело Эрнст (1871–1953) – немецкий математик, создатель аксиоматической теории множеств (1904–1908), сформулировал аксиому выбора и на ее основе доказал теорему о вполне упорядочении любого множества.

Цорн Макс (1906–1993) – американский математик немецкого происхождения, соавтор леммы Куратовского – Цорна (1922, 1935).

Чех Эдуард (1893–1960) – известный чешский математик, тополог.

Энгелькинг Рышард (1935 г. р.) – польский математик, известный специалист по общей топологии и теории размерности.

1. Основные понятия

1.1. Исследуются три алгебраических объекта (полукольца) над произвольным топологическим пространством X , имеющие функционально-топологическую природу:

- кольцо $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ всех непрерывных действительных функций на X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций

$$\forall f, g \in C(X) \quad \forall x \in X \quad ((f+g)(x)=f(x)+g(x), (fg)(x)=f(x)g(x));$$

- полукольцо $C^+(X)=C(X, \mathbf{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций на X со значениями в топологическом полуполе с нулем $\mathbf{R}^+$ неотрицательных действительных чисел;

- полуполе $U(X)=C(X, \mathbf{P})$ всех непрерывных положительных функций на X со значениями в топологическом полуполе $\mathbf{P}$ положительных действительных чисел.

Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$. Множество $C^+(X)$ равно множеству всевозможных квадратов элементов кольца $C(X)$, т. е. $C^+(X)=\{f^2: f \in C(X)\}$. Полуполе $U(X)$ служит мультипликативной группой полукольца $C^+(X)$, т. е. совпадает с множеством всех его обратимых элементов.

Кроме того, будем рассматривать аддитивно идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)$ и полуполе $U^\vee(X)$, получаемые из полукольца $C^+(X)$ и полуполя $U(X)$ заменой аддитивной операции $+$ на операцию $\vee$ взятия $\max$ двух функций, с сохранением операции умножения.

1.2. Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо $\langle S, +, \cdot \rangle$, обозначаемое просто S , называется:

коммутативным, если на S выполняется тождество $x \cdot y = y \cdot x$;

(аддитивно) идемпотентным, если S удовлетворяет тождеству $x + x = x$;

полукольцом с нулем 0 , если в S существует элемент 0 , нейтральный по сложению ($\forall s \in S \ s + 0 = s$) и поглощающий по умножению ($\forall s \in S \ 0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$);

полукольцом с единицей 1 , если S обладает элементом 1 , нейтральным по умножению;

кольцом, если $\langle S, + \rangle$ является (коммутативной) группой;

полуполе, если $\langle S, \cdot \rangle$ – коммутативная группа;

полуполе с нулем, если S имеет нуль 0 и $\langle S \setminus \{0\}, +, \cdot \rangle$ – полуполе.

Мы предполагаем известными такие общеалгебраические понятия, как идеал кольца (полукольца), подполукольцо, конгруэнция на полукольце, фактор-полукольцо, гомоморфизм (изоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, эндоморфизм, автоморфизм) полуколец и т. п. [см., например, 19; 31].

1.3. Относительно поточечного порядка $\leq$ кольцо $C(X)$ становится *решеточно упорядоченным кольцом*. Для произвольных функций $f, g \in C(X)$

$$f \leq g \text{ означает } f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Получаем *дистрибутивную решетку* $\langle C(X), \leq \rangle$, в которой $\sup\{f, g\} = f \vee g$ и $\inf\{f, g\} = f \wedge g$; дистрибутивность означает, что операции $\wedge$ и $\vee$ дистрибутивны друг относительно друга. Имеем также решеточно упорядоченное полукольцо $C^+(X)$ с наименьшим элементом функцией-константой нуль 0 и решеточно упорядоченное полуполе $U(X)$.

1.4. Приведем следующие важные обозначения.

Пусть $f \in C(X)$. Тогда:

$Z(f) = \{x \in X: f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ – *нуль-множество* на X (функции f);

$\text{coz } f = X \setminus Z(f) = \{x \in X: f(x) \neq 0\}$ – *конуль-множество* на X (функции f);

$N(f) = \{x \in X: f(x) < 0\}$ и $P(f) = \{x \in X: f(x) > 0\}$;

$|f| = f \vee (-f) \in C^+(X)$ – *модуль* функции f ;

$f^+ = f \vee 0$ и $f^- = (-f) \vee 0$ – функции из $C^+(X)$.

Через $Z(X)$ обозначается множество всех нуль-множеств на топологическом пространстве X , т. е. $Z(X) = \{Z(f): f \in C(X)\}$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множеств $Z(X)$ является дистрибутивной решеткой с наименьшим элементом – пустым нуль-множеством $\emptyset = Z(1)$, и наибольшим элементом – самим пространством $X = Z(0)$. Действительно,

$$Z(f) \cup Z(g) = Z(fg), \quad Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) \text{ для любых } f, g \in C(X).$$

1.5. Если $\emptyset \neq A \subseteq C(X)$, то через $\text{Ann } A = \{f \in C(X): \forall g \in A \ fg = 0\}$ обозначается *аннулятор* множества A . Множество $\text{Ann } A = \text{Ann } I$, I – идеал кольца $C(X)$, порожденный множеством A , является идеалом в $C(X)$ и называется *аннуляторным идеалом*.

Идеал J кольца $C(X)$ называется:

собственным, если $J \neq C(X)$;

простым, если J – собственный и $fg \in J$ влечет $f \in J$ или $g \in J$ для любых $f, g \in C(X)$;

максимальным, если J – собственный и в $C(X)$ нет других собственных идеалов, содержащих J ;

выпуклым, если $f \in C(X)$, $g \in J$, $0 \leq f \leq g$ влекут $f \in J$;

абсолютно выпуклым, если $f \in C(X)$, $g \in J$, $|f| \leq |g|$ влекут $f \in J$;

z-идеалом, если $f \in C(X)$, $g \in J$, $Z(f) = Z(g)$ влекут $f \in J$;

чистым, если $\forall f \in J \ \exists g \in J \ fg = f$.

Для любого простого идеала P кольца $C(X)$ определяется идеал

$$O_P = \{f \in C(X): \exists g \in C(X) \setminus P \ fg = 0\} = \{f \in C(X): \bigcap (\text{Ann } f \subseteq P)\}.$$

Для полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ понятия собственного, простого, максимального, чистого, аннуляторного идеалов, z -идеала, идеала O_P , простого и максимального спектров определяются точно так же, как и для кольца $C(X)$.

Идеал J полукольца $C^+(X)$ называется:

полустрогим, если $f \in C^+(X)$, $f + g, g \in J$ влекут $f \in J$;

строгим, если $f, g \in C^+(X)$, $f + g \in J$ влекут $f \in J$ (это аналог выпуклости).

Для полуколец $C^\vee(X)$ понятия полустрогости и строгости идеалов равносильны. В любом кольце все идеалы полустрогие, а строгим будет только несобственный идеал – само кольцо.

Множество $\text{Id } C(X)$ всех идеалов кольца $C(X)$ с отношением включения $\subseteq$ будет полной модулярной решеткой. Аналогично получаются решетки идеалов $\text{Id } C^+(X)$ и $\text{Id } C^\vee(X)$ полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$.

Множество $\text{Con } C^+(X)$ всех конгруэнций на полукольце $C^+(X)$ образует полную решетку относительно включения конгруэнций. Аналогично возникают решетки конгруэнций $\text{Con } C^\vee(X)$, $\text{Con } U(X)$ и $\text{Con } U^\vee(X)$ на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$ соответственно. Заметим, что решетки $\text{Id } C(X)$ и $\text{Con } C(X)$ канонически изоморфны.

1.6. Понятие топологического пространства предполагается известным.

Пусть X – произвольное топологическое пространство и Y – некоторое его подмножество. Через Y^0 обозначается внутренность множества Y (в X), а через $[Y]$ – его замыкание.

Замыкание открытого множества (внутренность замкнутого множества) топологического пространства X называется *канонически замкнутым множеством* (*канонически открытым множеством*). Легко видеть, что подмножество Y пространства X канонически замкнуто (канонически открыто) тогда и только тогда, когда $Y=[Y^0]$ (соответственно, $Y=[Y]^0$).

Топологическое X пространство называется:

T_0 -пространством, если любые две его различные точки x и y отделяются некоторым открытым множеством U : $x \in U, y \notin U$ или $x \notin U, y \in U$ (Колмогоров);

T_1 -пространством, если все его одноточечные множества замкнуты;

хаусдорфовым, если каждые две его различные точки содержатся в некоторых непересекающихся открытых множествах;

тихоновским (*хьюиттовским*), если X гомеоморфно некоторому подпространству (замкнутому подпространству) тихоновской степени числовой прямой $\mathbf{R}$;

нормальным, если X есть T_1 -пространство и каждые два его непересекающиеся замкнутые множества содержатся в некоторых непересекающихся открытых множествах;

совершенно нормальным, если X есть T_1 -пространство и для любых его непересекающихся замкнутых множеств A и B существует такая функция $f \in C(X)$, что $Z(f)=A$ и $Z(1-f)=B$;

компактным, если любое его покрытие открытыми множествами (открытое покрытие) содержит конечное подпокрытие;

компактом, если оно компактно и хаусдорфово;

псевдокомпактным, если оно тихоновское и все функции из $C(X)$ ограниченные, т. е. $C(X)=C^*(X)$ – подкольцо кольца $C(X)$, состоящее из ограниченных (непрерывных) функций;

нульмерным, если X есть T_1 -пространство и каждое его открытое множество является объединением открыто-замкнутых множеств;

экстремально несвязным, если оно тихоновское и каждое его канонически замкнутое множество открыто;

базисно несвязным, если оно тихоновское и замыкание каждого конуль-множества на X открыто.

Подмножество Y топологического пространства X называется *C -расширяемым* (*C^* -расширяемым*), если любая функция из $C(Y)$ (соответственно, из $C^*(Y)$) продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

1.7. Множество всех простых (максимальных) идеалов кольца $C(X)$ обозначается $\text{Spec } C(X)$ и $\text{Max } C(X)$ соответственно. Имеем $\text{Max } C(X) \subseteq \text{Spec } C(X)$. Множество $\text{Spec } C(X)$ с топологией Стоуна – Зариского оказывается компактным T_0 -пространством, называемым *простым спектром кольца $C(X)$* . При этом его подпространство $\text{Max } C(X)$ будет компактным T_1 -пространством, называемым *максимальным спектром кольца $C(X)$* .

2. Предварительные сведения

2.1. Множества A и B топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если $f(A)=\{0\}$ и $f(B)=\{1\}$ для некоторой функции $f \in C(X)$; беря функцию $(f \vee 0) \wedge 1 \in C(X)$, можно считать $f(X) \subseteq [0, 1]$.

Предложение 1. Два непересекающиеся множества топологического пространства функционально отделимы тогда и только тогда, когда они содержатся в непересекающихся нуль-множествах.

Тихоновость пространства X эквивалентна тому, что X есть T_1 -пространство и любые замкнутое множество $B \subset X$ и точка $p \in X \setminus B$, т. е. одноточечное множество $\{p\}$, функционально отделимы. Хьюиттовость тихоновского пространства X равносильна тому, что любой $\mathbf{R}$ -идеал M кольца $C(X)$, т. е. такой, фактор-кольцо $C(X)/M$ по которому изоморфно полю $\mathbf{R}$, является фиксированным максимальным идеалом

$$M=M_x=\{f \in C(X): f(x)=0\} \text{ для подходящей точки } x \in X.$$

Предложение 2. Для любой функции $f \in C(X)$ верны равенства:

$$1) f=f^+ - f^-;$$

$$2) |f|=f^+ + f^-;$$

$$3) f^+ \cdot f^- = 0;$$

$$4) \text{coz } f = N(f) \cup P(f);$$

$$5) N(f) = \text{coz } f^+ \text{ и } P(f) = \text{coz } f^-.$$

Предложение 3. Кольцо $C(X)$ обладает следующими свойствами делимости ($\forall f, g \in C(X)$):

- 1) если $Z(f) \subseteq Z^0(g)$, то g делится на f , т. е. $g \in fC(X)$;
- 2) если $|f| \leq g^2$, то f делится на g ;
- 3) функции f и $(f \vee (-1)) \wedge 1$ делятся друг на друга.

Предложение 4. Решетка нуль-множеств $Z(X)$ замкнута относительно счетных пересечений, т. е. для всякой последовательности функций $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ из $C(X)$ существует такая функция $f \in C(X)$, что

$$Z(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n) = Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap \dots \cap Z(f_n) \cap \dots$$

Предложение 5. Семейства следующих открытых множеств образуют открытые базы произвольного тихоновского пространства: конуль-множества; канонически открытые множества; внутренности нуль-множеств.

Предложение 6. Для произвольного T_1 -пространства X равносильны следующие условия:

- 1) X – тихоновское пространство;
- 2) конуль-множества образуют открытую базу пространства X ;
- 3) $Z(X)$ является замкнутой базой пространства X .

Замечание 1. Предложения 1–6 доказываются непосредственно. Предлагаем читателю доказать эти утверждения самостоятельно.

2.2. Для произвольного подмножества Z топологического пространства X определим в кольце $C(X)$ Z -идеал

$$M_Z = \{f \in C(X) : Z \subseteq Z(f)\} = \bigcap \{M_x : x \in Z\}.$$

В частности, $M_\emptyset = C(X)$ и $M_X = \{0\}$. Также имеем $M_Z = M_{[Z]}$.

Предложение 7. Пусть X – тихоновское пространство и A – идеал кольца $C(X)$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) идеал A является прямым слагаемым кольца $C(X) \Leftrightarrow A = eC(X)$ для некоторого идемпотента $e = e^2 \in C(X) \Leftrightarrow A = M_Z$ для подходящего открыто-замкнутого множества Z в X ;
- 2) A является аннуляторным идеалом кольца $C(X) \Leftrightarrow A = M_Z$ для подходящего канонически замкнутого множества Z в X .

Замечание 2. В предложении 7 $Z = \Delta A = \bigcap \{Z(f) : f \in A\}$, причем, $Z = Z(e)$ в 1). Замкнутое множество ΔA можно назвать нуль-множеством идеала A , а дополнение $X \setminus \Delta A = \bigcup \{\text{coz } f : f \in A\}$ – конуль-множеством A .

2.3. Для любого топологического пространства X существует его тихоновизация – такое тихоновское пространство τX , что $C(\tau X) \cong C(X)$. Каждое тихоновское пространство X имеет расширение Хьюитта νX и компактификацию Стоуна – Чеха βX . Пространство νX хьюиттовское, плотно содержит X и все функции из $C(X)$ продолжаются (однозначно) до функций из $C(\nu X)$. Компакт βX плотно содержит X и все ограниченные функции из $C(X)$ продолжаются (однозначно) до функций из $C(\beta X)$. Топологические пространства νX и βX определены однозначно, с точностью до гомеоморфизма над X . При этом $C(\nu X) \cong C(X)$, $C^+(\nu X) \cong C^+(X)$, $U(\nu X) \cong U(X)$ и $C(\beta X) \cong C^*(X)$.

Сформулируем несколько фундаментальных результатов о кольцах $C(X)$.

2.4. Теорема Гельфанда – Колмогорова (1939 [22]). Для любого тихоновского пространства X максимальный спектр $\text{Max } C(X)$ кольца $C(X)$ гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX пространства X . При этом максимальные идеалы кольца $C(X)$ исчерпываются идеалами вида

$$M^p = \{f \in C(X) : p \in [Z(f)]_{\beta X}\} \text{ по всем точкам } p \in \beta X.$$

Здесь $[Z(f)]_{\beta X}$ – замыкание нуль-множества $Z(f)$ в компакте βX , и отображение $p \rightarrow M^p$, $p \in \beta X$, осуществляет искомый гомеоморфизм βX на $\text{Max } C(X)$. Если $p \in X$, то получаем $M^p = M_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}$.

Следствие 1. Каждый компакт X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, своим кольцом $C(X)$.

2.5. Далее, если $\varphi : Y \rightarrow X$ есть непрерывное отображение топологических пространств Y и X , то отображение

$$\alpha_\varphi : C(X) \rightarrow C(Y), \alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi \text{ для всех } f \in C(X),$$

будет кольцевым гомоморфизмом, сохраняющим функции-константы; гомоморфизм α_φ называется индуцированным посредством φ . Если Y – одноэлементное пространство, $Y = \{y\}$, $\varphi(y) = x \in X$, то $C(Y) \cong \mathbb{R}$ и гомоморфизм $\alpha_x := \alpha_\varphi$, $\alpha_x(f) = f(x)$ для любой функции $f \in C(X)$, называется вычислением в точке x .

Пример 1. Произвольный кольцевой гомоморфизм $\alpha : C(X) \rightarrow C(Y)$ сохраняет функцию-константу 0, $\alpha(0) = 0$, но не обязан сохранять функцию-константу 1; при этом $\alpha(1)^2 = \alpha(1)$ будет мультипликативным идемпотентом кольца $C(Y)$. Возьмем непересекающиеся числовые промежутки U и V , скажем, $U = [-1; 0)$ и $V = (0; 1]$, и образуем несвязное топологическое пространство $X = U \cup V$ как подпространство числовой прямой. Кольцо $C(X)$ содержит идемпотент e : $e(U) = \{1\}$, $e(V) = \{0\}$. Главный идеал $eC(X)$ как кольцо изоморфен кольцу $C(U)$. Эндоморфизм $\alpha : C(X) \rightarrow C(X)$ кольца $C(X)$, определенный

формулой $\alpha(f)=ef, f \in C(X)$, переводит 1 в $e \neq 1$. Положим $\gamma: C(X) \rightarrow C(U)$, $\gamma(f)=f|_U$ есть ограничение функции $f \in C(X)$ на U . Эпиморфизм γ сохраняет 1 и все функции-константы. Заметим, что $\gamma=\alpha_\varphi$ при тождественном вложении $\varphi: U \rightarrow X, \varphi(x)=x$ для всех $x \in U$.

2.6. Имеет место следующее утверждение:

Предложение 8. Пусть даны произвольные хьюиттовское пространство X и тихоновское пространство Y . Тогда всякий гомоморфизм $\alpha: C(X) \rightarrow C(Y)$ кольца $C(X)$ в кольцо $C(Y)$, $\alpha(1)=1$, является индуцированным $\alpha=\alpha_\varphi$ посредством однозначно определенного непрерывного отображения $\varphi: Y \rightarrow X$. В частности, если α – изоморфизм, то φ – гомеоморфизм.

Отметим только, что $\varphi(y)=x$ при $y \in Y$ и $x \in X$ означает $\alpha^{-1}(M_x)=M_y$.

Следствие 2. Каждое хьюиттовское пространство X определяется, однозначно с точностью до гомеоморфизма, кольцом $C(X)$.

На основе предложения 7 доказывается

Двойственность Хьюитта (Е. Hewitt, 1948 [34]). Категория всех колец вида $C(X)$ с их гомоморфизмами, сохраняющих 1, в качестве морфизмов антиэквивалентна категории всех хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений.

Следствие 3. Двойственность Хьюитта справедлива для категории полуколец $C^+(X)$ с сохраняющими 1 гомоморфизмами и для категории полуполей $U(X)$ с произвольными гомоморфизмами.

Здесь следует иметь в виду, что при любом топологическом пространстве X кольцо $C(X)$ является кольцом разностей аддитивно сократимых полукольца $C^+(X)$ и полуполя $U(X)$.

Свойство rm [31, theorem 2.11]. Кольца $C(X)$ суть rm -кольца, т. е. в них каждый простой идеал содержится в единственном максимальном идеале.

Замечание 3. Теорема Гельфанда – Колмогорова и свойство rm выполняются и для полуколец $C^+(X)$. Рекомендуем разобраться с их доказательствами, приведенными в указанных источниках или в книге [18, п. 7].

2.7. Приведем классические топологические утверждения о продолжаемости непрерывных функций.

Теорема Титце – Урысона (1925, [28, теорема 2.1.8]). Всякое замкнутое подмножество произвольного нормального пространства S -расширяемо.

