

## О степенных средних величинах в курсе математики

Трефилова Елена Сергеевна<sup>1</sup>, Чиркова Лариса Николаевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup>старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11265@vyatsu.ru

<sup>2</sup>кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11713@vyatsu.ru

**Аннотация.** В предлагаемой статье рассмотрены некоторые вопросы изучения одной из тем математической статистики – степенных средних величин – для направления подготовки «Таможенное дело», реализуемого в Вятском государственном университете. Дается краткий анализ средних величин с точки зрения применения их на занятиях со студентами направления «Таможенное дело». В статье приводятся профессионально направленные практические задачи на использование формул для вычисления степенных средних показателей, позволяющие повысить интерес к математике и выбранной сфере деятельности и вырабатывающие умения применять полученные знания на практике. Материалы статьи могут быть интересны преподавателям и студентам при изучении курсов математики и статистики.

**Ключевые слова:** математика, математическая статистика, средние величины, средняя арифметическая, средняя геометрическая, средняя квадратическая, средняя гармоническая, мода, медиана, профессиональная направленность обучения математике.

Одной из дисциплин, формирующей общепрофессиональные компетенции специалистов различных направлений, является математика, поскольку при изучении экономических и специальных учебных дисциплин в вузе требуется хорошее владение математическим аппаратом. В число обязательных разделов математики входит математическая статистика, одна из задач которой – выявление методов сбора и обработки статистической информации для получения обоснованных научных и практических выводов о закономерностях окружающего мира.

Данный раздел включен в курс математики разных направлений подготовки, занимающихся исследовательской деятельностью в различных профессиональных областях. Так, будущие специалисты направления «Таможенное дело» исследуют количественную сторону массовых явлений и процессов, происходящих во внешней торговле страны [1, с. 10], таможенная служба постоянно ведет сбор и обработку данных о перемещении товаров через границу и предоставляет сведения о внешней торговле товарами, декларации на товары и другие документы, которые являются исходными данными при формировании таможенной статистики внешней торговли.

Студенты рассматривают понятие генеральной совокупности – всей подлежащей изучению базы объектов, без сомнения, изучение всей генеральной совокупности позволяет получить о ней достоверную информацию. Однако в силу различных причин (ограничение по пространству, времени, материальным затратам, слишком большое число объектов и пр.) вся генеральная совокупность часто бывает недоступна для сплошного исследования. Поэтому о закономерностях всей совокупности приходится судить, проводя выборочное наблюдение, при котором исследуется только часть единиц, отобранная определенным способом из генеральной совокупности, при этом полученная выборочная совокупность (выборка) обязательно должна быть репрезентативной. Дальнейшее изучение какого-либо явления идет уже с использованием выборочной совокупности, и полученные по ней выводы распространяются на всю изучаемую генеральную совокупность с некоторой погрешностью.

В большинстве случаев выборочная совокупность организуется как для определения среднего значения признака в генеральной совокупности, например, средней стоимости данного товара, среднего веса брутто, так и для определения доли элементов генеральной совокупности, обладающих некоторым признаком, например, доли товаров данной товарной позиции, произведенной в конкретной стране, в общем импорте этой товарной позиции.

После отбора элементов в выборочную совокупность они обычно подвергаются группировке, выбор которой зависит от целей исследования, поэтому в большинстве случаев расчеты делаются уже по сгруппированным по какому-то признаку данным – статистическим рядам распределения, которые бывают атрибутивными и вариационными. Одним из показателей статистического вариационного ряда являются средние величины, характеризующие типичный уровень варьирующего количественного признака на единицу совокупности в определенных условиях места и времени [3, с. 28].

При решении практических задач часто достаточно указать числовые характеристики, определяющие закономерности распределения случайной величины. Средние величины строятся на основе большого количества индивидуальных значений варьирующего признака и являются обобщающими статистическими показателями, дающими сводную (итоговую) характеристику массовых общественных явлений [2, с. 43]. Относительно средней величины группируются, рассеиваются всевозможные значения случайной величины. Средняя величина отражает общее, характерное и типичное для всей совокупности благодаря взаимопогашению в ней случайных, нетипичных различий между признаками отдельных ее единиц.

Средние величины характеризуют центральную тенденцию распределения и имеют ту же размерность, что и признак у отдельного элемента совокупности [4, с. 270]. На занятиях студенты знакомятся с различными видами средних величин, которые делят на два класса: степенные средние (средняя арифметическая, средняя гармоническая, средняя геометрическая, средняя квадратическая) и структурные средние (мода, медиана).

