

## Компьютерное моделирование изотомического отображения для данного треугольника

**Совертков Петр Игнатьевич**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии,  
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,  
Россия, г. Санкт-Петербург. E-mail: psovertkov@mail.ru

**Аннотация.** Изотомическое отображение определено конструктивно, т. е. после построения точки пересечения одной тройки отрезков и построения тройки пересечения новой тройки отрезков, появляется изотомически соответствующая точка. В статье рассмотрено математическое и компьютерное моделирование изотомического отображения двумя способами: с помощью декартовых координат и используя барицентрические координаты. Аналитическое задание закона отображения позволяет быстро построить соответствующую пару точек и находить образ линии при изотомическом соответствии.

**Ключевые слова:** изотомическое отображение, барицентрические координаты.

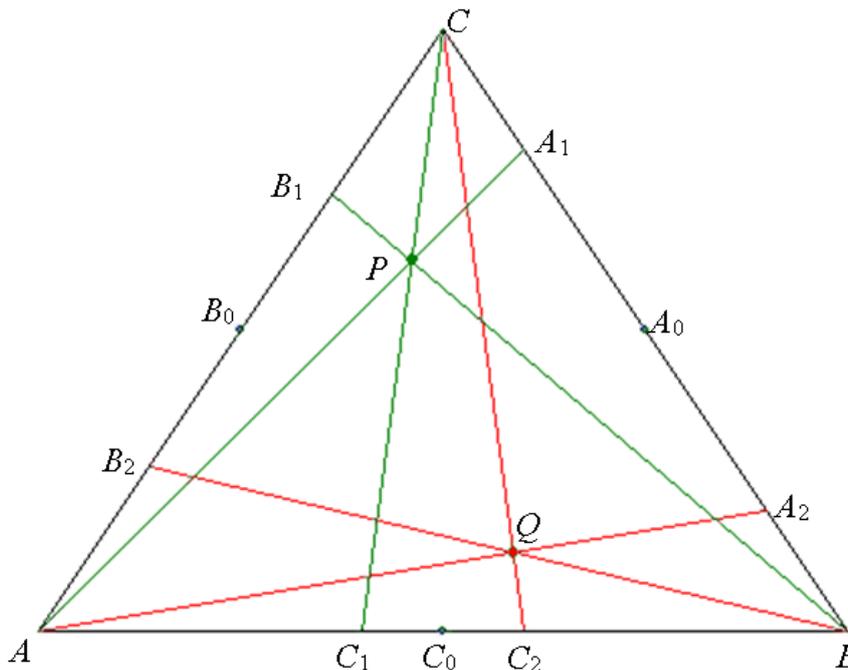


Рис. 1. Произвольный треугольник  $ABC$

**Постановка задачи.** Пусть в произвольном треугольнике  $ABC$  проведены отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , где  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in AC$ ,  $C_1 \in AB$ , пересекающиеся в точке  $P$  (рис. 1). Построим точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , симметричные соответственно точкам  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , относительно середин отрезков  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , тогда отрезки  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  также пересекаются в одной точке  $Q$ . Точка  $Q$  называется изотомически сопряженной точке  $P$ . Аналогично, точка  $P$  является изотомически сопряженной точке  $Q$ . Эти две точки называются изотомически сопряженными относительно данного треугольника и говорят, что точка  $P$  изотомически отображается в точку  $Q$  относительно треугольника  $ABC$  [2, с. 66; 3, с. 115].

Если отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  являются медианами треугольника, то точки  $P$  и  $Q$  совпадают и являются центром тяжести треугольника.

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке  $J$  (рис. 2), называемой точкой Жергонна [1, с. 4].

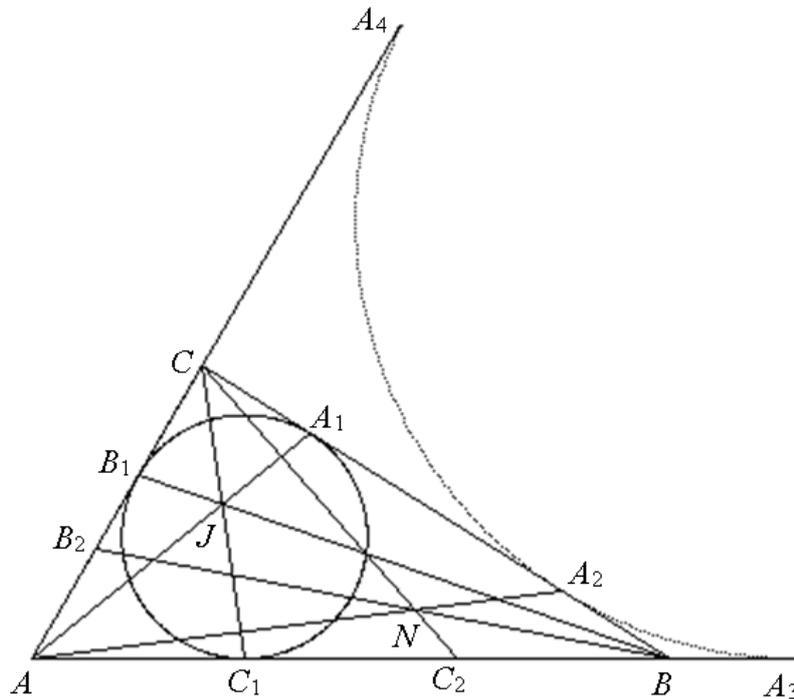


Рис. 2. Иллюстрация отрезков на треугольнике  $ABC$

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания внеписанных окружностей, пересекаются в одной точке  $N$  (рис. 2), называемой точкой Нагеля [1, с. 4].