Из теоремы Титце – Урысона непосредственно выводится так называемая (по историческим причинам)

Большая лемма Урысона (1925, [28, теорема 1.5.10]). Любые два непересекающиеся замкнутые множества нормального пространства функционально отделимы.

Отметим, что функциональная отделимость любых двух непересекающихся замкнутых множеств произвольного T_1 -пространства влечет его нормальность.

Предложение 9. Любой компакт является нормальным пространством.

Следствие 4. Компакты суть тихоновские пространства.

Следствие 5. Каждое замкнутое подмножество произвольного компакта S -расширяемо.

Теорема расширения Урысона (1925, [31, theorem 1.17]). Для C^* -расширяемости подпространства Y тихоновского пространства X необходимо и достаточно, чтобы любые два функционально отделимые множества в Y были функционально отделимы в X .

Замечание 4. Докажите предложение 9. Изучите доказательства приведенных теорем Урысона.

3. F -пространства и их характеристики

3.1. Тихоновское пространство X называется F -пространством (Gillman, Henriksen, 1956 [30]), если кольцо $C(X)$ является кольцом Безу¹: любой конечнопорожденный идеал в $C(X)$ главный. Фактически это означает:

$$\forall f, g \in C(X) \exists d \in C(X) fC(X) + gC(X) = dC(X).$$

Мы F -пространством будем называть произвольное топологическое пространство X , для которого $C(X)$ есть кольцо Безу.

Точка x топологического пространства X называется F -точкой, если $x \in Z^0(fg) = (Z(f) \cup Z(g))^0 \Rightarrow x \in Z^0(f) \cup Z^0(g)$ для любых $f, g \in C(X)$. Отметим, что тема F -пространств затрагивается в работах [6; 8; 9; 11–13; 15; 18–21; 30; 31; 38].

3.2. Характеристики в терминах колец функций

Теорема 1. Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X есть F -пространство;
- 2) кольцо $C(X)$ является НОД-кольцом;

¹ По имени французского математика Этьена Безу (1730–1783), члена Французской академии наук, специалиста по алгебре и теории чисел.

- 3) кольцо $C(X)$ является НОК-кольцом;
- 4) $f \in /f/ \cdot C(X)$ для любой функции $f \in C(X)$;
- 5) все идеалы кольца $C(X)$ выпуклые;
- 6) все идеалы кольца $C(X)$ абсолютно выпуклые;
- 7) в $C(X)$ каждый идеал O_P , $P \in \text{Spec } C(X)$, простой;
- 8) в $C(X)$ каждый идеал O_M , $M \in \text{Max } C(X)$, простой;
- 9) любые два непересекающиеся конуль-множества $\text{coz } f$ и $\text{coz } g$, $f, g \in C(X)$, функционально отделимы, т. е. если $fg=0$, то $fh=f$ и $gh=0$ для некоторой функции $h \in C(X)$;
- 10) для любой функции $f \in C(X)$ множества $N(f)$ и $P(f)$ функционально отделимы;
- 11) каждое конуль-множество $\text{coz } f$, $f \in C(X)$, C^* -расширяемо;
- 12) решетка $\text{Id } C(X)$ дистрибутивна;
- 13) τX есть F -пространство;
- 14) $\beta \tau X$ есть F -пространство;
- 15) $\nu \tau X$ есть F -пространство;

3.3. Характеризации в терминах полуколец функций

Теорема 2. Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие условия:

- 1) X есть F -пространство;
- 2) $C^+(X)$ – полукольцо Безу;
- 3) $C^+(X)$ является НОД-полукольцом;
- 4) $C^+(X)$ является НОК-полукольцом;
- 5) все идеалы полукольца $C^+(X)$ полустрогие;
- 6) все идеалы полукольца $C^+(X)$ строгие;
- 7) в $C^+(X)$ каждый идеал O_P , $P \in \text{Spec } C^+(X)$, простой;
- 8) в $C^+(X)$ каждый идеал O_M , $M \in \text{Max } C^+(X)$, простой;
- 9) решетки $\text{Id } C(X)$ и $\text{Id } C^+(X)$ изоморфны;
- 10) решетка $\text{Id } C^+(X)$ модулярна;
- 11) решетка $\text{Id } C^+(X)$ дистрибутивна;
- 12) решетка $\text{Con } C^+(X)$ дистрибутивна;
- 13) $\text{Con } C^+(X) \subseteq \text{Con } C^\vee(X)$.

3.4. Характеризации в терминах полуполей функций

Ядром полуполя $U(X)$ или полуполя $U^\vee(X)$ называется класс 1 любой конгруэнции на этом полуполе. Непустое подмножество A полуполя $U(X)$ будет ядром тогда и только тогда, когда A есть подгруппа мультипликативной группы $U(X)$ с условием:

$$\forall a \in A \forall u, v \in U(X) (u+v=1 \Rightarrow au+v \in A).$$

Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$, порожденной парой $(u, 1)$, $u \in U(X)$, называется **главным ядром** и обозначается (u) . Отметим, что ядра полуполя $U^\vee(X)$ являются и ядрами полуполя $U(X)$ [см. 19, п. 16]. Если $U(X)=(u)$ для некоторой функции $u \in U(X)$, то полуполе $U(X)$ называется **полуполем с образующей u** ; аналогично, в случае $U^\vee(X)$.

Теорема 3. Для любого топологического пространства X равносильны следующие условия:

- 1) X есть F -пространство;
- 2) произведение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;
- 3) пересечение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;
- 4) все ядра полуполя $U(X)$ выпуклы;
- 5) решетка $\text{Con } U(X)$ дистрибутивна;
- 6) $\text{Con } U(X) \subseteq \text{Con } U^\vee(X)$;
- 7) $\text{Con } U(X) = \text{Con } U^\vee(X)$.

3.5. Характеризации на языке полуколец $[0, 1]$ -значных функций

Пусть $I=[0, 1]$ – компактное идемпотентное полукольцо с операцией сложения $\vee$, обычным умножением чисел и естественной топологией. Положим, $C(X, I)$ – идемпотентное полукольцо всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в топологическом полукольце I с поточечно заданными операциями сложения $\vee$ и умножения $\cdot$ функций.

Теорема 4. Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие условия:

- 1) X есть F -пространство;
- 2) $C(X, I)$ – полукольцо Безу;
- 3) $C(X, I)$ является НОД-полукольцом;
- 4) $C(X, I)$ является НОК-полукольцом;
- 5) каждый простой идеал полукольца $C(X, I)$ содержится в единственном максимальном идеале, т. е. $C(X, I)$ есть pt -полукольцо;

6) каждый простой идеал полукольца $C(X, \mathbf{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;

7) все простые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь по включению;

8) полукольцо $C(X, \mathbf{I})$ слабо риккартово, т. е. аннуляторы его элементов суть чистые идеалы;

9) максимальный спектр $\text{Max } C(X, \mathbf{I})$ полукольца $C(X, \mathbf{I})$ является хаусдорфовым пространством.

Другие характеристики F -пространств изложены в [19, пп. 22, 28, 34, 38].

4. P -пространства и другие классы пространств

4.1. Тихоновское пространство X называется P -пространством (Gillman, Henriksen, 1954 [29]), если каждый простой идеал кольца $C(X)$ максимален.

Точка x топологического пространства X называется P -точкой, если $x \in Z(f) \Rightarrow x \in Z^0(f)$ для любой функции $f \in C(X)$.

Тема P -пространств рассматривалась в [6; 11–13; 15; 18–21; 29; 31; 38].

Теорема 5. Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

1) X есть P -пространство;

2) кольцо $C(X)$ регулярное, т. е. $\forall f \in C(X) \exists g \in C(X) fgf = f$;

3) любое нуль-множество $Z(f), f \in C(X)$, открыто (открыто-замкнуто);

4) все идеалы кольца $C(X)$ будут z -идеалами;

5) в $C(X)$ каждый идеал $O_P, P \in \text{Spec } C(X)$, максимальный;

6) в $C(X)$ каждый идеал $O_M, M \in \text{Max } C(X)$, максимальный;

7) каждое конуль-множество на X C^* -расширяемо;

8) $\text{Con } C^+(X) = \text{Con } C^v(X)$;

9) $\text{Con } C^v(X) \subseteq \text{Con } C^+(X)$;

10) пересечение любого счетного семейства открытых множеств пространства X открыто;

11) $\forall X$ есть P -пространство;

12) все точки пространства X суть P -точки;

13) каждое конуль-множество на пространстве X C -расширяемо.

4.2. По закону контрапозиции, тихоновское пространство X будет экстремально несвязным (базисно несвязным) тогда и только тогда, когда в X внутренность любого замкнутого множества (нуль-множества) замкнута, равносильно, открыто-замкнута. Очевидно, что дискретные топологические пространства являются экстремально несвязными P -пространствами.

Замечание 5. Известно, что любое экстремально несвязное P -пространство неизмеримой мощности дискретно (теорема Исбелла). Известная аксиома Улама утверждает, что все кардиналы (мощности) неизмеримые. Существует предположение, что в аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля аксиому Улама можно доказать.

Теорема 6. Верны следующие утверждения:

1) всякое псевдокомпактное P -пространство конечно;

2) любое P -пространство базисно несвязно;

3) любое экстремально несвязное пространство базисно несвязно;

4) любое базисно несвязное пространство является нульмерным F -пространством.

Доказательство. 1) Пусть X – псевдокомпактное P -пространство. Тогда $C(X) \cong C(\beta X) = C(\nu X)$. Значит, компакт βX также будет P -пространством. Поэтому можно считать, что само X является компактным P -пространством. Предположим от противного, что пространство X бесконечно. Тогда в нем найдется собственное бесконечное открыто-замкнутое множество U_1 , которое само будет компактным P -пространством. Аналогично, в U_1 существует собственное бесконечное открыто-замкнутое множество U_2 . Продолжая этот процесс, получим бесконечную строго убывающую последовательность $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ открыто-замкнутых множеств в X . Ее пересечение U , будучи нуль-множеством на X , также открыто-замкнуто. В результате имеем счетное покрытие компактного пространства $X = (X \setminus U_1) \cup (U_1 \setminus U_2) \cup \dots \cup (U_n \setminus U_{n+1}) \cup \dots \cup U$, что невозможно. (Заметим, что при доказательстве не имеет значения пусто множество U или нет. Хотя в нашем «компактном» случае $U \neq \emptyset$).

Утверждения 2) и 3) очевидны.

4) Пусть X – базисно несвязное пространство. По предположению 3 оно нульмерно. Возьмем $f \in C(X)$. Множества $N(f)$ и $P(f)$ являются конуль-множествами. Замыкание $N(f)$ открыто-замкнуто и не пересекается с $P(f)$. Следовательно, $N(f)$ и $P(f)$ функционально отделимы. Стало быть, имеет место утверждение 10) теоремы 1. Остается применить теорему 1.

Пример 2. В силу утверждения 4) теоремы 5 базисно несвязные пространства дают примеры нульмерных F -пространств.

Пример 3. Пусть Y – произвольное локально компактное тихоновское пространство, являющееся объединением счетного семейства компактных подпространств. Тогда на $X = \beta Y \setminus Y$ будет компактным F -пространством. В частности: $\beta \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ – несвязное F -пространство, не являющееся вполне несвязным; $\beta \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ – связное F -пространство.

Пример 4 (P -пространства, не являющегося экстремально несвязным). Положим, Y – несчетное дискретное пространство и $X = Y \cup \{p\}$ – топологическое пространство, открытыми множествами которого служат все подмножества в Y и множества U , содержащие точку p и имеющие не более чем счетное дополнение $X \setminus U$. Такие множества U и $X \setminus U$ суть в точности открыто-замкнутые множества пространства X ; они же нуль-множества и конуль-множества на X . Следовательно, X есть P -пространство. Разобьем Y на два несчетных подмножества A и B . Множества A и B открыты и не замкнуты в X . Поэтому замыканием A в X будет множество $A \cup \{p\}$, не являющееся открытым. Заметим, что пространство X *финально компактно*, т. е. такое, что любое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие.

Пример 5 (экстремально несвязного пространства, не являющегося P -пространством). Пусть Y – бесконечное дискретное пространство и $X = \beta Y$ – его стоун-чеховская компактификация. Бесконечный компакт X не является P -пространством. Для доказательства экстремальной несвязности пространства X возьмем произвольное непустое открытое множество U в нем. Можно считать, что U не содержит Y . Получаем разбиение пространства Y на два (непустых) открытых множества $Y \cap U$ и $Y \setminus U$. Рассмотрим на Y непрерывную $\{0, 1\}$ -значную функцию f , равную 0 на $Y \cap U$ и равную 1 на $Y \setminus U$. Функция f непрерывно продолжается до $\{0, 1\}$ -значной функции f^* на $\beta Y = X$. Тогда нуль-множество $Z(f^*)$ открыто-замкнуто в X и является замыканием открытого множества U в X .

4.3. Приведем алгебраические характеристики базисно несвязных и экстремально несвязных пространств.

Теорема 7. Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия:

- 1) X базисно несвязно;
- 2) аннуляторы главных идеалов кольца $C(X)$ выделяются прямыми слагаемыми в $C(X)$, т. е. кольцо $C(X)$ риккартово;
- 3) все аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ чистые;
- 4) кольцо $C(X)$ слабо риккартово и его пространство $\text{Min } C(X)$ всех минимальных простых идеалов компактно;
- 5) νX – базисно несвязное пространство;
- 6) βX – базисно несвязное пространство.

Заметим, что теорема 7 верна также для полуколец $C^+(X)$, $C^\vee(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$.

Теорема 8. Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия:

- 1) X экстремально несвязно;
- 2) аннуляторные идеалы кольца $C(X)$ выделяются прямыми слагаемыми;
- 3) νX экстремально несвязно;
- 4) βX экстремально несвязно.

Очевидно, что теорема 8 имеет место и для полуколец $C^+(X)$, $C^\vee(X)$ и $C(X, \mathbf{I})$.

4.4. Рассмотрим алгебраические характеристики топологических пространств из некоторых других классов пространств.

Конгруэнция ρ на полуполе $U(X)$ называется *идеальной*, если в кольце $C(X)$ существует такой идеал J , что $u\rho v \Leftrightarrow u-v \in J \ (\forall u, v \in U(X))$.

Теорема 9. Для всякого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X – псевдокомпактное пространство;
- 2) все конгруэнции на полуполе $U(X)$ идеальные;
- 3) любая собственная конгруэнция на полуполе $U(X)$, равносильно, на $U^\vee(X)$, содержится в некоторой максимальной конгруэнции;
- 4) $U(X)$ – полуполе с образующей;
- 5) $U^\vee(X)$ – полуполе с образующей.

Через $C_p(X)$ обозначается кольцо $C(X)$, наделенное топологией поточечной сходимости и превращающее его в топологическое кольцо. Аналогично получаются топологическое полукольцо $C^+_p(X)$ и топологическое полуполе $U_p(X)$.

Теорема 10. Для произвольного тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X – нормальное пространство;
- 2) решетка всех замкнутых идеалов топологического кольца $C_p(X)$ является подрешеткой решетки $\text{Id } C(X)$ всех идеалов кольца $C(X)$;

3) решетка всех замкнутых идеалов (замкнутых конгруэнций) топологического полукольца $C^+_p(X)$ является подрешеткой решетки $\text{Id } C^+(X)$ (соответственно, $\text{Con } C^+(X)$);

4) решетка всех замкнутых конгруэнций топологического полуполя $U_p(X)$ является подрешеткой решетки $\text{Con } U(X)$.

Полукольцо называется нетеровым², если каждый его идеал – конечнопорожденный, т. е. как идеал порождается конечным множеством элементов.

Теорема 11. Для каждого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:

- 1) X – конечное пространство;
- 2) кольцо $C(X)$ нетерово;
- 3) полукольцо $C^+(X)$, эквивалентно, полукольцо $C^\vee(X)$, нетерово;
- 4) все конгруэнции на полуполе $U(X)$, равносильно, на $U^\vee(X)$, главные;
- 5) все главные конгруэнции на полуполе $U(X)$ или $U^\vee(X)$ дополняемы;
- 6) решетка $\text{Con } U(X)$, эквивалентно, решетка $\text{Con } U^\vee(X)$, булева.

По поводу теорем 9–11 [см. 19, п. 22].

Тихоновское пространство называется P' -пространством, если внутренность любого его непустого нуль-множества сама непустая [7].

Теорема 12. Для каждого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:

- 1) X есть P' -пространство;
- 2) каждое нуль-множество на X канонически замкнуто;
- 3) в кольце $C(X)$, равносильно, в полукольце $C^+(X)$, необратимые элементы суть делители нуля;
- 4) $\forall X$ есть P' -пространство.

Сделаем три дополняющих замечания о рассматриваемых в статье классах топологических пространств.

Замечание 6. Среди замкнутых множеств топологических пространств выделяются нуль-множества (называемые еще функционально замкнутыми) и канонически замкнутые множества. В терминах соотношений между ними перечислим характеристики следующих видов тихоновских пространств X :

- X – совершенно нормальное пространство $\Leftrightarrow$ (все) замкнутые множества в X являются нуль-множествами;
- X – дискретное пространство $\Leftrightarrow$ замкнутые множества в X канонически замкнуты;
- X есть P -пространство $\Leftrightarrow$ нуль-множества на пространстве X канонически замкнуты.

Вопрос. Когда любое канонически замкнутое множество тихоновского пространства X будет нуль-множеством? Совершенно нормальные пространства и экстремально несвязные пространства обладают указанным свойством.

Замечание 7. Напомним характеристики некоторых видов тихоновских пространств X в терминах непрерывной расширяемости:

- X – нормальное пространство $\Leftrightarrow$ (все) его замкнутые множества C -расширяемы, равносильно, C^* -расширяемы;
- X будет F -пространством $\Leftrightarrow$ его конуль-множества C^* -расширяемы;
- X будет P -пространством $\Leftrightarrow$ его конуль-множества C -расширяемы;
- X – экстремально несвязное пространство $\Leftrightarrow$ его открытые множества C^* -расширяемы;
- открытые множества пространства X C -расширяемы $\Leftrightarrow X$ – экстремально несвязное пространство, в котором пересечения континуальных семейств открытых множеств открыты [18, теорема 8.18, см. замечание 5].

Замечание 8. Мы рассмотрели следующие классы тихоновских пространств, которые связаны включениями:

$$\begin{aligned} \{\text{дискретные}\} &\subseteq \{P\text{-пространства}\} \cap \{\text{экстремально несвязные}\} \\ \{P\text{-пространства}\} \cup \{\text{экстремально несвязные}\} &\subseteq \{\text{базисно несвязные}\} \\ \{\text{базисно несвязные}\} &\subseteq \{\text{нульмерные}\} \cap \{F\text{-пространства}\} \\ \{\text{базисно несвязные}\} \cap \{P\text{-пространства}\} &= \{P\text{-пространства}\} \end{aligned}$$

5. Задачи для исследований

Задача 1. Относительно каких операций и отображений топологических пространств сохраняются свойства: быть F -пространством; быть P -пространством; быть базисно несвязным пространством; быть экстремально несвязным пространством? [см. Приложение в книге Энгелькина 28].

Задача 2. Легко видеть, что $\text{Id } C^+(X) = \text{Id } C^\vee(X)$ для любого F -пространства X . Верно ли обратное утверждение?

² По имени немецкого математика Эмми Нётер (1882–1935), одной из основоположниц современной абстрактной алгебры.

Задача 3. Когда решетка $\text{Con } C^\vee(X)$ модулярна? дистрибутивна?

Задача 4. Является ли решетка ядер $\text{Con } U(X)$ ретрактом решетки конгруэнций $\text{Con } C^+(X)$? [см. 18, задача 19.5].

Задача 5. Развить теорию полуколец непрерывных $\mathbf{Q}$ -значных функций.

Задача 6. Исследовать полукольца $C(X, S)$ для:

1) $S = \{2^n: n \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$ – идемпотентное полуполе с нулем;

2) $S = \{2^{-n}: n \in \mathbf{N}\} \cup \{0, 1\}$ – идемпотентное полукольцо.