Самый часто используемый в практических задачах вид степенной средней – средняя арифметическая – не является новым термином для студентов и знакома им еще со средней школы.

Простая средняя арифметическая вычисляется как сумма всех значений варьирующего признака, разделенная на общее количество единиц совокупности:  $\bar{x}_{ариф} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ . Кроме

того, студенты изучают взвешенную среднюю арифметическую величину:

$$\bar{x}_{ариф} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}.$$

Приведем пример профессионально ориентированных задач на вычисление средней арифметической дискретного вариационного ряда.

Пример 1. Имеются данные о значениях веса брутто (кг) десяти товарных партий некоторой товарной позиции, перемещаемых через таможенный пункт: 18, 25, 14, 20, 36, 15, 30, 20, 10, 22. Построить дискретный вариационный ряд товарных партий по весу брутто и найти среднее значение веса брутто.

Для решения выписывают все значения количественного признака в порядке возрастания и вычисляют среднее значение веса брутто:

$$\bar{x}_{ариф} = \frac{10 + 14 + 15 + 18 + 20 + 20 + 22 + 25 + 30 + 36}{10} = \frac{210}{10} = 21 \text{ (кг)}.$$

Студенты должны уяснить, что простая средняя арифметическая применяется в тех случаях, когда данные не сгруппированы.

Следующая задача, решаемая на практическом занятии, иллюстрирует вычисление взвешенной средней.

Пример 2. Имеются данные о значениях среднего стажа работников (лет) трех таможенных постов. Найти средний стаж работников по всем таможенным постам.

Таблица 1

**Данные о стаже работников таможенных постов**

№ таможенного поста	Средний стаж работы, лет	Число работников, чел.
1	5	9
2	7	6
3	10	5

Для решения необходимо вычислить общее количество работников трех таможенных постов как сумму  $9+6+5=20$  (чел.), общий стаж работы, потом использовать формулу для нахождения взвешенной средней арифметической:

$$\bar{x}_{ариф} = \frac{9 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 10}{20} = \frac{137}{20} = 6,85 \text{ (лет)}.$$

Формула для вычисления средней арифметической может быть использована и для решения задач, в которых группировка осуществлена по непрерывному признаку (интервальные вариационные ряды).

Пример 3. Имеются данные, характеризующие дифференциацию потребления кофе в крайних децильных группах домохозяйств [5, с. 147]. Вычислить средний уровень потребления кофе в каждой группе.

Таблица 2

**Данные о потреблении кофе в децильных группах**

Потребление кофе в год, кг	% к итогу по 10 % домохозяйств	
	наименее обеспеченных (первая группа)	наиболее обеспеченных (десятая группа)
менее 3	38	6
3-5	22	12
5-7	18	34
7-9	14	28
9 и более	8	20
Итого	100	100
Обследовано домохозяйств	126	132

Для решения задачи необходимо сначала выбрать среднее значение признака в каждом интервале, а затем применить формулу для нахождения средней взвешенной арифметической. Отметим, что для открытых интервалов, у которых не указана верхняя или нижняя границы, для их нахождения используется длина соседнего интервала. Таким образом, студенты находят середины интервалов соответственно 2, 4, 6, 8, 10 (кг) и вычисляют среднее количество потребляемого кофе в указанных первой и второй группах:

$$x_{ариф} = \frac{2 \cdot 38 + 4 \cdot 22 + 6 \cdot 18 + 8 \cdot 14 + 10 \cdot 8}{100} = 4,64 \text{ (кг)} - \text{средний уровень потребления кофе в}$$

группе наименее обеспеченных домохозяйств;

$$x_{ариф} = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 34 + 8 \cdot 28 + 11 \cdot 20}{100} = 6,88 \text{ (кг)} - \text{средний уровень потребления кофе в}$$

группе наиболее обеспеченных домохозяйств.

Кроме средней арифметической, большое практическое значение имеет средняя гармоническая величина, которая также может быть простой и взвешенной:

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \text{ и } \bar{x}_{гарм} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{\frac{k_1}{x_1} + \frac{k_2}{x_2} + \dots + \frac{k_n}{x_n}}.$$

По отношению к средней арифметической средняя гармоническая величина является обратной средней арифметической величиной к среднему от обратных значений признака и применяется в тех случаях, когда слагаемые в числителе при вычислении средней арифметической известны, а значения знаменателя неизвестны, но могут быть найдены в результате деления одного показателя на другой.