В S берется операция сложения $\vee$ (max), числовое умножение и естественная топология. В первом случае S – нульмерное локально компактное циклическое полуполе с 0, во втором случае S – нульмерное компактное циклическое полукольцо с 0 и 1.

Список литературы

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.
2. Александров П. С., Урысон П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах. Изд. 3-е. М. : Наука, 1971. 144 с.
3. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М. : Наука, 1974. 424 с.
4. Биркгоф Г. Теория решеток. М. : Наука, 1984. 568 с.
5. Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 923–937.
6. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.
7. Вечтомов Е. М. О P -пространствах / Горьков. гос. ун-т. Горький, 1981. 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1836-81 Деп.
8. Вечтомов Е. М. Об идеалах колец непрерывных функций // Известия вузов. Математика. 1981. № 1. С. 3–10.
9. Вечтомов Е. М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F -пространства // Математические заметки. 1983. Т. 34. Вып. 3. С. 321–332.
10. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. / ВИНТИ. Серия: Алгебра. Геометрия. Топология. 1990. Т. 28. С. 3–46.
11. Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. / ВИНТИ. Серия: Алгебра. Геометрия. Топология. 1991. Т. 29. С. 119–191.
12. Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы : учебное пособие для спецкурса. М. : МПГУ, 1992. 120 с.
13. Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец : монография. М. : МПГУ, 1993. 190 с.
14. Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций и их максимальный спектр // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 6. С. 32–49.
15. Вечтомов Е. М. Делимость в кольцах непрерывных функций $C(X, F)$ // Известия вузов. Математика. 1996. № 1. С. 7–16.
16. Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.
17. Вечтомов Е. М. Математика: основные математические структуры. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
18. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1 [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 384 с.
19. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2 [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. 316 с.
20. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В. Элементы теории полуколец : монография. Киров : «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.
21. Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В. Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.
22. Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.
23. Гретцер Г. Общая теория решеток. М. : Мир, 1982. 456 с.
24. Келли Дж. Общая топология. Изд. 2-е. М. : Наука, 1981. 432 с.
25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 6-е, испр. М. : Наука, 1989. 624 с.
26. Ламбек И. Кольца и модули. М. : Мир, 1971. 280 с.
27. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.
28. Энгелькинг Р. Общая топология. М. : Мир, 1986. 752 с.
29. Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 77. No. 2. Pp. 340–362.

30. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 82. No. 2. Pp. 366–391.
31. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 p.
32. Golan J. S. Semirings and their applications. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
33. Henriksen M. Rings of continuous functions from an algebraic point of view // Ordered Algebraic Structures. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989. Pp. 143–174.
34. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.
35. Kaplansky I. Topological rings // Amer. J. Math. 1947. Vol. 69. No. 1. Pp. 153–183.
36. Stone M. H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 41. No. 3. Pp. 375–481.
37. Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sciences (New York). 1995. Vol. 74. No. 1. Pp. 749–798.
38. Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in a topological division ring // J. Math. Sciences (New York). 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

Semirings of continuous functions on topological spaces

E. M. Vechtomov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article is an introduction to the theory of rings and semirings of continuous real-valued functions, which allows the reader to get an initial idea of the essence of the subject. The elements of the theory of rings of continuous functions and general topology necessary for the study of functional algebra are presented. Various algebraic and functional-topological characterizations of F-spaces and P-spaces are considered. Research problems on the theory of semirings of continuous functions are formulated.

Keywords: ring of continuous functions, semiring of continuous functions, F-space, P-space.

References

1. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriju mnozhestv i obshhuju topologiju* [Introduction to set theory and general topology]. M. Nauka (Science). 1977. 368 p.
2. Aleksandrov P. S., Uryson P. S. *Memuar o kompaktnyh topologicheskikh prostranstvakh. Izd. 3-e* [Memoir on compact topological spaces. Ed. 3d]. M. Nauka (Science). 1971. 144 p.
3. Arhangel'skij A. V., Ponomarev V. I. *Osnovy obshhej topologii v zadachah i uprazhnenijah* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. M. Nauka (Science). 1974. 424 p.
4. Birkhoff G. *Teorija reshetok* [Theory of lattices]. M. Nauka (Science). 1984. 568 p.
5. Varankina V. I. *Maksimal'nye idealy v polukol'cah nepreryvnykh funktsij* [Maximal ideals in semirings of continuous functions] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 1995. Vol. 1. Is. 4. Pp. 923–937.
6. Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A. *Polukol'ca nepreryvnykh neotricatel'nykh funktsij: delimost', idealy, kongrujencii* [Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and Applied Mathematics. 1998. Vol. 4. Is. 2. Pp. 493–510.
7. Vechtomov E. M. *O P'-prostranstvakh* [On P'-spaces] / Gorky State University. Gorky, 1981. 6 p. Dep. VINITI. No. 1836-81 Dep.
8. Vechtomov E. M. *Ob idealah kolec nepreryvnykh funktsij* [On the ideals of rings of continuous functions] // *Izvestija vuzov. Matematika* – News of universities. Mathematics. 1981. No. 1. Pp. 3-10.
9. Vechtomov E. M. *Distributivnye kol'ca nepreryvnykh funktsij i F-prostranstva* [Distributive rings of continuous functions and F-spaces] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1983. Vol. 34. Is. 3. Pp. 321–332.
10. Vechtomov E. M. *Voprosy opredeljaemosti topologicheskikh prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnykh funktsij* [Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tehn.* – Results of science and technology / VINITI. Series: Algebra. Geometry. Topology. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.
11. Vechtomov E. M. *Kol'ca nepreryvnykh funktsij. Algebraicheskie aspekty* [Rings of continuous functions. Algebraic aspects] // *Itogi nauki i tehn.* – Results of science and technology / VINITI. Series: Algebra. Geometry. Topology. 1991. Vol. 29. Pp. 119–191.
12. Vechtomov E. M. *Kol'ca nepreryvnykh funktsij na topologicheskikh prostranstvakh. Izbrannye temy : uchebnoe posobie dlja speckursa* [Rings of continuous functions on topological spaces. Selected topics : textbook for a special course]. M. MPSU. 1992. 120 p.
13. Vechtomov E. M. *Funktsional'nye predstavlenija kolec : monografija* [Functional representations of rings : monograph]. M. MPSU. 1993. 190 p.
14. Vechtomov E. M. *Kol'ca nepreryvnykh funktsij i ih maksimal'nyj spektr* [Rings of continuous functions and their maximum spectrum] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1994. Vol. 55. Is. 6. Pp. 32–49.
15. Vechtomov E. M. *Delimost' v kol'cah nepreryvnykh funktsij $C(X, F)$* [Divisibility in rings of continuous functions $C(X, F)$] // *Izvestija vuzov. Matematika* – News of higher schools. Mathematics. 1996. No. 1. Pp. 7–16.

16. Vechtomov E. M. *Reshetka podalgebr kolec nepreryvnyh funkcij i h'yuitovskie prostranstva* [Lattice of subalgebras of rings of continuous functions and Hewitt spaces] // Mathematical notes. 1997. Vol. 62. Is. 5. Pp. 687–693.
17. Vechtomov E. M. *Matematika: osnovnye matematicheskie struktury* [Mathematics: basic mathematical structures. Ed. 2nd]. M. Yurayt. 2018. 296 p.
18. Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. *Jelementy funkcional'noj algebry : monografija : v 2 t. T. 1 [pod red. E. M. Vechtomova]* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 1 [ed. by E. M. Vechtomov]]. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 384 p.
19. Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. *Jelementy funkcional'noj algebry : monografija : v 2 t. T. 2 [pod red. E. M. Vechtomova]* [Elements of functional algebra : monograph : in 2 vols. Vol. 2 [ed. by E. M. Vechtomov]]. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. 316 p.
20. Vechtomov E. M., Lubjagina E. N., Chermnyh V. V. *Jelementy teorii polukolec : monografija* [Elements of the theory of semirings-rings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.
21. Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. *Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semirings of continuous functions] // *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.
22. Gel'fand I. M., Kolmogorov A. N. *O kol'cah nepreryvnyh funkcij na topologicheskikh prostranstvakh* [On rings of continuous functions on topological spaces] // *Doklady AN SSSR* – Reports of the USSR Academy of Sciences. 1939. Vol. 22. No. 1. Pp. 11–15.
23. Gretzer G. *Obshhaja teorija reshetok* [General theory of lattices]. M. Mir (World). 1982. 456 p.
24. Kelly J. *Obshhaja topologija. Izd. 2-e* [General topology. Ed. 2nd]. M. Nauka (Science). 1981. 432 p.
25. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. Izd. 6-e, ispr.* [Elements of the theory of functions and functional analysis. 6th ed., corr.] M. Nauka (Science). 1989. 624 p.
26. Lambek I. *Kol'ca i moduli* [Rings and modules]. M. Mir (World). 1971. 280 p.
27. Chermnyh V. V. *Funkcional'nye predstavlenija polukolec : monografija* [Functional representations of semirings : monograph]. Kirov. VyatSHU publishing house. 2010. 224 p.
28. Engelking R. *Obshhaja topologija* [General topology]. M. Mir (World). 1986. 752 p.
29. Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1954. Vol. 77. No. 2. Pp. 340–362.
30. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. Vol. 82. No. 2. Pp. 366–391.
31. Gillman L., Jerison M. *Rings of continuous functions*. New York, 1976. 300 p.
32. Golan J. S. *Semirings and their applications*. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
33. Henriksen M. *Rings of continuous functions from an algebraic point of view* // *Ordered Algebraic Structures*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989. Pp. 143–174.
34. Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1948. Vol. 64. No. 1. Pp. 45–99.
35. Kaplansky I. Topological rings // *Amer. J. Math.* 1947. Vol. 69. No. 1. Pp. 153–183.
36. Stone M. H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1937. Vol. 41. No. 3. Pp. 375–481.
37. Vechtomov E. M. Rings and sheaves // *J. Math. Sciences (New York)*. 1995. Vol. 74. No. 1. Pp. 749–798.
38. Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in a topological division ring // *J. Math. Sciences (New York)*. 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

О функциях, выпуклых по М. Авриел. I. Геометрическая характеристика

С. И. Калинин¹, Н. С. Протасов², Ю. И. Макарова³

¹доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11146@vyatsu.ru

²магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: protasovnekit@gmail.com

³магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: Yulyarogozhnikova981007@mail.ru

Аннотация. В работе осмысливается определение понятия (h, φ) -выпуклой на промежутке функции, обобщающего ряд известных понятий выпуклости, включая понятие классической выпуклости. Приводится геометрическая характеристика (h, φ) -выпуклых и (h, φ) -вогнутых функций.

Ключевые слова: выпуклая функция, (h, φ) -выпуклая функция.

Введение. В настоящей статье авторы представляют начальные исследования, проведенные в рамках реализации содержания курса «Методика преподавания математики в вузе» для магистрантов математических направлений подготовки в Вятском государственном университете. Обсуждается вопрос о работе с определением понятия «выпуклая функция» на этапе обобщения.

Мы предполагаем осмыслить понятие так называемой (h, φ) -выпуклой функции, обобщающее ряд известных понятий различных видов выпуклости вещественных функций одной вещественной переменной. Наша основная цель – акцентировать внимание читателя на геометрической характеристике (h, φ) -выпуклых функций.

1. Понятие (h, φ) -выпуклой функции

Пусть $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке I числовой прямой Ox , $L = \text{conv } f(I)$ – пересечение всех промежутков, содержащих множество значений $f(I)$ функции f , или по-другому – выпуклая оболочка этого множества. Пусть далее $h: I \rightarrow \mathbf{R}$ и $\varphi: L \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции. Следуя [4, с. 269], введем в рассмотрение следующее понятие.

Определение 1. Функцию f условимся называть (h, φ) -выпуклой на промежутке I , если для любых чисел a и b из I и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(h^{-1}(\lambda h(a) + (1 - \lambda)h(b))) \leq \varphi^{-1}(\lambda \varphi(f(a)) + (1 - \lambda)\varphi(f(b))). \quad (1)$$

Если для любых различных чисел a и b из I и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(h^{-1}(\lambda h(a) + (1 - \lambda)h(b))) < \varphi^{-1}(\lambda \varphi(f(a)) + (1 - \lambda)\varphi(f(b))), \quad (2)$$

то функцию f будем называть строго (h, φ) -выпуклой на рассматриваемом промежутке.

Очевидно, строго (h, φ) -выпуклая функция является (h, φ) -выпуклой.

Аналогично определяются (h, φ) -вогнутая и строго (h, φ) -вогнутая функции, для чего в неравенствах (1)–(2) следует использовать знаки $\geq$ и $>$ соответственно.

Подчеркнем, понятие (h, φ) -выпуклой на промежутке функции обобщает многие другие хорошо изученные понятия различных видов выпуклости вещественных функций. Действительно, если в определении 1 положить $h(x) = x$, $\varphi(y) = y$, то будем иметь классическое определение понятия выпуклой на промежутке I функции.

Если $h(x) = x^p$, $x > 0$, $p \neq 0$, а $\varphi(y) = y$, то мы приходим к определению понятия p -выпуклой на промежутке $I \subset (0; \infty)$ функции [13], в частности, при $p = -1$ – к определению гар-

монически выпуклой на промежутке $l \subset (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ функции [7], [11], а при $p = \frac{1}{2}$ – $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ – выпуклой на промежутке $l \subset (0; \infty)$ функции [2]–[3].

Заметим также, пара функций $h(x) = \ln x$, $\varphi(y) = y$ порождает определение GA-выпуклой функции [6], [9], [12], пара $h(x) = x$, $\varphi(y) = \ln y$ – логарифмически выпуклой [1], [8], а пара $h(x) = \ln x$, $\varphi(y) = \ln y$ – геометрически выпуклой функции [10].

Далее, если взять $h(x) = x$, а $\varphi(y) = e^{ry}$ ($r \neq 0$), то будем иметь определение r -выпуклой функции [4], [5], [14], в частности, при $r = 1$ – экспоненциально выпуклой.

2. Вспомогательная лемма

Пусть $h: l \rightarrow \mathbf{R}$ и $\varphi: L \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции на промежутках $l \subset O_x$ и $L \subset O_y$ соответственно. Положим, $\Pi_{l,L} = \{(x; y) \mid x \in l, y \in L\}$. Введем в рассмотрение

Определение 2. Всякую кривую, задаваемую уравнением

$$y = \varphi^{-1}(\alpha + \beta h(x)), \quad x \in l,$$

где α и β – некоторые константы, условимся называть (h, φ) -кривой, или (h, φ) -дугой.

Справедлива следующая

Лемма. Для любых точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2) \in \Pi_{l,L}$ ($x_1 \neq x_2$) существует единственная (h, φ) -кривая, проходящая через данные точки.

Доказательство. Заметим, система уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \varphi^{-1}(\alpha + \beta h(x_1)) \\ y_2 = \varphi^{-1}(\alpha + \beta h(x_2)) \end{cases}$$

относительно неизвестных параметров α и β равносильна линейной системе

$$\begin{cases} \varphi(y_1) = \alpha + \beta h(x_1) \\ \varphi(y_2) = \alpha + \beta h(x_2) \end{cases}.$$

Последняя же имеет единственное решение

$$\alpha = \frac{\varphi(y_1)h(x_2) - \varphi(y_2)h(x_1)}{h(x_2) - h(x_1)}, \quad \beta = \frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{h(x_2) - h(x_1)}. \quad (3)$$

Следовательно, кривая $y = \varphi^{-1}(\alpha + \beta h(x))$, где α и β находятся по формулам (3), есть единственная (h, φ) -кривая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$. Лемма доказана.

Замечание 1. В условиях леммы уравнение (h, φ) -кривой, соединяющей точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, можно записать в виде

$$y = \varphi^{-1} \left(\frac{h(x_2) - h(x)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(y_1) + \frac{h(x) - h(x_1)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(y_2) \right). \quad (4)$$

Замечание 2. Если у точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ ординаты совпадают, т. е. данные точки лежат на горизонтали, то уравнение (4) будет иметь вид

$$y = y_1.$$

В этом случае (h, φ) -кривая, соединяющая рассматриваемые точки, есть упомянутая горизонталь.

3. Геометрическая характеристика (h, φ) -выпуклой функции

Пусть h и φ – функции, характеризующие (h, φ) -выпуклость функции f на промежутке l ; $[a; b]$ – произвольный отрезок этого промежутка. Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика (h, φ) -выпуклой функции f будет находиться не выше точки (h, φ) -дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ графика, с той же абсциссой x .

Данный факт и будет характеризовать геометрически рассматриваемую функцию.

Доказательство. Отправляясь от (4), составим уравнение упоминаемой (h, φ) -дуги

$$y = \varphi^{-1} \left(\frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} \varphi(f(a)) + \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} \varphi(f(b)) \right) \quad (5)$$

и $x \in (a; b)$ представим в виде

$$x = h^{-1} \left(\frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} h(a) + \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} h(b) \right). \quad (6)$$

Заметим при этом, что для величин правой части представления (5), записанных в виде дробей, выполняются условия:

$$\frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} \in (0; 1), \quad \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} \in (0; 1), \quad \frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} + \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} = 1.$$

Используя эти условия и (h, φ) -выпуклость функции f , ее значение $f(x)$ оценим сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= f \left(h^{-1} \left(\frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} h(a) + \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} h(b) \right) \right) \leq \\ &\leq \varphi^{-1} \left(\frac{h(x_2) - h(x)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(f(a)) + \frac{h(x) - h(x_1)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(f(b)) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Но в произведенной оценке выражение (7) есть правая часть (5). Отсюда следует, что точка $(x; f(x))$, $x \in (a; b)$, графика функции f лежит не выше точки с координатами x и $\varphi^{-1} \left(\frac{h(x_2) - h(x)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(f(a)) + \frac{h(x) - h(x_1)}{h(x_2) - h(x_1)} \varphi(f(b)) \right)$ (h, φ) -дуги (5). Нужно показано.

Аналогичными рассуждениями доказывается

Предложение 2. Если $f(x)$ – строго (h, φ) -выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит строго ниже точки (h, φ) -дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x .

Соответствующую геометрическую характеристику читатель может сформулировать и в отношении (h, φ) -вогнутых функций.

4. Геометрическое определение (h, φ) -выпуклости функции

Покажем, что предложение 1 обратимо. Справедливо

Предложение 3. Пусть $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке l числовой прямой Ox , $L = \text{conv } f(l)$. Пусть далее $h: l \rightarrow \mathbf{R}$ и $\varphi: L \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функ-

ции. Если для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит не выше точки (h, φ) -дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x , то f – (h, φ) -выпуклая на промежутке l функция.

Доказательство. В условиях доказываемого предложения для любых чисел a и b из l будет выполняться неравенство (7). Положим, в нем $\frac{h(b) - h(x)}{h(b) - h(a)} = \lambda$, тогда $\frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} = 1 - \lambda$.

В терминах λ это неравенство запишется в виде (1), в котором λ будет меняться от 0 до 1 при изменении x от a до b .

Таким образом, для функции f реализуется определение 1 ее (h, φ) -выпуклости на промежутке l . Предложение 3 доказано.

Установленное предложение дает геометрическое определение понятия (h, φ) -выпуклой на промежутке функции.

Ясно, что аналогично доказывается

Предложение 4. Пусть $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, заданная на промежутке l числовой прямой Ox , $L = \text{conv } f(l)$. Пусть $h: l \rightarrow \mathbf{R}$ и $\varphi: L \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывные и строго монотонные функции. Если для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит ниже точки (h, φ) -дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x , то f – строго (h, φ) -выпуклая на промежутке l функция.

Данное предложение дает геометрический способ определения строго (h, φ) -выпуклой на промежутке функции.

Замечание 3. Предложения 3–4 с соответствующими изменениями можно переформулировать и в отношении (h, φ) -вогнутых функций.