Пример 4. Имеются данные о значениях фонда заработной платы за месяц (у.е.) и средней зарплате работников трех таможенных постов. Найти среднюю зарплату работников.

Таблица 3

**Данные о заработной плате работников таможенных постов**

№ таможенного поста	Фонд заработной платы (тыс. руб.)	Средняя заработная плата (тыс. руб.)
1	690	46
2	588	49
3	484	44

Для нахождения средней заработной платы по всей выборочной совокупности студентам необходимо использовать формулу взвешенной средней гармонической, так как количество работников неизвестно:

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{690 + 588 + 484}{\frac{690}{46} + \frac{588}{49} + \frac{484}{44}} = \frac{1762}{15 + 12 + 11} = \frac{1762}{38} \approx 46,4 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Одной из важнейших задач таможенной статистики является изучение изменений анализируемых показателей во времени (динамика явления) при помощи анализа временных рядов, при этом средняя геометрическая величина применяется для определения средних относительных изменений (базисного и цепного):

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \text{ и } \bar{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}}, \text{ где } n = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Приведем профессионально ориентированные задачи на нахождение средней геометрической величины, которая чаще всего используется для вычисления среднего коэффициента роста, решаемые в курсе математики при обучении будущих специалистов таможенного дела.

Пример 5. Имеются данные о значениях коэффициента роста цены товарной позиции за полугодие. Найти среднемесячный коэффициент роста цены.

Таблица 4

**Данные о значениях коэффициента роста цены**

Месяцы	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июль
Коэффициент роста цены, % к предыдущему месяцу	1,1	1,2	1,28	1,07	0,98	0,95

Каждое значение признака встречается один раз, поэтому для решения студенты используют формулу для нахождения простой средней геометрической:

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[6]{1,1 \cdot 1,2 \cdot 1,28 \cdot 1,07 \cdot 0,98 \cdot 0,95} \approx \sqrt[6]{1,68} \approx 1,09$$

составил среднемесячный коэффициент роста цены товарной позиции.

Пример 6. Имеются данные о перевозке грузов через границу на некотором таможенном пункте. Определите средний темп роста объема перевозок.

Таблица 5

**Данные об объеме перевозок грузов через таможенный пункт**

	Январь	Февраль	Март	Апрель
Перевезено грузов, тыс. тонн	35	40	42	50

Для вычисления среднемесячного темпа роста перевозок необходимо сначала найти месячный темп роста и затем применить формулу простой средней геометрической.

Месячные темпы роста  $x_1 = \frac{40}{35} \approx 1,143 = 114,3\%$ ;  $x_2 = \frac{42}{40} = 1,050 = 105,0\%$ ;

$x_3 = \frac{50}{42} \approx 1,190 = 119,0\%$ .

Среднемесячный темп роста составит  $\bar{x}_{геом} = \sqrt[3]{1,143 \cdot 1,050 \cdot 1,190} \approx 1,126$ , или 112,6%.

Пример 7. Известно, что месячные темпы импорта некоторого товара в течение полугодия составили 112 %, 115 %, 112 %, 120 %, 96 %, 120 %. Найдите среднемесячный темп роста импорта данного товара.

При анализе условия задачи мы видим, что значения темпов импорта отличаются, но среди них встречаются и одинаковые, поэтому для решения нужно применить формулу взвешенной средней геометрической.

Имеем:  $\bar{x}_{геом} = \sqrt[6]{1,12^2 \cdot 1,15 \cdot 1,2^2 \cdot 0,96} = 1,122 = 112,2\%$ .

В некоторых случаях экономической практики бывает необходимо рассчитать средний размер признака, выраженного в квадратных единицах измерения. Тогда применяется средняя квадратическая (например, для вычисления средней величины стороны квадратных участков, средних диаметров бревен, труб):

$$\bar{x}_{кв} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \text{ и } \bar{x}_{кв} = \sqrt{\frac{k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_n x_n^2}{n}}, \text{ где } n = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Приведем практическую задачу на нахождение средней квадратической величины.

Пример 8. Фирма перевозит через границу три вида строганого бруса квадратного сечения со сторонами 10, 15 и 20 см. Определить сторону среднего (по площади сечения) строганого бруса.

При анализе задачи мы видим, что должно выполняться равенство суммы исходных площадей и суммы площадей средних по площади сечений, тогда

$$\bar{x}_{кв} = \sqrt{\frac{10^2 + 15^2 + 20^2}{3}} = \sqrt{\frac{725}{3}} \approx 15,5 \text{ (см)}.$$

Отметим, что средняя квадратическая величина из вариантов  $x_i$  имеет ограниченное применение в практике, тогда как наиболее часто используется средняя квадратическая не из самих вариантов  $x_i$ , а из их отклонений от средней  $x_i - \bar{x}$ , при расчете среднего квадратического отклонения.