Список литературы

1. Аносов Д. В. О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. 2001. Серия 3. Вып. 5. С. 158–163.
2. Калинин С. И., Леонтьева Н. В. $(1/2; 1)$ -выпуклые функции. Ч. I // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 97–104.
3. Калинин С. И., Леонтьева Н. В. $(1/2; 1)$ -выпуклые функции. Ч. II // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). С. 4–23.
4. Avriel M. Nonlinear Programming: Analysis and Methods. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
5. Avriel M. R-Convex functions // Mathematical Programming. 1972. No. 2. Pp. 309–323.
6. Guan Kaizhong GA-convexity and its applications // Anal. Math. 2013. Vol. 39. Number 3. Pp. 189–208.
7. İşcan İ., Wu S. Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals // Applied Mathematics and Computation. 2014. No. 238. Pp. 237–244.
8. Montel P. Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques // J. de math. Pures et appl. 1928. T. 7. V. 1. C. 29–60.
9. Niculescu C. P. Convexity according to the geometric mean // J. Math. Anal. Appl. 2000. No. 2. Vol. 3. Pp. 155–167.
10. Noor M. A. et al. Geometrically Relative Convex Functions // Appl. Math. Inf. Sci. 8. 2014. No. 2. Pp. 607–616.
11. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2004. Vol. 17. Number 1. Pp. 51–61.
12. Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang. The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // J. of Inequal. and App. Vol. 2010. Article ID 507560. 11 p. DOI: 10.1155/2010/507560.
13. Zhang K. S., Wan J. P. P-convex functions and their properties // Pure Appl. Math. 2007. No. 23 (1). Pp. 130–133.
14. Zhao Y. X., Wang S. Y., Coladas Uria L. Characterizations of r-Convex Functions // J Optim. Theory Appl. 2010. No. 145. Pp. 186–195.

On convex functions according to M. Avriel. I. Geometric characterization

S. I. Kalinin¹, N. S. Protasov², Yu. I. Makarov³

¹Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Fundamental Mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr11146@vyatsu.ru

²graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: protasovnekit@gmail.com

³graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: Yulyarogozhnikova981007@mail.ru

Abstract. The paper comprehends the definition of the concept of a convex function on the interval, generalizing a number of well-known concepts of convexity, including the concept of classical convexity. Geometric characterization of (h, φ) -convex and (h, φ) -concave functions is given.

Keywords: convex function, (h, φ) -convex function.

References

1. Anosov D. V. *O summe logarifmicheski vypuklykh funkciy* [On the sum of logarithmically convex functions] // *Matematicheskoe prosveshchenie* – Mathematical enlightenment. 2001. Series 3. Is. 5. Pp. 158–163.
2. Kalinin C. I., Leont'eva N. V. $(1/2; 1)$ -vypuklye funkciy. Ch. I [(1/2; 1)-convex functions. Part I] // *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2018. Is. 1 (26). Pp. 97–104.
3. Kalinin C. I., Leont'eva N. V. $(1/2; 1)$ -vypuklye funkciy. Ch. II [(1/2; 1)-convex functions. Part II] // *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2020. Is. 3 (36). Pp. 4–23.
4. Avriel M. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. New Jersey : Prentice-Hall, 1976.
5. Avriel M. R-Convex functions // *Mathematical Programming*. 1972. No. 2. Pp. 309–323.
6. Guan Kaizhong GA-convexity and its applications // *Anal. Math.* 2013. Vol. 39. No. 3. Pp. 189–208.
7. İşcan İ., Wu S. Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals // *Applied Mathematics and Computation*. 2014. No. 238. Pp. 237–244.
8. Montel P. Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques // *J. de math. Pures et appl.* 1928. T. 7. V. 1. Pp. 29–60.
9. Niculescu C. P. Convexity according to the geometric mean // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. No. 2. Vol. 3. Pp. 155–167.
10. Noor M. A. et al. Geometrically Relative Convex Functions // *Appl. Math. Inf. Sci.* 8. 2014. No. 2. Pp. 607–616.
11. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some characterizations of harmonically log-convex functions // *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*. 2004. Vol. 17. No. 1. Pp. 51–61.
12. Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang. The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // *J. of Inequal. and App.* Vol. 2010. Article ID 507560. 11 p. DOI: 10.1155/2010/507560.
13. Zhang K. S., Wan J. P. P-convex functions and their properties // *Pure Appl. Math.* 2007. No. 23 (1). Pp. 130–133.
14. Zhao Y. X., Wang S. Y., Coladas Uria L. Characterizations of r-Convex Functions // *J Optim. Theory Appl.* 2010. No. 145. Pp. 186–195.

О методах приближенного вычисления определенного интеграла

Н. А. Кириллова¹, Ю. А. Куликова²

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики, Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова.

Россия, г. Абакан. ORCID: 0000-0001-6946-8486. E-mail: nadyakirillova@mail.ru

²студент 4 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (направленность Математика, Физика), Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова. Россия, г. Абакан. E-mail: yul_kulikova@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о различных способах приближенного вычисления определенного интеграла. В школьных учебниках по началам математического анализа, учебниках по высшей математике и не в каждом современном учебнике вуза по математическому анализу учащихся знакомят с разнообразием способов приближенного вычисления определенного интеграла. В основном рассматривается один способ – это метод прямоугольников. Однако помимо него существует еще метод трапеций и парабол. Даже если рассматривать один метод прямоугольников, то и там существуют разные подходы – это методы средних прямоугольников, левых и правых прямоугольников. Изучение всех этих подходов при рассмотрении определенного интеграла поможет учащимся увидеть разнообразие математической науки, что одна и та же задача может иметь несколько способов решений.

Ключевые слова: формулы Ньютона – Лейбница, прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона).

Как всем известно, формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где функция $f(x)$

непрерывна, применяется для нахождения определенного интеграла. Но чтобы ею воспользоваться, должна быть известна одна из первообразных функций $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$. Однако не для всех элементарных функций их первообразные также являются элементарными функциями. Приведем примеры: интеграл Пуассона $\int e^{-x^2} dx$, интегралы Френеля $\int \cos x^2 dx$ и

$\int \sin x^2 dx$, интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$ и многие другие. Заметим, что функция $f(x)$ может быть

задана не аналитически, а например, графически. Тогда в этих случаях использовать формулу Ньютона – Лейбница невозможно. Вследствие этого возникает необходимость использования методов приближенного вычисления определенного интеграла. В основу этих методов положен геометрический смысл определенного интеграла, который состоит в том, что определенный интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ для функции $y=f(x)$, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$, есть площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$. Приближенное значение площади криволинейной трапеции и принимается за приближенное значение соответствующего определенного интеграла.

На практике чаще других используют три метода (формулы) приближенного вычисления определенного интеграла – это формула прямоугольников, формула трапеций и формула парабол (Симпсона):

$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) - \text{формула прямоугольников;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} * \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \text{формула трапеций;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} * ((f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})))$$

– формула Симпсона (парабол).

Заметим, что в формулах n – это количество равных интервалов, на которые поделен отрезок $[a; b]$, h – длина интервала, равная $\frac{b-a}{n}$.

С помощью приведенных выше формул решим следующую задачу: вычислить точно по формуле Ньютона – Лейбница, а также приближенно тремя методами определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx$, сравнить полученные результаты.

Найдем значение интеграла от функции $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{5}$ на отрезке $[1; 3]$ с помощью формулы Ньютона – Лейбница методом интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx &= \frac{1}{5} \int_1^3 x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = \frac{1}{5} \left(-x^2 \cos x \Big|_1^3 + 2 \int_1^3 x \cos x dx \right) = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| = \frac{1}{5} \left(-x^2 \cos x \Big|_1^3 + 2 \left(x \sin x \Big|_1^3 - \int_1^3 \sin x dx \right) \right) = \frac{1}{5} (-x^2 \cos x + 2x \sin x + \\ &+ 2 \cos x) \Big|_1^3 \approx 1,111. \end{aligned}$$

Узнаем, какой результат даст нам метод прямоугольников. Проиллюстрируем графически, площадь какой фигуры мы будем находить этим методом. На рисунке 1 эта ступенчатая фигура окрашена в серый цвет.

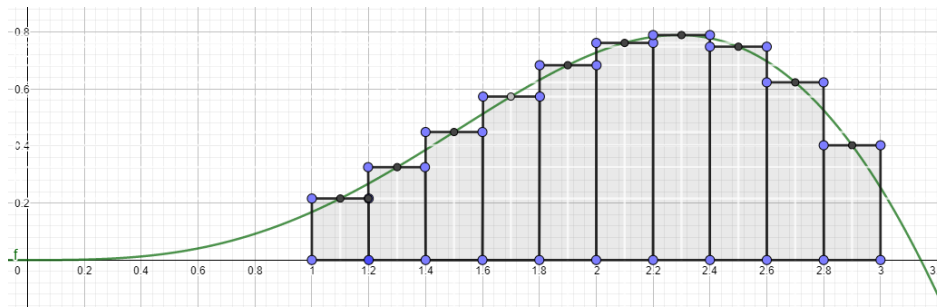


Рис. 1. Метод прямоугольников

Определим шаг h , учитывая, что $n=10$. $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} = 0,2$. Результаты вычислений приведем в таблице 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{i-1} + \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
$f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$	0,21567	0,32568	0,44887	0,57318	0,68323	0,76135	0,78896	0,74809	0,62312	0,40242

Таким образом, по формуле прямоугольников получаем, что

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx 0,2 * 5,57054 = 1,114114.$$

При получении этого результата мы использовали метод прямоугольников. Можно видеть, что различие в вычислении данного интеграла по формулам Ньютона – Лейбница и прямоугольников составляет в 0,3 %. Это говорит о том, что применение рассматриваемого метода приближенно-го вычисления дает достаточно хорошую точность вычислений.

Используя метод трапеций, мы будем находить площадь фигуры, которая изображена на рисунке 2.

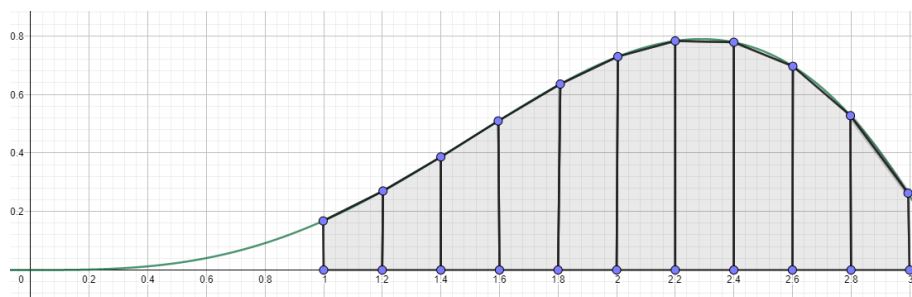


Рис. 2. Метод трапеций

По этому методу результаты вычислений приведены в таблице 2. Напомним, что шаг $h = 0,2$ при $n=10$.

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x_i)$	0,16830	0,26842	0,38632	0,51180	0,63109	0,72264	0,78263	0,77818	0,69696	0,52512	0,25402

Тогда по формуле трапеций имеем следующее:

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx \frac{0,2}{2} * (0,16830 + 2 * 5,30316 + 0,25402) = 1,102864.$$

Заметим, что результаты вычислений по формуле Ньютона – Лейбница и методу трапеций различаются на 0,8 %. Этот результат является несколько хуже, чем при использовании метода прямоугольников.

Применим к рассматриваемому интегралу метод парабол. Длина шага и количество интервалов разбиения отрезка интегрирования остаются такими же: $h = 0,2$. $n=10$. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x_i)$	0,16830	0,26842	0,38632	0,51180	0,63109	0,72264	0,78263	0,77818	0,69696	0,52512	0,25402

Вычислим интеграл по формуле:

$$\int_1^3 \frac{x^2 \sin x}{5} dx \approx \frac{0,2}{3} * (0,42232 + 2 * 2,49700 + 4 * 2,80616) = 1,109397.$$

Графическая иллюстрация фигуры, площадь которой мы сейчас нашли, приведена на рисунке 3 (окрашена в серый цвет).

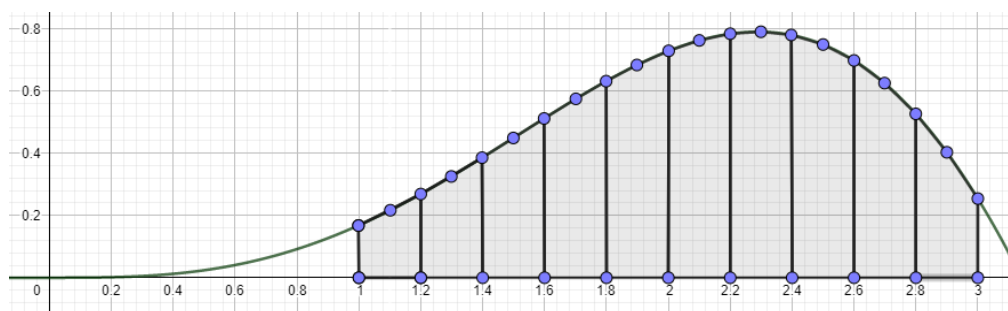


Рис. 3. Метод парабол

В этом случае разность составила 0,2 % между результатами вычислений, полученных по формуле Ньютона – Лейбница и метода парабол.

Очевидно, что вычисление определенных интегралов с помощью методов приближенного вычисления не даст нам истинного значения. Для наилучшего приближения к достоверному значению интеграла важно правильно выбирать метод (формулу), по которой будет вестись расчет. Не последнюю роль в этом играет – какой будет взят шаг интегрирования. Ведь чем больше n , тем точнее результат интегрирования.

В данном примере приближенные значения интеграла, полученные по формулам парабол и трапеций, совпадают до тысячных, но формула прямоугольников дает более точный результат. При этом формула прямоугольников проще для вычислений, из-за чего ее рассматривают не только в вузе, но и в школе.

В заключении отметим, что каждый из рассмотренных нами методов приближенного вычисления определенных интегралов содержит четкий алгоритм их нахождения. Таким образом, описанные методы – это эффективное средство приближенного вычисления интегралов.

Список литературы

1. Волков Е. А. Численные методы : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1990. 248 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : учеб. для вузов. Ч. I. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для вузов. Т. 1. М. : Интеграл-Пресс, 2002. 416 с.

On methods of approximate calculation of a certain integral

N. A. Kirillova¹, Yu. A. Kulikova²

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Khakass State University n. a. N. F. Katanov. Russia, Abakan. ORCID: 0000-0001-6946-8486. E-mail: nadyakirillova@mail.ru

²student of the 4th year of the direction of training 44.03.05 Pedagogical education (focus Mathematics, Physics), Khakass State University n. a. N. F. Katanov. Russia, Abakan. E-mail: yul_kulikova@mail.ru

Abstract. The article deals with the question of various methods of approximate calculation of a certain integral. In school textbooks on the basics of mathematical analysis, textbooks on higher mathematics and not in every modern university textbook on mathematical analysis, students are introduced to a variety of ways of approximate calculation of a certain integral. Basically, one method is considered – this is the rectangle method. However, in addition to it, there is also the method of trapezoids and parabolas. Even if we consider one method of rectangles, then there are different approaches there – these are methods of middle rectangles, left and right rectangles. Studying all these approaches when considering a certain integral will help students to see the diversity of mathematical science, that the same problem can have several solutions.

Keywords: Newton–Leibniz formulas, rectangles, trapezoids, parabolas (Simpson).

References

1. Volkov E. A. *Chislennye metody : ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical methods : textbook handbook for universities]. M. Vysshaya Shkola (Higher School). 1990. 248 p.
2. Il'in V. A., Poznyak E. G. *Osnovy matematicheskogo analiza : ucheb. dlya vuzov. Ch. I* [Fundamentals of mathematical analysis : textbook for universities. Part I]. M. FIZMATLIT. 2005. 648 p.
3. Piskunov N. S. *Differentsial'noe i integral'noe ischislenie : ucheb. posobie dlya vtuzov. T. 1* [Differential and integral calculus : textbook for higher education institutions. Vol. 1]. M. Integral-Press. 2002. 416 p.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК [37.016:51]:373.3

DOI 10.25730/VSU.0536.22.014

Использование компетентностного подхода в процессе обучения в начальных классах

Х. Х. Бегмов

кандидат педагогических наук, доцент, Таджикский государственный педагогический университет
им. Садриддина Айни. Таджикистан, г. Душанбе. E-mail: begimovhusen@gmail.com

Аннотация. В статье говорится о компетентностном подходе к образованию в современных условиях, которое является новым явлением в Министерстве образования и науки Республики Таджикистан. Основными признаками компетентностного подхода являются проблемное обучение, современные педагогические технологии, личностно-ориентированное обучение, которое может быть ключевым условием для пробуждения интереса младших школьников к обучению.

Ключевые слова: новый учебный план, компетентностные отношения, технология обучения, математика начальной школы, учащиеся начальных классов, учителя начальных классов, образовательное учреждение.

Независимость Республики Таджикистан, становление демократического общества, интеграция республики в мировое сообщество в качестве свободной демократической страны с рыночной экономикой требует от нее все более активного участия в беспрецедентном развитии новой науки и техники.

В современное время нужны свободномыслящие, креативные, созидательные участники для использования и оценки применения современных научно-технических достижений и технологий, их развития. Такие личности воспитываются только в общеобразовательных школах, лицеях, гимназиях, колледжах, институтах и вузах Республики Таджикистан. Наряду с признанием общечеловеческих ценностей, основанных на традициях, обычаях, этике, национальных ценностях, в современной науке и технологии стремятся еще больше укрепить статус знаний этих людей. В связи с этим Национальная концепция образования Республики Таджикистан призывает уделить приоритетное внимание использованию новых форм и методов образования в новых экономических, социальных, политических и культурных условиях современного развитого мира, наряду с кардинальными изменениями в содержании образования [7].

Сегодня для развития науки, техники и производства обществу нужны рационализаторы, изобретатели – люди с креативным мышлением и творческими способностями. Для того чтобы воспитать такого человека, необходимо соотнести изменения с нынешними традициями общеобразовательных школ, лицеев и гимназий, а также ориентировать субъекты образования, в том числе математические, на развитие личности, мышления и творчества младших школьников.

Образование признано Правительством Республики Таджикистан одним из приоритетов развития страны. Разработка новых образовательных стандартов и программ позволяет постепенно увеличивать уровень качества общеобразовательных учреждений, лицеев, гимназий, содержание образовательного процесса. Учителя играют ключевую роль в реализации государственной политики в сфере образования. Об этом ясно сказано в словах Основателя мира и национального единства – Лидера нации, Президента Республики Таджикистан Эмомали Рахмона на встрече с интеллигенцией государства, где он говорит о том, что: «Залог любого достижения и прогресса учителя – его духовное и научное сокровище. Поэтому эффективное ведение образования учителем позволяет поднять уровень мировоззрения, знаний учащихся и поддерживать их в актуальном состоянии» [8].

В современном мире граждане должны быть образованными и профессиональными, способными разбираться в сложных вопросах окружающего мира, уметь решать различные образовательные и жизненные задачи. Учитель создает базу для формирования всех этих качеств на начальной ступени общеобразовательных учреждений [4, с. 120].

С учетом научно-технического прогресса и современных информационных и коммуникационных технологий в основную теорию и основные дидактические принципы образования вносятся

многочисленные изменения. При этом формирование компетенций необходимо в комплексе с традиционным образованием. Исследователи компетентностного подхода к процессу обучения считают, что единственный способ развития компетенций – это решение задач у младших школьников в рамках содержания образования в зависимости от того, как они решаются в различных учебных ситуациях.

Необходимость реформирования образования с учетом требований компетентностного подхода к образованию зависит от внутренних и внешних факторов образования, исходя из следующих методов:

- Компетентностный подход к обучению – важная тенденция в единой образовательной среде, которая способствует устранению конфликта между потребностями программы и потребностями общества в личности в результате обучения. Это необходимость повышения качества образования на уровне международных стандартов и реализации компетентностного подхода к образованию.

- Базовый фундамент закладывается в начальных классах общеобразовательных учреждений и формируется на последующих базах. С этой точки зрения невозможно приобретение знаний и умений в начальной школе без закладки фундамента. Подсчитано, что учащиеся начальных классов помнят более 80 % результатов своих знаний на начальном уровне.

- Грамотный подход к процессу обучения требует много времени, поэтому целесообразно начинать его с начальной школы.

Хуторский А. В., комментируя необходимость включения компетентного образования на начальном уровне, отмечает: «Мы вводим понятие педагогических компетенций в целом не для того, чтобы достичь этих компетенций в одиннадцатом классе, а для того, чтобы иметь возможность их последовательно развивать. Или, насколько это возможно, довести руководство образовательным процессом до компетентности» [10, с. 127].

Одной из характеристик компетентностного подхода к образованию является то, что оно используется как единый комплекс знаний, умений и компетенций. При компетентностном подходе процесс обучения приобретает исследовательский и практико-ориентированный характер и становится объектом изучения. Тридцать лет спустя компетентностный подход фокусируется на практическом характере образования, а процесс преподавания и обучения породил понятие «компетентность».

Термины «компетенция» и «competence» используются специалистами в данной области для описания понятий «competence» и «competence», что в переводе с латинского «competens»; компетентность» цитируются на русском языке.

Предметные стандарты начального образования определяют «компетентность» следующим образом: компетентность – это совокупность взаимосвязанных знаний, умений и навыков, направленных на решение конкретных задач жизни, образования и карьеры.

Компетенция – это интегрированная совокупность знаний, навыков и умений, приобретенных в результате практического опыта и деятельности с использованием этих знаний. Компетентность является результатом образования и представляет собой способность применять знания, умения и навыки при решении задач в той или иной области. В зависимости от значимости компетенции подразделяются на основные общие, общие и предметные компетенции.

Следует отметить, что «компетентности» не учат, она формируется в результате овладения знаниями, навыками и умениями. Компетентность – это практический результат знаний, умений и навыков.

- Знание является продуктом и результатом познавательной деятельности человека и состоит из духовного охвата и воображаемого изображения мира в сознании. Составными частями знания являются научные факты, понятия, законы, явления, основные положения научных теорий, гипотезы, процессы, методы исследования, а также научный ландшафт мира. На основе знаний приобретаются убеждения, идеи, практические навыки, развиваются познавательные способности учащихся.

- Навык – это деятельность по применению знаний на практике, а также интеллектуальная деятельность. Систематизация и применение знаний, умение решать упражнения и примеры, проводить опыты, расчеты, измерения, планирование, составление и чтение планов и графиков и т. д., навыки, которые вырабатываются в школе. Навыки – это осознанные действия, основанные на знаниях и опыте общественной жизни.

- Навыки – это сильные, устойчивые способы выполнения действий, которые являются результатом большой практики. Навыки – это усовершенствованные, многократно проверенные на практике знания, которые становятся устойчивыми умениями. Приобретение навыков начинается прежде всего с сознательного изучения компонентов знаний и применения их на практике. Навыки имеют жизненно важное и практическое значение, они обеспечивают быструю и качественную работу.

Компетентность, в нашем примере, когда учащийся способен использовать в повседневной жизни совокупность знаний, умений и навыков, приобретенных в общеобразовательной школе.

Целью развития компетенций является предварительное планирование результатов обучения, ожидаемых результатов.

Функция компетенций заключается в том, чтобы быть средством их оценки, то есть оценивать компетенции обучающихся посредством использования разнообразных инструментов оценки.

В некоторой научной и методической литературе термины компетенция, способность, умение используются взаимозаменяемо. В будущем, на основании вышесказанного, можно сделать вывод, что грамотный человек может совершить действие хорошо и умело.

В модуле «Компетентностный подход к образованию» говорится: «Компетентности не учат, компетентность формируется в результате приобретения знаний, навыков и умений» [5, с. 11]. Академик М. Лутфуллозода считает это ошибкой. Все те, кто говорит «не учите компетентности», имеют однобокое понимание понятия и сущности компетентности. Оно охватывает широкий круг жизненных компетенций, которые подразделяются на две группы:

1) образовательные компетенции; 2) необразовательные компетенции.

Образовательная компетентность выражается в стандартах учебных программ, учебниках и других методических пособиях. Такие как коммуникативная, самостоятельная, информативная, критическая, исследовательская, творческая и так далее.

Необразованные силы бесконечны. Человек должен ценить жизнь. Это умение завоевать сердце кого-то, особенно больного, нуждающегося и одинокого.

То же самое можно сказать и об образовательной компетентности. В сознании учащихся мы культивируем и развиваем компетенции самопознания, патриотизма, красоты, национальной гордости, самостоятельности, умозаключения и так далее. Все эти компетенции находятся в центре внимания образования. Поэтому в процессе обучения предметам начальной школы, особенно математике начальной школы, необходимо учить той или иной компетенции.

Одной из основных компетенций является развитие самостоятельного действия у младших школьников. Самостоятельная работа – это не только способ обучения, но и способ самообразования. Общепредметные компетенции считаются конечным результатом обучения, независимо от того, как освоен предмет. Компетентность основывается на опыте, т. е. на том, насколько учащиеся умеют правильно выполнять то или иное арифметическое действие. В процессе обучения младшим школьникам должна быть предоставлена возможность практиковаться. Этот процесс называется компетентностным подходом к образованию.

В системе компетентностного образования отношения и процесс обучения имеют свои особенности. Эти характеристики определяют отношение учащегося к учебе, роль учителя в процессе обучения, отношения между учащимися. Знание и его реализация позволит учителям начальных классов повысить уровень знаний и компетенций, одновременно заложив основу для развития ответственной, образованной и просвещенной личности [6, с. 74].

Научно-методический подход к компетентностному подходу к образованию выделяет шесть ключевых особенностей:

1. Ответственность – младшие школьники несут ответственность за обучение.

2. Возможности – младшие учащиеся имеют возможность целенаправленно читать, писать, считать, описывать, конструировать и выполнять другие учебные действия. Помимо учебников, они могут использовать другие источники знаний и дополнительную литературу.

3. Занятие – младшие школьники имеют возможность заниматься проектной работой и другими творческими работами.

4. Предложения – поощряйте младших школьников исследовать заданную тему.

5. Ответы – младшие школьники прогнозируют свое личное отношение к беседам, рассказам, басням, пословицам, притчам, интересным примерам, викторинам, клубам и т. д., задают вопросы и в рамках своего понимания содержания текста, показать, обсудить и представить результаты работы классу.

6. Оценка – учителя и младшие школьники вместе разрабатывают показатели оценок. Это свидетельствует о том, что учащиеся начальных классов контролируют свою работу и принимают непосредственное участие в процессе оценивания.

В компетентном образовании результаты обучения анализируются и пересматриваются. На протяжении всего учебного процесса школьники оценивают и анализируют результаты своей работы. Они выявляют свои ошибки непосредственно, выясняют причины своих ошибок самостоятельно или с помощью одноклассников или учителей, а затем улучшают работу.

В истории педагогических теорий особое место занимает изучение педагогики. В этом исследовании объяснение темы начинается с решения проблемы. В процессе обучения проблемному ре-

шению для младших школьников осуществляется поиск различных способов решения задач. Это позволит учащимся начальных классов понять необходимость изучения предмета.

В связи с глобализацией возникает необходимость повышения активности и инициативы учащихся начальных классов, то есть в фокусе воспитательной деятельности педагог выступает как проводник их деятельности.

Активность и практический опыт обучения школьников – главный критерий грамотного подхода к обучению. Этот фактор требует новых форм обучения и использования современных педагогических технологий. Практическая учебная деятельность требует от учащихся осмысления основных учебных вопросов, постановки целей решения учебных задач, планирования различных способов решения задач, решения учебных задач под руководством преподавателя или самостоятельно, оценки результатов работы, совершенствования, знания, чтобы взять на себя ответственность.

Термин «технология» происходит от греческих слов *techné* – «искусство» или «навык» и *logos* – «наука», что означает науку об искусстве или мастерстве.

Технологизация образования является одним из направлений педагогической науки, и закономерность, основные правила, средства и способы эффективного решения цели образования посредством установления технологического подхода исследуют познавательное развитие младших школьников.

В зависимости от образовательного процесса термин «технология» следует трактовать как искусство обучения. Понятие «технология» следует интерпретировать как совокупность способов и средств качественного выполнения работы.

Личностно-ориентированное обучение учитывает индивидуальные особенности учащихся и эффективно и целенаправленно используется в учебном процессе. Основной целью личностно-ориентированного обучения является формирование практических знаний, навыков и умений, а также самозащиты, самовоспитания и других качеств, необходимых для развития личности.

Личностно-ориентированное обучение основано на нескольких основных правилах:

- Познавательные способности младших школьников – каждый ученик обладает способностью понимать и осваивать. Учет этого фактора и организация учебного процесса на его основе является основным критерием обучения школьников.

- Это правило ориентируется не только на содержание обучения (чему учить), но и на процесс обучения (как учить?).

- Различные способы обучения младших школьников – у каждого ученика разные познавательные и интеллектуальные способности. Принятие во внимание этих способностей и их развитие является одним из ключевых элементов в обучении любого ученика.

- Обучение как активный развивающийся процесс – восстановление связи между учителем и учащимися начальных классов в процессе обучения математике. Младшим школьникам предлагается высказать свое мнение по теме и решить сложные задачи. Учащиеся оценивают свою учебную деятельность и деятельность друг друга. Ученики и преподаватели вместе обсуждают образовательные цели и задачи.

- Основная деятельность в личностно-ориентированном обучении приходится на младших школьников – учитель меньше работает на уроке, а учащиеся больше работают в сотрудничестве со всем классом под руководством учителя.

- Хорошая образовательная среда – у младших школьников в классе есть книги, карты, электронные таблицы, доски и т. п.

В технологии образования, ориентированной на формирование личности, личность ученика и учителя понимается как весь образовательный процесс в целом. Целью воспитания является формирование личности учащегося, учитываются его мысли, на основе этих факторов складывается личностное мировоззрение младших школьников, ее перспективные способности, мышление. Отношения между учителями и учениками строятся на сотрудничестве.

В образовательной технологии, ориентированной на развитие личности, ученик не приспосабливается к методу обучения учителя, а наоборот, учитель приспособливает разные методы и средства обучения к тому, как учатся ученики. Другими словами, учитель переходит от «командного» метода к «сотрудническому» и ориентируется на познавательную деятельность учащихся. В результате меняется и позиция читателя, то есть он из «прилежного исполнителя» превращается в «активного творца».

Основная задача учителя начальных классов – вызвать интерес младших школьников к обучению, организовать познавательную и творческую деятельность каждого ученика.

В соответствии с технологией обучения развитие личности ориентировано на разработку индивидуальной программы для каждого ученика. Программа разработана с учетом индивидуальных особенностей юных школьников и адаптирована к их интеллектуальным возможностям.

В заключение, исходя из вышеизложенного толкования, можно сделать вывод, что при компетентностном подходе учащийся может совершить действие хорошо, грамотно и надежно. Компетентный подход к образованию в современных условиях является новым явлением в Министерстве образования и науки Республики Таджикистан. Основными признаками компетентностного подхода являются проблемное обучение, современные педагогические технологии, личностно-ориентированное обучение, которое может быть ключевым условием для пробуждения интереса младших школьников к обучению.

Таким образом, внедрение компетентностного подхода в образовательный процесс в общеобразовательные учреждения Республики Таджикистан приведет к повышению качества образования.

Список литературы

1. Государственный образовательный стандарт и предметный стандарт начального и среднего общего образования (на тадж. яз.). Душанбе, 2016.
2. Грамотный подход к обучению (на тадж. яз.). Душанбе, 2016. 260 с.
3. Грамотный подход к обучению (на тадж. яз.). Душанбе, 2017. 133 с.
4. Каримов Т. Педагогическая технология активного обучения в начальной школе (на тадж. яз.). Душанбе, 2016. 240 с.
5. Лутфуллозода М., Бобизода Г. Мысли являются основой компетенций и их формирования (на тадж. яз.). Душанбе, 2018. 86 с.
6. Национальная стратегия развития образования Республики Таджикистан до 2020 года (на тадж. яз.). Душанбе, 2012.
7. Ниёзов Ф., Зиёев М. Методы обучения в системе компетентностного образования (на тадж. яз.) : пособие для учителя. Душанбе, 2016. 141 с.
8. Обращение Президента Республики Таджикистан, Лидера нации Эмомали Рахмона к Маджлиси Оли Республики Таджикистан (на тадж. яз.). Душанбе, 2015.
9. Педагогическая технология активного обучения и ее роль в организации творческой работы учащихся : мат-лы Научно-практической конференции (на тадж. яз.). Душанбе, 2015. 352 с.
10. Хуторской А. В. Современная дидактика : учебник. М. : Высшая школа, 2007. 639 с.
11. Школьное образование: реальность и возможности в контексте реализации стандартов нового поколения (на тадж. яз.) : мат-лы Научно-методической конференции республики. Душанбе, 2016. 360 с.

The use of a competence-based approach in the process of teaching in elementary grades

H. H. Begmov

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor, Tajik State Pedagogical University n. a. Sadridin Aini.
Tajikistan, Dushanbe. E-mail: begimovhusen@gmail.com

Abstract. The article talks about the competence-based approach to education in modern conditions, which is a new phenomenon in the Ministry of Education and Science of the Republic of Tajikistan. The main features of the competence approach are problem-based learning, modern pedagogical technologies, personality-oriented learning, which can be a key condition for awakening the interest of younger schoolchildren in learning.

Keywords: new curriculum, competence relations, teaching technology, elementary school mathematics, elementary school students, elementary school teachers, educational institution.

References

1. Karimov T. *Pedagogicheskaja tehnologija aktivnogo obuchenija v nachal'noj shkole (na tadzh. jaz.)* [Pedagogical technology of active learning in primary school (in Taj. language)]. Dushanbe. 2016. 240 p.
2. Lutfullozoda M., Bobizoda G. *Mysli javljajutsja osnovoj kompetencij i ih formirovanija (na tadzh. jaz.)* [Thoughts are the basis of competencies and their formation (in Taj. language)]. Dushanbe. 2018. 86 p.
3. *Gramotnyj podhod k obucheniju (na tadzh. jaz.)* – A competent approach to learning (in Taj. language). Dushanbe. 2016. 260 p.
4. *Gramotnyj podhod k obucheniju (na tadzh. jaz.)* – A competent approach to learning (in Taj. language). Dushanbe. 2017. 133 p.
5. Nijozov F., Zijoev M. *Metody obuchenija v sisteme kompetentnostnogo obrazovanija (na tadzh. jaz.) : posobie dlja uchitelja* [Teaching methods in the system of competence-based education (in Taj. language) : teacher's manual]. Dushanbe, 2016. 141 p.
6. *Gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart i predmetnyj standart nachal'nogo i srednego obshhego obrazovanija (na tadzh. jaz.)* – State educational standard and subject standard of primary and secondary general education (in Taj. language). Dushanbe. 2016.

7. *Nacional'naja strategija razvitija obrazovanija Respubliki Tadjikistan do 2020 goda (na tadjh. jaz.)* – National Strategy for the Development of Education of the Republic of Tajikistan until 2020 (in Taj. language). Dushanbe. 2012.
8. *Shkol'noe obrazovanie: real'nost' i vozmozhnosti v kontekste realizacii standartov novogo pokolenija (na tadjh. jaz.) : mat-ly Nauchno-metodicheskoy konferencii respubliki* – School education: reality and opportunities in the context of the implementation of new generation standards (in Taj. language) : materials of the Scientific and Methodological Conference of the Republic. Dushanbe. 2016. 360 p.
9. *Pedagogicheskaja tehnologija aktivnogo obuchenija i ee rol' v organizacii tvorcheskoj raboty uchashhihsja : mat-ly Nauchno-prakticheskoy konferencii (na tadjh. jaz.)* – Pedagogical technology of active learning and its role in organizing creative work of students : materials of the Scientific and Practical Conference (in Taj. language). Dushanbe. 2015. 352 p.
10. *Obrashhenie Prezidenta Respubliki Tadjikistan, Lidera nacji Jemomali Rahmona k Madzhlisi Oli Respubliki Tadjikistan (na tadjh. jaz.)* – Address of the President of the Republic of Tajikistan, Leader of the Nation Emomali Rahmon to the Majlisi Oli of the Republic of Tajikistan (in Taj. language). Dushanbe. 2015.
11. *Hutorskoj A. V. Sovremennaja didaktika : uchebnik* [Modern didactics : textbook]. M. Vyshsaya Shkola (Higher School). 2007. 639 p.

О различных методах решения квадратных уравнений

И. Э. Гриншпон¹, Я. С. Гриншпон²

¹кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики,
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники.
Россия, г. Томск. E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики,
Томский государственный университет. Россия, г. Томск. E-mail: grinshpon@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются различные методы решения квадратных уравнений. Выделены наиболее популярные основные методы: вычислительная формула через дискриминант, выделение полного квадрата, разложение на множители, теорема Виета, метод коэффициентов. Для этих методов приведен сравнительный анализ их применения в различных ситуациях. Показана возможность обобщения этих методов для решения других задач элементарной и высшей математики. Для каждого основного метода обоснована важность его изучения как для получения преимущества в скорости и точности решения квадратных уравнений, так и для дальнейшего обучения решению других более сложных задач.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, дискриминант, теорема Виета, разложение на множители.

Умение решать квадратные уравнения является одним из базовых навыков, который формируется в школе при изучении курса алгебры.

Квадратные уравнения находят широкое применение при решении многих классов математических задач, например, при решении и исследовании тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений или неравенств и их систем или совокупностей (в том числе, при выполнении заданий с параметром на перечисленные типы уравнений и неравенств), а также при решении текстовых и геометрических задач, сводящихся к уравнениям и неравенствам. Кроме того, квадратные уравнения регулярно возникают при решении прикладных задач из различных предметных областей (в том числе по учебным предметам – информатика, физика, химия, география), математической моделью которых являются уравнения или неравенства перечисленных выше типов. Отметим, что без уверенного владения навыком решения квадратных уравнений невозможно успешно пройти любую форму государственной аттестации (включая ВПР, ГВЭ, ОГЭ и ЕГЭ).

Решать квадратные уравнения необходимо и при освоении математических и прикладных дисциплин в вузе, например, в курсе «Высшая математика» (или в курсах «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения») при нахождении собственных чисел линейного оператора, построении кривых второго порядка, вычислении пределов и интегралов от рациональных дробей, решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, извлечении квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме и т. д.

Существует много разнообразных методов решения квадратных уравнений, как универсальных (применимых к любому квадратному уравнению), так и более специальных (применимых только к уравнениям некоторого частного вида); как общеизвестных, так и экзотических (например, с помощью номограмм или геометрическими построениями циркулем и линейкой [3]). К основным методам решения квадратных уравнений обычно относят:

- через дискриминант (включая сокращенный дискриминант);
- выделение полного квадрата;
- разложение на множители (включая метод группировки);
- по теореме Виета (включая переброску старшего коэффициента);
- метод коэффициентов.

Описание всех этих методов приведено в [3]. Предполагается, что читатель данной статьи знаком с основными методами и умеет их применять.

Изучение основных методов важно не только с точки зрения овладения техникой быстрого и безошибочного решения любого квадратного уравнения, но и с точки зрения развития творческого критического мышления учащихся, необходимого как для выбора метода решения, так и для понимания возможности обобщения этих методов (например, при решении алгебраических уравнений высших порядков с действительными коэффициентами или при решении квадратных уравнений с комплексными коэффициентами).

Наиболее популярным у российских учащихся является метод нахождения корней квадратного уравнения по вычислительной формуле, содержащей дискриминант. Этот метод позволяет не только вычислить корни, но и сделать заключение о количестве действительных корней уравнения. Абсолютная универсальность данного метода делает его привлекательным для учащихся со слабой подготовкой: некоторые студенты (особенно те, кто давно закончил школу) через дискриминант успешно решают и неполные квадратные уравнения (например, $2x^2 + 3x = 0$ или $4x^2 - 9 = 0$).