Подчеркнем, что для изучения темы «Средние величины» в курсе математики выделяется немало времени, поэтому желательно большую его часть уделить на практическое применение формул. Для сокращения времени на вычисления лучше брать небольшие по модулю числовые данные и ограничить число градаций признака. Помимо этого, можно использовать табличные редакторы со встроенными в них функциями, если подготовка студентов по данному вопросу достаточна. В этом случае можно решать задачи, более приближенные к их будущей практической деятельности [6, с. 180]. Практические задачи с профессионально ориентированным содержанием, решаемые в курсе математики, способствуют повышению интереса студентов к математике и выбранному направлению подготовки, а также учат применять полученные математические знания в профессиональной деятельности.

### Список литературы

1. *Афонин П. Н.* Таможенная статистика : учебное пособие. СПб. : Интермедия, 2012. 153 с.
2. *Воронцова Н. Д.* Статистика : учебное пособие : в 2 ч. Ч. 1. Киров : ВятГУ, 2015. 63 с.
3. *Ефимова М. Р.* Практикум по общей теории статистики : учеб. пособие / М. Р. Ефимова, О. И. Ганченко, Е. В. Петрова. М. : Финансы и статистика, 2003. 336 с.
4. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 543 с.
5. Практикум по социальной статистике : учеб. пособие / под ред. И. И. Елисеевой. М. : Финансы и статистика, 2002. 368 с.
6. *Чиркова Л. Н.* Значение элементов теории вероятностей и математической статистики при обучении специалистов таможенного дела // Математика и проблемы образования : мат-лы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Киров, 2022. С. 179–180.

## On power-law averages in the course of mathematics

Trefilova Elena Sergeevna<sup>1</sup>, Chirkova Larisa Nikolaevna<sup>2</sup>

<sup>1</sup>senior lecturer at the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.  
Russia, Kirov. E-mail: usr11265@vyatsu.ru

<sup>2</sup>PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics,  
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr11713@vyatsu.ru

**Abstract.** The proposed article discusses some issues of studying one of the topics of mathematical statistics – power averages – for the field of training "Customs", implemented at Vyatka State University. A brief analysis of the average values is given from the point of view of their application in classes with students of the "Customs business" direction. The article presents professionally directed practical tasks on the use of formulas for calculating power-law averages, which increase interest in mathematics and the chosen field of activity and develop the skills to apply the acquired knowledge in practice. The materials of the article may be of interest to teachers and students when studying mathematics and statistics courses.

**Keywords:** mathematics, mathematical statistics, averages, arithmetic mean, geometric mean, quadratic mean, harmonic mean, mode, median, professional orientation of teaching mathematics.

### References

1. *Afonin P. N.* *Tamozhennaya statistika : uchebnoe posobie* [Customs statistics : textbook]. SPb. IC Intermedia. 2012. 153 p.
2. *Voroncova N. D.* *Statistika : uchebnoe posobie : v 2 ch. Ch. 1* [Statistics : textbook : in 2 parts. Part 1]. Kirov. VyatSU. 2015. 63 p.
3. *Efimova M. R.* *Praktikum po obshchej teorii statistiki : ucheb. posobie* [Workshop on the general theory of statistics : study guide] / M. R. Efimova, O. I. Ganchenko, E. V. Petrova. M. Finansy i Statistika (Finance and Statistics). 2003. 336 p.
4. *Kremer N. Sh.* *Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika : uchebnik dlya vuzov* [Probability theory and mathematical statistics : textbook for universities]. M. UNITY-DANA. 2002. 543 p.
5. *Praktikum po social'noj statistike : ucheb. posobie* – Workshop on social statistics : study guide / ed. by I. I. Eliseeva. M. Finansy i Statistika (Finance and Statistics). 2002. 368 p.
6. *Chirkova L. N.* *Znachenie elementov teorii veroyatnostej i matematicheskoy statistiki pri obuchenii specialistov tamozhennogo dela* [The importance of elements of probability theory and mathematical statistics in the training of customs specialists] // *Matematika i problemy obrazovaniya : mat-ly 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminaru prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov* – Mathematics and problems of education : materials of the 41st International Scientific Seminar of teachers of mathematics and computer science of universities and pedagogical universities. Kirov. 2022. Pp. 179–180.