Более того, идея дискриминанта позволяет доступно объяснить понятия кратности корня (при нулевом дискриминанте два различных корня как бы сливаются в один «двойной» корень) и комплексного числа (при отрицательном дискриминанте можно пользоваться той же любимой формулой, если придумать способ записи для новых чисел, являющихся квадратными корнями из отрицательных чисел). Необходимость оперирования понятиями кратного корня и комплексного числа возникает, например, при изучении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому в инженерных вузах при дефиците часов часто приблизительно таким способом «на пальцах» и вводятся эти понятия.

Также метод дискриминанта применим для квадратных уравнений с комплексными коэффициентами, при этом символ «плюс-минус» в формуле можно опускать, считая, что квадратный корень из ненулевого комплексного числа принимает два противоположных значения. Например, сокращенный дискриминант уравнения $(2 - 3i)x^2 + (4 + 2i)x + i = 0$ равен $2i$, а так как $\sqrt{2i} = \pm(1 + i)$, то $x_{1,2} = \frac{-2 \pm (1+i)}{2-3i}$, откуда $x_1 = -i$ и $x_2 = \frac{-2-3i}{13}$.

Метод дискриминанта фактически является краткой записью метода выделения полного квадрата, так как вывод формулы корней квадратного уравнения через дискриминант представляет собой процедуру выделения полного квадрата, реализованную в общем «буквенном» виде. Метод полного квадрата настолько же универсален, как и дискриминант, но выделять полный квадрат при решении каждого уравнения долго и громоздко, быстрее и удобнее воспользоваться готовым общим преобразованием, т. е. формулой через дискриминант. Этот недостаток метода выделения полного квадрата, к сожалению, часто приводит к тому, что в школе он изучается вскользь.

Однако на самом деле обучать этому методу необходимо, так как умение выделять полный квадрат чрезвычайно полезно при решении многих задач высшей математики, например, при составлении канонических уравнений кривых второго порядка (в частности, окружности), при интегрировании некоторых рациональных дробей, при приведении квадратичных форм к каноническому виду.

Для большинства школьников, как правило, неубедительны ссылки на то, что сейчас на уроках им придется осваивать неудобный метод из-за будущей полезности этого метода при обучении в вузе (тем более что интернет предлагает им быстрый вариант готовой формулы). Поэтому целесообразно приводить примеры уравнений, в которых удобнее выделять полный квадрат, чем вычислять дискриминант, например, для уравнений $121x^2 + 286x + 168 = 0$ и $\frac{36}{49} \cdot x^2 + 1\frac{11}{21} \cdot x + \frac{64}{81} = 0$ быстрее заметить их преобразования к виду $(11x + 13)^2 - 1 = 0$ и $(\frac{6}{7}x + \frac{8}{9})^2 = 0$, чем вычислять дискриминант. Еще более эффектно идея выделения полного квадрата выглядит при решении некоторых неквадратных уравнений, например, уравнение $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = 0$ сводится к виду $(x^3 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 = 0$, а уравнение $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 + 4\sqrt{x-1}} = 5$ – к виду $(\sqrt{x-1} + 1) + (\sqrt{x-1} + 2) = 5$. Можно выделять полный квадрат трех и более слагаемых, т. е. применять формулы типа $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, например, уравнение $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 = 0$ таким образом сводится к $(x^2 + x + 2)^2 - 9 = 0$.

Кроме того, выделение полного квадрата обобщается на выделение более высоких степеней. Например, в уравнении $8x^3 - 12x^2 + 6x + 7 = 0$ можно выделить полный куб $(2x - 1)^3 + 8 = 0$, в уравнении $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0$ – полную четвертую степень $(x + 1)^4 + (x + 1) = 0$.

Метод разложения на множители традиционно применяется при решении неполных квадратных уравнений. Однако в последнее время он становится популярным у российских учащихся и при решении полных уравнений, при этом используется группировка, заключающаяся в таком представлении второго члена уравнения в виде суммы двух слагаемых, при котором из двух пар образовавшихся слагаемых выносятся одинаковые общие множители. Растущая популярность этого метода, по-видимому, обусловлена тем, что этот метод широко практикуется в зарубежных школах (под названием *factoring quadratics* в США и *factorising quadratics* в Великобритании [4]), и этот метод запрограммирован в большинстве приложений и онлайн-сервисов по пошаговому решению математических задач (в частности, в наиболее популярном бесплатном мобильном приложении Photomath).

Заметим, что широкое распространение ресурсов типа Photomath привело к серьезной проблеме нецелесообразности оценивания достижений учащихся, основываясь на качестве выполнения ими домашних заданий (это глобальная проблема, относящаяся к широкому классу навыков, а не только к уравнениям). Маркером, помогающим определить несамостоятельность выполнения задания учащимся, как раз можно считать применение факторизации при решении квадратных уравнений. Действительно, большинство студентов не могут объяснить, почему они именно таким образом разложили второй коэффициент на слагаемые, а это означает, что данный пример был бездумно переписан из интернета. Однако иногда попадаются студенты, реально освоившие метод факторизации и успешно пользующиеся им!

В традиционном школьном российском образовании метод факторизации заменяется практически равносильным ему методом применения теоремы Виета (и переборской старшего коэффициента, если уравнение неприведенное). Отличие состоит только в том, что при факторизации подбираются числа, противоположные корням, а в теореме Виета – сами корни. При этом факторизация выполняется немного дольше, так как требуется разложить трехчлен на множители и найти корни двух линейных уравнений, а в теореме Виета корни находятся сразу из системы уравнений (и правилом деления на переброшенный старший коэффициент для неприведенных уравнений).

Например, при факторизации уравнения $6x^2 + 17x + 5 = 0$ подбираются числа с суммой 17 и произведением 30, это 15 и 2. Тогда $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + 15x + 2x + 5 = 3x(2x + 5) + (2x + 5) = (3x + 1)(2x + 5) = 0$. Если же пользоваться теоремой Виета (более строго, теоремой, обратной теореме Виета) и переборской старшего коэффициента, то корни уравнения $y^2 + 17y + 30 = 0$ находятся из системы $\begin{cases} y_1 + y_2 = -17, \\ y_1 y_2 = 30, \end{cases}$ откуда $y_1 = -15$ и $y_2 = -2$. Тогда $x_1 = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$ и $x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

При изучении методов факторизации и теоремы Виета учащимся обязательно нужно объяснять ограниченность сферы применения этих методов. А именно, данные методы эффективны при решении квадратных уравнений только в том случае, когда: 1) коэффициенты уравнения являются целыми; 2) уравнение имеет два действительных корня (или один корень кратности два, который в этих методах рассматривается как два одинаковых корня); 3) корни уравнения являются рациональными; 4) произведение старшего коэффициента и свободного члена имеет сравнительно немного целых делителей (т. е. модуль этого произведения несложно раскладывается на простые множители).

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих эти ограничения. Уравнение $x^2 - 54x + 504 = 0$ хотя и решается факторизацией или теоремой Виета, но эти методы здесь вряд ли можно назвать удобными, так как даже опытному учителю сложно быстро увидеть, что $504 = 42 \cdot 12$ и $54 = 42 + 12$. Коэффициенты уравнения $x^2 - 2x - 18 = 0$ по модулю невелики, но методы факторизации и теоремы Виета здесь неэффективны, так как корни этого уравнения иррациональны $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$ (хотя, конечно же, сами методы остаются математически корректными, т. е. сумма и произведение этих корней дают второй коэффициент с противоположным знаком и свободный член соответственно). Уравнение же $x^2 - 8x + 20 = 0$ не имеет действительных корней, поэтому факторизация и теорема Виета для ученика, не знающего комплексных чисел, здесь абсолютно бесполезна, а для тех, кто владеет комплексными числами, быстрее применить формулу через дискриминант или выделить полный квадрат.

Однако при этом стоит отметить, что иногда идеи теоремы Виета и переборки старшего коэффициента позволяют быстро «в уме» решать квадратные уравнения и с весьма большим по модулю произведением старшего коэффициента и свободного члена, если при решении догадаться не вычислять напрямую это произведение. Например, уравнение $56x^2 - 46x + 9 = 0$ после переборки имеет вид $y^2 - 46y + 56 \cdot 9 = 0$, и если заметить, что $56 \cdot 9 = 28 \cdot 18$ и $28 + 18 = 46$, то $y_1 = 28$ и $y_2 = 18$, а значит, $x_1 = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.

С точки зрения возможных дальнейших применений и обобщений знание обоих методов (факторизация и теорема Виета) крайне полезно! Действительно, идея факторизации лежит в основе классического метода решения уравнений высших степеней с целыми коэффициентами. Ведь если удастся подобрать корень x_0 алгебраического уравнения (а рациональные корни удобно подбирать, пользуясь тем фактом, что у любого такого корня, записанного в виде несократимой дроби, числитель является делителем свободного члена, а знаменатель – делителем старшего коэффициента), то теорема Безу утверждает, что многочлен можно разложить на множители, один из которых равен $(x - x_0)$, а второй находится делением исходного многочлена на этот двучлен. Например, уравнение $2x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = 0$ имеет рациональный корень $x_0 = -\frac{1}{2}$, откуда деля «уголком» или по схеме Горнера получаем, что $2x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x - 6) = 0$.

Идея факторизации иногда помогает даже в тех случаях, когда уравнение не имеет рациональных корней. Например, для решения уравнения $x^4 - x^3 + 5x - 3 = 0$ предположим, что его левая часть раскладывается в произведение квадратных трехчленов с целыми коэффициентами. Тогда раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве $x^4 - x^3 + 5x - 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + 3)$, находим, что $a = 1$ и $b = -2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности
$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 3 = 0. \end{cases}$$

Также важно отметить, что в некоторых задачах процедура разложения на множители даже более важна, чем вычисление корней многочлена. Например, при сокращении дробей или приведении дробей к общему знаменателю.

Теорема Виета полезна, если требуется найти не сами корни, а какие-либо выражения, несложно выражающиеся через сумму и произведение корней. Например, в задаче: «Докажите, что уравнение $2x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 . Вычислите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ». Теорема Виета также эффективна при решении многих заданий с параметром, так как она позволяет сформулировать условия на коэффициенты квадратного уравнения, равносильные положительности или отрицательности корней этого уравнения. Например: «Найдите значения параметра a , при которых уравнение $9^x(a - 4) + 3^x(a + 1) + 2a - 1 = 0$ имеет два действительных корня» [3].

Известно, что теорема Виета обобщается на алгебраические уравнения высших степеней [4]. В некоторых случаях ее применение позволяет красиво исследовать вопрос о количестве корней. Например: «Докажите, что не все корни уравнения $x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 0$ являются действительными числами». Найдём сумму квадратов корней этого уравнения: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2 < 0$. Противоречие, значит, не все корни этого уравнения действительные числа.

Особенно эффективно применение теоремы Виета и факторизации при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов от дробно-рациональных функций, так как в этом случае один из корней уже известен. Например, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$. Вычисление предела начинается с подстановки, из которой убеждаемся, что $x = 3$ является корнем числителя и знаменателя. Тогда зная, что произведение корней числителя равно 21, а сумма корней знаменателя и произведение равны 6, получаем $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x-1)(x-2)} = -2$.

Метод коэффициентов является наиболее специальным, так как применим только для тех квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, для которых выполняется одно из равенств $a \pm b + c = 0$. Однако изучение метода коэффициентов оправданно тем, что подобные уравнения довольно часто встречаются в вариантах различных экзаменов, тестов и олимпиад, а незнание данного метода отнимает много времени и повышает вероятность вычислительной ошибки при решении уравнений типа $13x^2 + 41x + 28 = 0$. Также понимание сути метода коэффициентов (а именно, что сумма коэффициентов многочлена равна его значению в единице) помогает при решении некоторых олимпиадных задач. Например: «Найдите сумму коэффициентов многочлена $(3x - 5)^9 + (5 - 7x)^7(3x + 1)$, записанного в стандартном виде».

В заключение хочется отметить, что основной целью данной статьи является обоснование необходимости изучения как можно большего количества методов решений квадратных уравнений. Ведь учащиеся, владеющие только вычислительной формулой через дискриминант, в любом конкурентном конкурсе (включая ЕГЭ) будут проигрывать по времени и точности учащимся, владеющим другими методами. Более того, знание многих методов поможет учащимся при изучении новых разделов математики и будет способствовать осознанию ими взаимосвязи между различными разделами математики и возможностью развития и обобщения элементарных идей при решении более сложных задач.

Список литературы

1. Горништейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. М.: Илекса, 2005. 328 с.
2. Гриншпон И. Э., Гриншпон С. Я. Многочлены от одной переменной (теория и приложения). Томск: Изд-во ТУСУРа, 2011. 80 с.
3. Карпенко Н. В. Нестандартные методы решения квадратных уравнений // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сб. статей. Томск: Издательский дом ТГУ, 2017. С. 229–237. URL: <http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2015/03/Published.pdf>.
4. Factorising quadratics // Хостинг математических ресурсов Mathcenter. URL: <https://www.math-center.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-factorisingquadratics-2009-1.pdf>.

On various methods of solving quadratic equations

I. E. Grinshpon¹, Ya. S. Grinshpon²

¹PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Russia, Tomsk. E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of General Mathematics, Tomsk State University. Russia, Tomsk. E-mail: grinshpon@mail.ru

Abstract. The article discusses various methods for solving quadratic equations. The most popular basic methods are highlighted: a computational formula through a discriminant, the allocation of a full square, factorization, the Vieta theorem, the method of coefficients. For these methods, a comparative analysis of their application in various situations is given. The possibility of generalizing these methods for solving other problems of elementary and higher mathematics is shown. For each basic method, the importance of studying it is justified both for gaining an advantage in the speed and accuracy of solving quadratic equations, and for further training in solving other more complex problems.

Keywords: algebraic equations, discriminant, Vieta's theorem, factorization.

References

1. Gornshitejn P. I., Polonskij V. B., Yakir M. S. *Zadachi s parametrami* [Problems with parameters]. M. Ilexa. 2005. 328 p.
2. Grinshpon I. E., Grinshpon S. Ya. *Mnogochleny ot odnoj peremennoj (teoriya i prilozheniya)* [Polynomials in one variable (theory and applications)]. Tomsk. TUSUR publishing house. 2011. 80 p.
3. Karpenko N. V. *Nestandartnye metody resheniya kvadratnyh uravnenij* [Non-standard methods of solving quadratic equations] // *Vserossiyskaya molodezhnaya nauchnaya konferenciya "Vse grani matematiki i mekhaniki" : sb. statej* – All-Russian youth scientific conference "All facets of mathematics and mechanics" : collection of articles. Tomsk. TSU publishing house. 2017. Pp. 229–237. Available at: <http://conf.math.tsu.ru/wp-content/uploads/2015/03/Published.pdf>.
4. Factorising quadratics // Hosting of mathematical resources Mathcenter. Available at: <https://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-factorisingquadratics-2009-1.pdf>.

Использование функционального подхода при решении задач с параметрами

Е. С. Трефилова¹, З. В. Шилова²

¹старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.

Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

²кандидат педагогических наук, доцент кафедры гуманитарных и естественных наук,

Дмитровский институт непрерывного образования филиал «Университет «Дубна».

Россия, г. Дмитров. ORCID: 0000-0003-1715-2513. E-mail: zoya@soi.su

Аннотация. В статье рассматривается применение функционального метода решения задач с параметрами. В частности, показано применение таких свойств функций, как монотонность, области определения и значений функций, экстремальные значения функции – наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, показаны примеры использования четности и обратимости функции. В статье приведено большое количество примеров, в некоторых указано несколько способов решения. Приведенная подборка задач будет полезна при подготовке к экзаменам за курс полной школы, а также для итогового повторения материала.

Ключевые слова: функциональный подход, параметр, свойства функции: область определения, монотонность, множество значений функции.

Одним из важных понятий математической науки является понятие функции, поэтому в школьном курсе математики функция изучается, начиная с 7-го класса. В свою очередь, в научной и методической литературе говорится о необходимости и важности применения функционального подхода при решении различного рода математических задач, например, уравнений и неравенств. Заметим также, что линии уравнений и неравенств и функциональная тесно связаны между собой. Примерами такой связи могут служить задачи на нахождение области определения функций, например, функций, составленных из нескольких элементарных, промежутков знакопостоянства, нулей функции и т. п. Аналогично, и функциональная линия оказывает существенное влияние на содержание и стиль изучения линии уравнений и неравенств, так, в УМК Мордковича А. Г. линия уравнений и неравенств подчинена линии функциональной, при этом идея функционального подхода в школьных учебниках полностью не реализована. Прежде всего, это проявляется в отсутствии целостной системы задач, которая бы позволила осуществлять их отбор и составление, адекватной содержанию изучаемого материала, и способствовала бы организации учебно-познавательной деятельности учащихся. А эффективность обучения зависит от возможности отбора, конструирования, организации задач, поэтому их должно быть много. Задачи, в решении которых используются свойства функций, считаются для школьников трудными. И хотя во многих учебных пособиях и статьях приводятся примеры уравнений, неравенств и задач, в решении которых используются свойства входящих в них функций, методические проблемы, связанные с ними, не разработаны, практически не встречаются в литературе методические рекомендации для школьников и учителей.

Между тем в последние годы любая итоговая аттестация учеников по математике – ОГЭ или ЕГЭ – во второй части обязательно содержит решение задачи с параметром.

Если за основную школу предлагаются несложные для решения задачи (из формулировки чаще всего понятен способ ее решения), которые формулируются в виде «постройте график функции

$y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x - 3)(x + 2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно

одну общую точку» (демовариант 2022), то задача в ЕГЭ предлагается более сложная и по ее виду не всегда очевиден путь ее решения.

Рассмотрим один из способов решения задач с параметром, основанный на применении некоторых свойств функции, изучаемых в курсе математики 7–11 класса.

Функционально-графический способ можно условно разделить на графический способ, в котором при решении уравнения (неравенства) используются графики функций или их части. Использование графического метода целесообразно, например, при решении задач, в которых необходимо определить число решений уравнения, найти приближенное решение уравнения, а также в качестве одного из способов поиска решения задачи. Вторая часть метода предполагает использо-

вание свойств функции, при этом графики в решении могут как присутствовать, так и отсутствовать. В нашей статье мы подробно остановимся на применении второй части функционально-графического метода – использовании свойств функции.

Классифицируем задачи по пунктам исследования функции.

Любое исследование функции, как известно, начинается с нахождения области определения.

Пример. Найти все действительные значения a , при которых область определения функции $f(x) = \sqrt{1 - \log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4 + \sin x)}$ совпадает с множеством всех действительных чисел.

Решение. Областью определения функции является множество действительных чисел, то есть функция должна быть определена в любой точке, и задача сводится к нахождению параметра a . Для этого нужно составить и решить систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 + 4a - a^2 > 0, \\ 5 + 4a - a^2 \neq 1, \\ 5 - a > 0, \\ \log_{5+4a-a^2} \left(\frac{a+1}{4 + \sin x} \right) \geq 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (5-a)(a+1) > 0, \\ a \neq 2 \pm 2\sqrt{2}, \\ 5 > a, \\ (4 + 4a - a^2) \left(\frac{a+1}{4 + \sin x} - 1 \right) \geq 0. \end{array} \right.$$

Учитываем условие $a < 5$, тогда решением последнего неравенства системы будет служить интервал $(-1; -2\sqrt{2})$.

Ответ: при $a \in (-1; -2\sqrt{2})$ условие выполняется.

Однако не всегда отсылка к нахождению области определения бывает явной, и чаще всего такая необходимость возникает в процессе решения задачи. Дополнительное исследование области определения позволяет ввести замену, с помощью которой уравнение (неравенство) решится достаточно просто.

Пример. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решение?

Решение. Предложенное неравенство является иррациональным, традиционным способом его решения является возведение в квадрат. Однако возведение в квадрат в данном случае осуществить проблематично, так как сложно из-за параметра сделать оценку правой части. Поэтому попробуем преобразовать подкоренное выражение так, чтобы можно было извлечь корень.

Найдем ограничения на переменную: $|x| \leq 1$. Заметим, что переменная принимает значения из ограниченного промежутка, данный промежуток является областью значений функций косинус и синус. Введем тригонометрическую подстановку $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Тогда

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} > a - \cos \alpha \text{ или } |\sin \alpha| > a - \cos \alpha.$$

Но так как $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin \alpha \geq 0$, следовательно,

$$a < \sin \alpha + \cos \alpha,$$

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}.$$

Заметим, что, так как $\alpha \in [0; \pi]$, то $\max \left(\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \Rightarrow a < \sqrt{2}$.

Ответ: $a < \sqrt{2}$.

Область (множество) значения функции и связанная с ним ограниченность функции встречается в задачах реже, чем область определения. Для решения уравнений и неравенств, в том числе с параметром, область значений используется нечасто, так как по виду функции не всегда ее можно найти.

Однако введение новой переменной позволяет получить ограниченную функцию, например, квадратичную или тригонометрическую функцию, что облегчает поиск решения задачи.

Пример. Решить уравнение $(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = a$.

Решение. Областью допустимых значений переменной является отрезок $[-1; 1]$, поэтому можно ввести тригонометрическую подстановку $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

После подстановки новой переменной и преобразований получаем:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha = a, \sin 4\alpha = 4a.$$

Уравнение имеет решение при $|a| \leq \frac{1}{4}$ и его корнями являются числа вида

$$\alpha = (-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}, \text{ так как } \alpha \in [0; \pi], \text{ то рассмотрим три случая:}$$

$$1) a=0, \text{ тогда } \alpha = \frac{\pi k}{4}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$2) -\frac{1}{4} \leq a < 0, \alpha = (-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}, k = 1, 2, 3, 4.$$

$$3) 0 < a \leq \frac{1}{4}, \alpha = (-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{Ответ: если } -\frac{1}{4} \leq a < 0, \text{ то } x = \cos \left((-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4} \right), k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{если } a=0, \text{ то } x = \cos \frac{\pi k}{4}, k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{если } 0 < a \leq \frac{1}{4}, \text{ то } x = \cos \left((-1)^k \frac{1}{4} \arcsin 4a + \frac{\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Приведем еще один пример использования тригонометрической подстановки.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{p-x} + \sqrt{p+x} = x$.

Решение. Область допустимых значений - $|x| \leq p$, тогда $x = p \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, получаем равносильное уравнение:

$$\sqrt{1 - \cos \alpha} + \sqrt{1 + \cos \alpha} = \sqrt{p} \cos \alpha.$$

В силу того, что $|x| \leq p$, то $p \geq 0$. Тогда

$$1) \text{ если } p=0, \text{ то } \sqrt{-x} + \sqrt{+x} = x \Rightarrow x = 0.$$

$$2) \text{ если } p > 0, \text{ то возведения в квадрат, получаем уравнение}$$

$$p \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 2 - p = 0,$$

$$\text{корнями которого являются } \sin \alpha = -1 \text{ или } \sin \alpha = \frac{p-2}{p}.$$

$$\bullet \sin \alpha = -1, \text{ то } x=0 \text{ и } p=0;$$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{p-2}{p}, \text{ то } x = p \cos \alpha = p \sqrt{1 - \left(\frac{p-2}{p} \right)^2} = p \sqrt{\frac{4p-4}{p^2}} = \sqrt{4p-4}.$$

Ответ: если $p < 0$, решений нет;

если $p = 0, x = 0$;

если $p > 0, x = \sqrt{4p-4}$.

К экстремальным свойствам функции можно отнести наибольшее и наименьшее значение функции, а также ее максимум и минимум. При этом в задаче может требоваться найти максимальное (минимальное) значение функции на промежутке или применяться в поиске решения задачи.

Для нахождения наибольшего или наименьшего значений функции можно применить неравенство между средними арифметическим и геометрическим, свойства квадратичной функции, свойства взаимно-обратных величин.

Пример. Найти наибольшее значение величины b , при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{b}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3}b|\cos \pi x|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Очевидно, что при $b=0$ решение есть. Значит, будем полагать, что $b>0$. Тогда

$$\sqrt{b^5}(x-4)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2} \leq \frac{2}{3}b|\cos \pi x|.$$

Используя неравенство Коши для средних - $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$ - получаем:

$$\sqrt{b^5}(x-4)^2 + \frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2} \geq 2b\sqrt{b}.$$

При этом равенство будет достигаться при $x = 4 \pm \frac{\sqrt{b}}{b}$.

Следовательно, исходное неравенство имеет хотя бы одно решение, если

$$2b\sqrt{b} \leq \frac{2}{3}b|\cos \pi x|, \text{ т. к. } b>0, \text{ то } b \leq \frac{1}{9}\cos^2 \pi x \Rightarrow b \leq \frac{1}{9}.$$

Легко можно убедиться, что при $b = \frac{1}{9}$ первоначальное неравенство имеет решения, например, $x = 7$.

Ответ: $b = \frac{1}{9}$.

Использование *монотонности*, а именно *возрастания и убывания* функции при решении задач используется чаще всего. На основе этого свойства основан метод оценки левой и правой части, который применяется, например, при решении некоторых тригонометрических уравнений.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x-a} = \sqrt[3]{a}$.

Решение. Функция $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x-a}$, стоящая в левой части уравнения, монотонно возрастает, а значение правой части уравнения фиксировано, поэтому если уравнение имеет решение, то только одно. Легко заметить, что a является корнем.

Ответ: $x = a$.

В следующем примере требуется небольшое преобразование и исследование функции.

Пример. Определить число корней уравнения $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11} = b$.

Поскольку функция $f(x) = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$ возрастает на $D(f) = \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$, то

$$f(x) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = 4 \text{ и, стало быть, } E(f) = [4; +\infty).$$

Исходное уравнение имеет не более одного корня. При $b \geq 4$ он единственен.

Ответ: если $b \geq 4$, то уравнение имеет единственный корень; если $b < 4$, то корней нет.

Приведенный пример показывает самое простое применение монотонности. Приведем примеры, когда сначала требуется ввести функцию и затем исследовать ее монотонность.

Пример. Для $0 < a < \frac{1}{4}$ решить уравнение

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде, выделив полный квадрат,

$$(x + a)^2 + \frac{1}{16} - a^2 = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Введем новую переменную $\sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = t, t > 0 \Rightarrow x - t^2 = \frac{1}{16} - a^2$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$(x + a)^2 + x - t^2 = -a + t, (x + a)^2 + x + a = t^2 + t.$$

Исследуя функцию $f(y) = y^2 + y$ на монотонность, получаем, что она возрастает на промежутке $[-\frac{1}{2}; +\infty)$. Условие существования функции $t(x)$ - $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ и $0 < a < \frac{1}{4}$, то $x + a > 0$. Следовательно, принадлежат промежутку монотонности функции $f(y)$.

Тогда $x + a = t$, т. е. $\sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} = x + a \Rightarrow x = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Сопоставим с ис-

ходным и получим $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x$.

Для $0 < a < \frac{1}{4}$ полученное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант и

$$x = \frac{1 - 2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a + \frac{3}{4}}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{4} (2 - 4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a + 3}).$$

Покажем, как можно использовать свойства монотонности для решения неравенства.

Пример. Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$\log_a(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) - \log_a 3 \leq 0$$

имеет одно решение.

Решение. Проведем необходимые преобразования в левой части неравенства:

$$\frac{\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5((x^2 + ax + 5) + 1)}{\log_3 a} - \frac{1}{\log_3 a} \geq 0.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $0 < a < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) \geq 1.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_3(\sqrt{t} + 1) \cdot \log_5(t + 1)$, она возрастает на всей области определения, отметим, что $f(4) = \log_3 3 \cdot \log_5 5 = 1$.

Тогда на полученное неравенство можно смотреть так $f(x^2 + ax + 5) \geq f(4)$, следовательно, $x^2 + ax + 5 \geq 4$, $x^2 + ax + 1 \geq 0$. Однако, это неравенство на указанном промежутке не имеет корней, поэтому и единственного корня не будет.

2) если $a > 1$, то получаем $\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) \leq 1$. Придерживаясь схемы рассуждений первого случая, легко установить, что это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 5 \geq 0, \\ x^2 + ax + 5 \leq 4. \end{cases}$$

Для того чтобы эта система имела решение, необходимо, чтобы дискриминант второго неравенства системы был неотрицательным. Если он положительный, то найдутся корни соответствующего уравнения, причем для них неравенство $x^2 + ax + 5 = x^2 + ax + 1 + 4 > 0$. Поэтому полученная система будет иметь по крайней мере два решения x_1 и x_2 , что нас не устраивает. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда дискриминант $a^2 - 4 = 0$, а с учетом $a > 1$ достаточно проверить $a=2$. Подставив $a=2$, получим систему, имеющую одно решение.

Ответ: $a=2$.

Использование четности, периодичности и обратимости функции встречается в задачах очень редко. Однако их применение в некоторых случаях приводит к более быстрому решению задачи. Продемонстрируем на примерах.

Пример. Указать все значения параметра a , для которых уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решения.

Решение. Введем новую переменную $t = \sqrt{a + \sin x}$, $t \geq 0$ и запишем систему для решения уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{a + t} = t^2 - a, \\ 0 \leq t. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = t^2 - a$ при $t \geq 0$. Отметим, что эта функция обратима и обратной к ней является функция $y = \sqrt{t + a}$, учтем, что все общие точки взаимно обратных функций лежат на прямой $y=t$. Из уравнения $t^2 - a = t$ получаем ответ.

Ответ: $a \geq -\frac{1}{4}$.

Пример. Решить уравнение $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$.

Решение. Введем в рассмотрение функции $f(a) = a^5 + x$ и $g(a) = \sqrt[5]{a - x}$. Данные функции являются возрастающими и взаимно обратными. Тогда $a^5 + x = a$ равносильно исходному.

Ответ: $x = a - a^5$.

Приведем еще одно решение уравнения, но уже с использованием свойств обратимости функции.

Пример. Для $0 < a < \frac{1}{4}$ решить уравнение

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

Решение. Очевидно $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ и согласно условию, то $x > 0$. Рассмотрим функцию

$y = x^2 + 2ax + \frac{1}{16}$. Она строго возрастает на $[-a; +\infty)$, поэтому при $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ эта функция

обратима, обратной для нее будет функция $y = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Отсюда

$x = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Заметим, что мы использовали функцию, стоящую в правой части урав-

нения, т. к. выбор такой функции не повлиял на область допустимых значений первоначального уравнения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{4}(2 - 4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a + 3}).$$

Таким образом, хорошее знание свойств функций, а также свойств конкретных элементарных функций позволяет применять их при решении задач с параметрами. Регулярное использование в учебном процессе функционального подхода при решении задач позволяет сформировать у обучающихся целостную картину восприятия математики, развивать математическую культуру.

Using a functional approach to solving problems with parameters

E. S. Trefilova¹, Z. V. Shilova²

¹senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

²PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Humanities and Natural Sciences,
Dmitrov Institute of Continuing Education branch "Dubna University".
Russia, Dmitrov. ORCID: 0000-0003-1715-2513. E-mail: zoya@soi.su

Abstract. The article discusses the application of a functional method for solving problems with parameters. In particular, the application of such properties of functions as monotonicity, areas of definition and values of functions, extreme values of a function – the largest and smallest values of a function on a segment is shown, examples of the use of parity and reversibility of a function are shown. The article contains a large number of examples, some of them indicate several solutions. The given selection of tasks will be useful when preparing for exams for a full school course, as well as for the final repetition of the material.

Keywords: functional approach, parameter, function properties: domain of definition, monotonicity, set of function values.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 511.343(091)

DOI 10.25730/VSU.0536.22.017

В поисках доказательства Великой теоремы Ферма

Т. Л. Анисова¹, В. И. Дудин², Д. С. Павлов³

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана. Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-3755-5718. E-mail: bolashova1@mail.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент. Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-8414-4612. E-mail: olgapavru@yandex.ru

³магистрант, Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт». Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-6714-1161. E-mail: denpav98@yandex.ru

Аннотация. В статье представлены и доказаны утверждения, связанные с поиском доказательства Великой теоремы Ферма. Материал, изложенный в статье, может быть полезен школьникам и студентам, интересующимся математикой, а также руководителям математических кружков и факультативов.

Ключевые слова: математический кружок, дополнительное образование, теорема Ферма.

Французский математик XVII в. Пьер Ферма (Pierre Fermat) считается отцом современной теории чисел. Первые достижения этой науки возникли при попытке решения ряда задач, им же и поставленных.

В 1670 г. сын Пьера Ферма издал книгу «Арифметика» александрийского математика Диофанта. В издании содержались примечания Пьера Ферма, оставленные им на полях одного из экземпляров этого сочинения.

Одно из этих примечаний и содержит предложение, получившее название Великой теоремы Ферма.

Если n означает какое угодно целое положительное число больше нежеле 2, то уравнению $x^n + y^n = z^n$ не могут удовлетворять никакие три целых положительных числа x, y, z .

Ферма на полях книги записал: «Я нашел удивительное доказательство этого предложения, но поля книги слишком узки, чтобы оно могло на них поместиться» [2]. Таким образом, доказательство, которым обладал сам Ферма, осталось необнародованным.

А. Я. Хинчин в своей книге «Великая теорема Ферма» (1927 г.) [2] дал необходимые справки, касающиеся проблемы Ферма, ее истории, привел доказательство для случая $n = 4$ и краткий обзор других важнейших результатов (по состоянию на 1925 г.). Материалы, изложенные в книге, могут быть интересны студентам вузов и учащимся школ, увлекающимся математикой. В данной статье содержатся утверждения и их доказательства, которые могут быть использованы для занятий на факультативах по математике, в школьных и студенческих математических кружках [1].

Прежде всего мы замечаем, что числа x, y, z мы вправе считать попарно, не имеющими общих делителей. Если бы какие-нибудь два из них, например, x и y , имели какой-нибудь общий делитель $t > 1$, то, как показывает уравнение $x^n + y^n = z^n$, и z должно было делиться на t , так что все уравнение можно было бы сократить на t^n . Поэтому предполагаем, что числа x, y, z попарно не имеют общих делителей.

Предположим, что есть три числа x, y, z , которые являются решениями уравнения

$$x^n + y^n = z^n, \quad (1)$$

где n – простое число ($n > 2$).

Если предположить, что $x = y$ есть решение уравнения (1), то $2x^n = z^n$. Поэтому z – четное число и $z = 2z_1$, $2x^n = 2^n z_1^n \Rightarrow 2x^n = 2^{n-1} z_1^n$, то x – четное число, что противоречит тому, что x, y, z попарно не имеют общих делителей.

Далее будем считать, что $x < y$.

По формуле Бинома Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k = \underline{x^n} + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + \underline{y^n}.$$

$$x^n + y^n = z^n < (x + y)^n \Rightarrow z < x + y. \quad (2)$$

Итак, имеем $x < y < z < x + y$.

Ясно, что $z = x + t < x + y$, $t < y$ (3)

$$x^n + y^n = z^n = (x + t)^n = x^n + nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \dots + nxt^{n-1} + t^n,$$

откуда имеем

$$y^n = nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \dots + nxt^{n-1} + t^n. \quad (4)$$

Так как правая часть делится на t , то y делится на t .

Если $t = 1$, то $z = x + 1$ и тогда

$$x < y < x + 1.$$

Не существует целого числа между двумя последовательными целыми числами, поэтому t не может быть равно единице.

Пусть $t \neq 1$, тогда из соотношений (3), (4) следует, что $y = t \cdot a$. Подставим $y = t \cdot a$ в (4)

$$a^n t^n = nx^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t^2 + \dots + nxt^{n-1} + t^n.$$

Сократим на t , получим

$$a^n t^{n-1} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}t + \dots + nxt^{n-2} + t^{n-1}. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что либо x^{n-1} делится на t , либо n делится на t .

1) Если x^{n-1} делится на t , то это означает, так как y делится на t , что x и y делятся на t . Это противоречит условию о том, что x, y не имеют общих делителей.

2) Если n делится на t , то это означает, что $t = n$, так как n – простое число. Тогда соотношение (5) имеет вид

$$a^n n^{n-1} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}n + \dots + nxn^{n-2} + n^{n-1}.$$

Сокращая на n , получаем:

$$a^n n^{n-2} = x^{n-1} + \frac{(n-1)}{2}x^{n-2}n + \dots + xn^{n-2} + n^{n-2}. \quad (6)$$

Так как коэффициенты бинома Ньютона C_n^k делятся на n , если n – простое число и $n > 2$.

Из соотношения (6) следует, что x делится на n . Следовательно, x и y делятся на n , что невозможно.

Итак, не существует никаких целых положительных чисел x, y, z , удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$, где n – простое число ($n > 2$).

Теорема 1. Уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2$$

имеет решение в целых числах.

Доказательство. Имеем $x < y < z$. Положим, $z = x + t$, тогда

$$x^2 + y^2 = (x + t)^2 = x^2 + 2xt + t^2;$$

$$y^2 = 2xt + t^2;$$

$$y = t \cdot a \ (t \neq 1) \Rightarrow a^2 t^2 = 2xt + t^2, a^2 t = 2x + t.$$

По доказанному выше $n = 2$ делится на $t \neq 1$, следовательно, $t = 2$. Получаем $2a^2 = 2x + 2$.

Итак, $a^2 = x + 1$; $y = 2a$; $z = x + 2$.

Если $x = 3$, то $a = 2$ и $y = 4$, $z = 5$.

$x = 3, y = 4, z = 5$ – решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Уравнение

$$x^4 + y^4 = z^4, \quad (7)$$

где x, y, z – натуральные числа, решений не имеет.

Доказательство. Как было показано выше, имеем, что x, y, z попарно простые числа, $x = y$ не является решением. Кроме того,

$$x < y < z \quad (8).$$

Положим, $z = x + t$, тогда

$$z^4 = (x + t)^4 = x^4 + 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем:

$$y^4 = 4x^3t + 6x^2t^2 + 4xt^3 + t^4. \quad (10)$$

Из последнего соотношения следует, что $y^4 > t^4 \Rightarrow y > t$, y^4 делится на t , значит, y делится на t .

Если $t = 1$, то $z = x + 1$. Из соотношения (8) следует, что $x < y < x + 1$, то есть y заключен между двумя последовательными натуральными числами. Следовательно, $t \neq 1$.

Если $t > 1$ и y делится на t , то $y = ct$. Тогда соотношение (10) имеет вид

$$c^4 t^4 = 4x^3 t + 6x^2 t^2 + 4xt^3 + t^4.$$

Сокращая на t , получаем:

$$c^4 t^3 = 4x^3 + 6x^2 t + 4xt^2 + t^3. \quad (11)$$

Из соотношения (11) заключаем, что либо 4 делится на t , либо x^3 делится на t . Во втором случае x делится на t , то есть x и y имеют общий делитель, чего не может быть.

Итак, 4 делится на t , то есть $t = 2$ или $t = 4$.

1) Если $t = 4$, то соотношение (11) имеет вид

$$c^4 4^3 = 4x^3 + 6x^2 4 + 4x 4^2 + 4^3.$$

Сокращая на 4, получаем:

$$c^4 4^2 = x^3 + 6x^2 + x 4^2 + 4^2. \quad (12)$$

Из соотношения (12) заключаем, что x – четное число, $x = 2x_1$. Таким образом, x и $t = 4$ имеют общий делитель, но $y = c \cdot 4$, то есть x и y имеют общий делитель 2. Это противоречит условию: x и y взаимно простые числа.

2) Пусть $t = 2$. Тогда уравнение (7) имеет вид

$$x^4 + y^4 = (x + 2)^4.$$

Так как $x < y < x + 2$, то $y = x + 1$.

Итак, уравнение

$$x^4 + (x + 1)^4 = (x + 2)^4,$$

где x – натуральное число, должно иметь решение.

Выполним преобразования:

$$x^4 + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 28x - 15 = 0.$$

Так как x – натуральное число, а произведение корней равно (-15) , то заключаем, что x может быть равно 1, 3, 5, 15.

Проверим эти значения.

$$\varphi(x) = x^4 + (x + 1)^4 - (x + 2)^4;$$

$$\varphi(1) = 1 + 16 - 81 \neq 0;$$

$$\varphi(3) = 3^4 + 4^4 - 5^4 = -278 \neq 0;$$

$$\varphi(5) = 5^4 + 6^4 - 7^4 = -488 \neq 0;$$

$$\varphi(15) = 15^4 + 16^4 - 17^4 = 32640 \neq 0.$$

Таким образом, ни одно из значений не является корнем уравнения. Теорема доказана.

Теорема 3. Уравнение

$$x^{2^n} + y^{2^n} = z^{2^n}, \quad (13)$$

где $n > 2$, x, y, z – натуральные числа, решений не имеет.

Доказательство. $x^{2^n} + y^{2^n} = z^{2^n}$ можно переписать в виде

$$(x^{2^{n-2}})^4 + (y^{2^{n-2}})^4 = (z^{2^{n-2}})^4.$$

Это уравнение по теореме 2 решений не имеет, следовательно, уравнение (13) решений не имеет. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теорем использовались следующие утверждения:

1. Если каждое из слагаемых делится на одно и то же число, то их сумма делится на это число;
2. Между двумя последовательными натуральными числами нет натурального числа;

3. Если n – простое число, то коэффициенты бинома Ньютона C_n^k , кроме первого и последнего, делятся на n .

Список литературы

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел : сб. задач для математических школ. М. : МЦНМО, 2002. 264 с.
2. Хинчин А. Я. Великая теорема Ферма. Изд. 4-е. М. : URSS, 2015. 80 с.

In search of a proof of Fermat's Great Theorem

T. L. Anisova¹, V. I. Dudin², D. S. Pavlov³

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-3755-5718. E-mail: bolashova1@mail.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor.

Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-8414-4612. E-mail: olgapavru@yandex.ru

³graduate student, National Research Nuclear University "Moscow Engineering Physics Institute".

Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-6714-1161. E-mail: denpav98@yandex.ru

Abstract. The article presents and proves the statements related to the search for a proof of Fermat's Great Theorem. The material presented in the article can be useful to schoolchildren and students interested in mathematics, as well as to the heads of mathematical circles and electives.

Keywords: mathematical circle, additional education, Fermat's theorem.

References

1. Alfutova N. B., Ustinov A. V. *Algebra i teoriya chisel : sb. zadach dlya matematicheskikh shkol* [Algebra and number theory : collection of problems for mathematical schools]. M. ICNMO. 2002. 264 p.
2. Hinchin A. Ya. *Velikaya teorema Ferma. Izd. 4-e* [Fermat's Great Theorem. Ed. 4th]. M. URSS. 2015. 80 p.

Об отражении исторического развития комплексного анализа в рамках курса ТФКП

Р. М. Асланов¹, В. В. Сушков²

¹доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
старший научный сотрудник института математики и механики, Национальная академия наук.
Азербайджанская Республика, г. Баку. E-mail: r_aslanov@list.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент, начальник учебного управления,
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина.
Россия, г. Сыктывкар. E-mail: vvsu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена история возникновения и развития теории функции комплексного переменного как отрасли науки и ее влияния на развитие соответствующей учебной дисциплины. В обоих случаях выделены основные этапы исторического процесса, указаны ключевые фигуры, даты, факты, публикации и результаты. Утверждается, что традиционная логика изложения учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. Разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, должна учитывать историю развития дисциплины, но должна опираться на современные образовательные технологии и возможности электронных обучающих средств и ресурсов.

Ключевые слова: теория функций комплексного переменного, комплексный анализ, история математики, учебная дисциплина, этапы развития, образовательные технологии, методическая составляющая.

«Теория функций комплексного переменного» (ТФКП), или «Комплексный анализ» – одна из дисциплин, считающихся сегодня классической и обязательной в рамках образовательных программ высшего образования для подготовки математиков, физиков, инженеров, педагогов и не только. В то же время ее место и значение как в математической науке, так и в математическом образовании были сформированы исторической необходимостью. Более того, можно утверждать, что содержание и логика изложения ТФКП как дисциплины в значительной степени повторяют историю развития ТФКП как научной дисциплины. Эта логика развития понятийного аппарата, повторяемая в рамках учебного курса, позволяет в значительной степени обеспечить логику освоения студентами учебного материала.

Начало развития комплексного анализа как науки принято отсчитывать с работ Джероламо Кардано, в частности, с *Artis magnae sive de regulis algebraicis* (1545). Значение этой книги в истории математики позже, уже в XX в., описано словами Феликса Клейна: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики». В работе Кардано приведено описание и обоснование приемов решений уравнений третьей и четвертой степени, как известно, открытых и развитых С. дель Ферро, Н. Тарталья и Л. Феррари. Однако обвинять Кардано в плагиате было бы неправомерно, он прямо указывал не только на авторство формул, но и на порядок попадания этих формул в его поле зрения. Несмотря на то, что опубликованные формулы подразумевали использование квадратных корней из отрицательных чисел, сам Дж. Кардано полагал такие величины «софистически отрицательными», бесполезными – и старался не обращаться к ним вне умозрительных построений в рамках развитой теории. Аргументировал свое отношение невозможностью измерения с помощью таких чисел какой-нибудь величины, как и выражения изменения какой-либо реальной величины.

В то же время чисто мыслительный эксперимент итальянских математиков привлек внимание других ученых, в частности, их земляка Р. Бомбелли, который в своей книге (1572) описал первые правила арифметических операций над «невозможными» числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. А вскоре, в 1637 г., появился и термин «мнимые числа», введенный французским математиком и философом Рене Декартом, а спустя еще полтора столетия, в 1777 г., Леонард Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения корня из -1. Надо сказать, что сам Декарт полагал какую бы то ни было интерпретацию комплексных чисел бесполезной и писал: «Не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням». Осмысление новой отрасли знания продолжалось, отчасти не столько формализованное, сколько романтизированное (в 1702 г. Г. В. Лейбниц писал: «То, что

мы называем мнимым корнем, – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием»).

Впрочем, даже интуитивное использование комплексных чисел зачастую приводило к формулировке важных результатов, как, например, в 1707 г., когда Абрахам де Муавр опубликовал свою знаменитую формулу для вычисления степеней комплексных чисел для положительных целых n . А еще до того, в 1685 г., Джон Валлис опубликовал «Трактат по алгебре», в котором кроме всего прочего привел геометрическую интерпретацию комплексных чисел, впрочем, совершенно незамеченную современниками. Комплексные числа все еще оставались для математики «вещью в себе», используясь «по необходимости». Одной из областей таких приложений оказалась гидродинамика – в 1752 г. Жан Д’Аламбер впервые сумел применить комплексный анализ при решении дифференциальных уравнений с частными производными. В его работах появились соотношения между частными производными от действительной и мнимой части аналитической функции, впоследствии названные условиями Коши – Римана, хотя если исходить из принципа первенства, их стоило бы именовать условиями Д’Аламбера – Эйлера. Разработанные Д’Аламбером математический аппарат и методология впоследствии начали применяться в теории потенциала – и далее широко и плодотворно практически повсеместно в гидродинамике и вообще математической физике.

Но все же только с работ Леонарда Эйлера (в частности, с «Введения в анализ бесконечно малых», 1748) в научный обиход вошли и комплексная переменная, и величина i – и тогда же началось систематическое освоение математиками возможностей нового аналитического аппарата. Изначально он рассматривал комплексную переменную при решении задачи разложения на линейные сомножители, однако впоследствии дал подробное описание элементарных функций комплексного переменного, а еще позже – условий дифференцируемости и основных положений интегрального исчисления комплексного анализа.

В 1777 г. Эйлер фактически ввел в рассмотрение конформные отображения, называя их «подобными в малом». Отсюда взяло свое начало новое направление приложений комплексного анализа. Продолжая идеи Л. Эйлера, сам термин «конформность» был впервые использован двенадцатью годами позже него академиком Российской академии наук Ф. И. Шубертом, рассматривавшим в связи с астрономией и картографией понятие «конформная проекция» (некоторые историки математики полагают первооткрывателем практического применения конформного отображения стереографической проекции на плоскость Птолемея, описавшего его еще около 150 г.). Дальнейшее развитие теории нашло свое место в работах Ж. Л. Лагранжа – а после того, как в 1797 г. в работе Каспара Весселя «Об аналитическом представлении направлений» была предложена непротиворечивая наглядная геометрическая интерпретация комплексных чисел, начинают появляться работы, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены действия над ними. Достаточно же общая теоретическая трактовка и геометрическая интерпретация была опубликована К.-Ф. Гауссом лишь в 1831 г. [1].

Параллельно в работах того же Гаусса получила свое развитие теория интеграла от функции комплексного переменного. Новая отрасль ТФКП началась с данного им определения интеграла в комплексной плоскости, с доказанной интегральной теоремы о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Чуть позже П.-С. Лаплас использовал комплексные переменные для вычисления отдельных трудных интегралов и развил метод решения разностных и дифференциальных линейных уравнений, известный сейчас под названием метода преобразований Лапласа.

Таким образом, Л. Эйлер и его современники оставили потомкам богатое наследие в виде огромного массива частично систематизированных, но в целом разрозненных фактов из области комплексного анализа. Фактологический материал требовал систематизации в виде единой теории – и вскоре явились математики, сумевшие сформировать стройное здание комплексного анализа, математической отрасли, давшей последователям богатейший инструментарий для применений.

Основные заслуги в создании целостной теории функций комплексного переменного принадлежат О.-Л. Коши, Б. Риману и К. Вейерштрассу. Каждый из них сформировал и развил одно из направлений ТФКП, ныне образующие совместно основное тело комплексного анализа. Каждый из них заложил фундамент огромной области комплексного анализа. Первая такая область получила название «теория моногенных или дифференцируемых функций». Ее отцом-основателем принято считать Огюстена-Луи Коши. Он не только объединил и систематизировал разрозненные факты, доказанные предшественниками в области дифференциального и интегрального исчисления в комплексном анализе, но и сумел разъяснить глубинный смысл и взаимосвязь основных понятий и операций с мнимыми величинами. В своих работах О.-Л. Коши изложил базу всего последующего анализа – систематическую теорию пределов и основанные на ней теории рядов и элементарных функций, именно Коши представил теорему, полностью проясняющую проблему области сходимости

сти степенного ряда. Чуть позже, в 1826 г., он ввел в обиход термин «вычет», понимая его как разность между значениями интегралов от функции комплексного переменного по двум разным путям. В последующие три года он фактически создал стройную и логически безупречную теорию вычетов, ставшую в итоге мощнейшим инструментом в приложениях ТФКП.

Коши вывел интегральную формулу, связавшую значение контурного интеграла со значением подынтегральной функции внутри контура; получил теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды, заложил основы теории аналитических функций многих переменных, определил главные ветви многозначных функций комплексного переменного, впервые использовал для вычислений разрезы плоскости. В 1850 г. Коши ввел понятие монодромных функций и выделил класс моногенных функций. Материал, сформулированный и представленный Огюстеном-Луи Коши и его предшественниками, в первую очередь Леонардом Эйлером, составляет базу любого учебного курса ТФКП, в каком варианте бы он ни излагался.

В отличном от идей Коши направлении начал развивать комплексный анализ Бернхард Риман – он оформил другое, «геометрическое», направление развития ТФКП. В 1851 г. в докторской диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» он предложил связывать функции комплексного переменного с отображениями одной области комплексной плоскости на другую, что, во-первых, позволило воспользоваться сильными сторонами имеющейся геометрической интерпретации и сразу же дало простор для возможных приложений, а во-вторых – позволило наглядно продемонстрировать, что функции комплексного переменного являются расширением понятия функции вещественного переменного, что стало существенно новым шагом в истории теории аналитических функций и позволило в дальнейшем эффективно выстраивать учебный курс ТФКП как учебную дисциплину, расширяющую стандартный курс вещественного математического анализа и дающую логическое объяснение многим фактам, необъяснимым в рамках этого вещественного анализа. Именно Риман описал различия между функциями комплексного и действительного переменного, а также положил начало геометрической теории функций, введя понятие точек ветвления, логичным продолжением чего стало рассмотрение так называемых римановых поверхностей. Доказательство теоремы о существовании конформного отображения односвязных областей позволило Б. Риману стать основателем полноценной теории конформных отображений. В своих работах Риман вскрыл внутреннюю взаимосвязь ТФКП с другими отраслями математики, что позволило ему создавать новые разделы теории на стыке с другими дисциплинами. В частности, именно Риман установил взаимосвязь между аналитическими и гармоническими функциями, а также смог применить комплексный анализ в теории чисел, в частности, введя в рассмотрение дзета-функцию.

Следующий этап развития ТФКП начался с реализацией возможности представления функций степенными рядами, что породило новое, «аналитическое» направление развития комплексного анализа. В его основу легли результаты Карла Вейерштрасса, доказавшего, что множество всех комплекснозначных многочленов позволяет с любой требуемой точностью воспроизводить значения любой непрерывной функции. Он сумел описать сходимость последовательности аналитических функций, обобщить теорему Коши о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд, описал процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применение в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках развитой теории Вейерштрасс сформулировал и доказал теоремы об операциях над степенными рядами и поставил их, с учетом отношения аналитического продолжения, в центр теории аналитических функций. Также Вейерштрассом была доказана теорема о разложении целой функции в произведение, он заложил основы теории аналитических функций многих переменных, построил основы теории делимости степенных рядов. Идеи Вейерштрасса продолжили в своих работах его ученики М. Г. Миттаг-Лефлер и К. Г. Шварц.

Несмотря на то, что еще в 1850 г. профессор И. И. Сомов, опираясь на работы Якоби, издал свой труд «Основания теории аналитических функций», а в 1856 г. небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного» Ш. Брио и Т. Буке стал первым известным учебным пособием по комплексному анализу, но именно Карла Вейерштрасса принято считать основателем ТФКП как учебной дисциплины. С 1856 г. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций в виде степенных рядов, а с 1861 г. – лекции по ТФКП в целом. В 1876 г. появилось его сочинение «К теории однозначных аналитических функций», а в 1880 г. «К учению о функциях». С изданием упомянутых трудов, максимально близко соответствующих понятию учебника в современном его понимании, развитая Вейерштрассом и его предшественниками теория аналитических функций приобрела завершенную форму.

В этот же период одним из первых российских математиков, обратившихся к теме комплексных переменных, стал М. В. Остроградский, который исследовал интегралы от функций комплекс-

ного переменного, обобщил некоторые ранее доказанные частные утверждения, в частности, вывел формулу для вычета функции относительно полюса n -го порядка. О нем с уважением отзывался О.-Л. Коши («Этот русский молодой человек одарен большой проницательностью и весьма сведущ»). В обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858–1859 гг., ставшем первым учебным курсом ТФКП в России, М. В. Остроградский делал упор на применения теории вычетов и формулы Коши к вычислению определенных интегралов.

Однако первым по-настоящему оригинальным русским исследователем в области ТФКП стал Ю. В. Сохоцкий, описавший свои результаты в области приложений теории вычетов, аналитических функций, многочленов Лежандра в своей магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (1868). Там же был сформулирован и доказан общеизвестный фундаментальный результат о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Впоследствии Ю. В. Сохоцкий начал читать лекционные курсы, а в его докторской диссертации (1873) впервые было введено в развернутом виде понятие интеграла типа Коши, понимаемого как интеграл «по траектории», соединяющей точки a и b , доказан ряд базовых теорем теории интегралов типа Коши.

С этого момента ТФКП как научная дисциплина вышла на этап экстенсивного расширения, математики всего мира начали создавать функциональные отрасли приложений комплексного анализа, – и началось развитие полноценной учебной дисциплины. К концу XIX в. теория функций комплексного переменного включала в себя обширный комплекс разделов и дисциплин, а в начале XX в. произошло формирование учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного».

В отечественной высшей школе эта традиция длилась до середины XX в., например, в классическом учебнике В. И. Смирнова «Курс высшей математики» (1930) ТФКП все еще рассматривается как составная часть общих курсов, и только к 1950-м гг. сформировались общие традиции преподавания дисциплины и были изданы классические учебники – А. И. Маркушевича («Теория аналитических функций» и «Очерки по истории теории аналитических функций») и И. И. Привалова («Введение в теорию функций комплексного переменного»). После этого параллельно с развитием комплексного анализа как научной дисциплины был издан целый комплекс классических университетских учебников для студентов-математиков, физиков и обучающихся инженерных специальностей за авторством Б. А. Фукса, Б. В. Шабата, М. А. Лаврентьева, задачки и курсы лекций А. И. Маркушевича, М. И. Шабунина, М. А. Евграфова и других отечественных математиков. К тому времени базовый учебный курс «ТФКП» уже сформировался, что явственно следует из пояснения автора (Б. В. Шабат) к учебнику «Введение в комплексный анализ» 1969 г.: «Первая часть, посвященная функциям одного переменного, содержит материал обязательного университетского курса. Вторая часть посвящена функциям нескольких переменных и содержит материал основного спецкурса» [2].

С этого момента можно говорить о «канонизации» дисциплины ТФКП, ставшей полноценной частью учебного процесса. Необходимо отметить, что традиционно логика изложения учебной дисциплины в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. В последние годы работа математиков в области комплексного анализа была посвящена в первую очередь разработке эффективных приложений теории и, соответственно, учебных пособий в сопровождение соответствующих спецкурсов. Это породило значительный массив учебных пособий, учебников, сборников задач, ориентированных не на целостное освещение теории, а на проработку более-менее специфического материала, ориентированного на конкретные приложения ТФКП. Отдельным направлением деятельности в развитии методической составляющей преподавания дисциплины является разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, а также соответствующих электронных образовательных ресурсов и электронных пособий. Использование современных образовательных технологий открывает перед преподавателем новые перспективы в формировании учебного курса по комплексному анализу в зависимости от поставленных задач.

Список литературы

1. Анохина Е. Ю. История развития и становление теории функции комплексного переменного (ТФКП) учебным предметом // Вестник ТГПИ. Естественные науки. 2008. С. 83–87.
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2-х т. М. : Ленанд, 2020. 344 с.

On the reflection of the historical development of complex analysis in the framework of the TFCP course

R. M. Aslanov¹, V. V. Sushkov²

¹Doctor of Pedagogical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, senior researcher
at the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences.

Azerbaijan Republic, Baku. E-mail: r_aslanov@list.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Head of the Educational Department,
Syktyvkar State University n. a. Pitirim Sorokin. Russia, Syktyvkar. E-mail: vvsu@mail.ru

Abstract. The paper considers the history of the emergence and development of the theory of the function of a complex variable as a branch of science and its influence on the development of the relevant academic discipline. In both cases, the main stages of the historical process are highlighted, key figures, dates, facts, publications and results are indicated. It is argued that the traditional logic of the presentation of the discipline "Theory of functions of a complex variable" repeats to a greater or lesser extent the historical logic of the development of the scientific branch. The development of either specialized or maximally universal textbooks adapted to different levels of teaching should take into account the history of the development of the discipline, but should rely on modern educational technologies and the possibilities of electronic learning tools and resources.

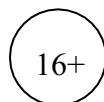
Keywords: theory of functions of a complex variable, complex analysis, history of mathematics, academic discipline, stages of development, educational technologies, methodological component.

References

1. Anohina E. Yu. *Istoriya razvitiya i stanovlenie teorii funktsii kompleksnogo peremennogo (TFKP) uchebnym predmetom* [History of development and formation of the theory of the function of a complex variable (TFCP) as an educational subject] // *Vestnik TGPI. Estestvennye nauki* – Herald of TSPI. Natural sciences. 2008. Pp. 83–87.
2. Shabat B. V. *Vvedenie v kompleksnyy analiz. V 2-h t.* [Introduction to complex analysis. In 2 vols.]. M. Lenand. 2020. 344 p.

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 2 (25) (2022)



Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964