Точка Жергонна  $J$  и точка Нагеля  $N$  изотомически сопряжены относительно треугольника, в котором они построены (рис. 2).

Изотомическое отображение оказывает на учащихся магическое воздействие, так как построив точку  $P$  как пересечение трех отрезков и применяя симметрию к этим отрезкам относительно медиан треугольников, мы снова получаем точку  $Q$  как пересечение трех отрезков. Утверждение легко доказывается на основании теоремы Чевы. То, что легко доказывается математически, учащийся проверяет, совершая определенную последовательность геометрических построений. Геометрические построения, как известно, выполняются теоретически строго на основании аксиом, а практически, при выполнении нескольких операций допускаются мелкие погрешности. Учитель в этом случае спасает создавшуюся ситуацию словами – «а по теореме Чевы вновь построенные отрезки должны пересечься в одной точке».

Построения на компьютере априори являются относительно точными, так как перед построением точек координаты этих точек округляются до ближайших целых чисел, потому что экран компьютера представляет целочисленную систему координат занумерованных пикселей. Но парадокс заключается в том, что чертеж на экране в большинстве случаев является более качественным, по сравнению с чертежом, выполненным геометрическими инструментами. Если компьютерное моделирование использует геометрические параметры, то повторить чертеж на компьютере для другого расположения исходной точки можно в десятки, сотни, а иногда и тысячи раз быстрее. Велика роль компьютерного моделирования, если требуется отразить связь между параметрами.

Ради справедливости следует отметить и пользу построения чертежа геометрическими инструментами для укладки геометрического факта в долговременную память человека.

В предлагаемой статье рассматривается математическое и компьютерное моделирование произвольного треугольника. Для трех произвольных отрезков, которые пересекаются в одной точке и каждый из которых выходит из вершины треугольника, заданы два отношения на сторонах треугольника. Эти отношения полностью определяют положение указанных отрезков. Определяются декартовы и барицентрические координаты точек  $P$  и  $Q$ . Если точка  $P$  движется по некоторой траектории, то указан алгоритм построения траектории точки  $Q$  при изотомическом отображении.

**Метод использования декартовых координат.** При определении координат точек будем использовать (рис. 3) теорему о пропорциональных отрезках [5, с. 120; 6, с. 64].

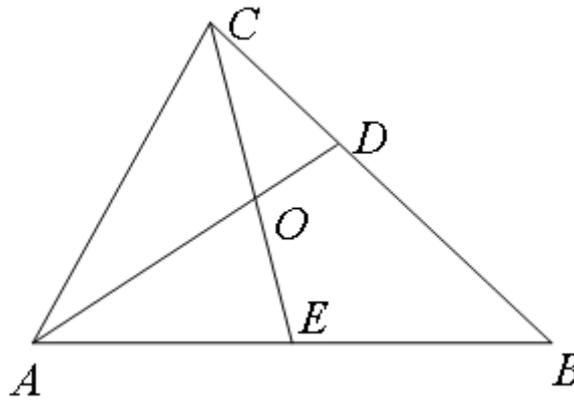


Рис. 3. Треугольник ABC

Пусть  $\frac{CD}{DB} = \frac{m}{n}, \frac{BE}{EA} = \frac{p}{q}, CE \cap AD = O$ , тогда  $\frac{CO}{OE} = \frac{m}{n} \left( \frac{p}{q} + 1 \right)$ .

Целью математического и компьютерного моделирования изотомического отображения является задание первоначальных параметров точки  $P$  для нахождения координат точки  $Q$ . Для установления функциональной зависимости будем считать, что заданы координаты вершин  $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$  треугольника и отношений  $u, v$ , в которых точка  $A_1$  делит отрезок  $CB$  и точка  $C_1$  делит отрезок  $BA$ , т. е.  $CA_1 : A_1B = u, BC_1 : C_1A = v$ . Эти отношения полностью определяют положение точки  $P$ .

Используя теорему Чевы для трех отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$ , пересекающихся в одной точке,

находим  $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{uv}$ .

Для координат точек  $A_1, B_1, C_1$  соответственно получаем (рис. 1):

$$x_{a1} = \frac{x_c + ux_b}{1 + u}, y_{a1} = \frac{y_c + uy_b}{1 + u}, x_{c1} = \frac{x_b + vx_a}{1 + v}, y_{c1} = \frac{y_b + vy_a}{1 + v}$$

$$x_{b1} = \frac{uvx_a + x_c}{1 + uv}, y_{b1} = \frac{uvy_a + y_c}{1 + uv}.$$

Точка  $P$  делит отрезок  $CC_1$  в отношении  $CP : PC_1 = u(v + 1)$ , поэтому

$$x_p = \frac{x_c + u(x_b + vx_a)}{1 + u + uv}, y_p = \frac{y_c + u(y_b + vy_a)}{1 + u + uv}. \tag{1}$$

Точки  $A_2, B_2, C_2, Q$  имеют координаты

$$x_{a2} = \frac{x_b + ux_c}{1 + u}, y_{a2} = \frac{y_b + uy_c}{1 + u}, x_{c2} = \frac{x_a + vx_b}{1 + v}, y_{c2} = \frac{y_a + vy_b}{1 + v},$$

$$x_{b2} = \frac{uvx_c + x_a}{1 + uv}, y_{b2} = \frac{uvy_c + y_a}{1 + uv}.$$

$$x_q = \frac{x_a + v(x_b + ux_c)}{1 + v + uv}, y_q = \frac{y_a + v(y_b + vy_c)}{1 + v + uv}. \tag{2}$$

Представленное выше моделирование является наглядным для фиксированной точки  $P$ , определяемой как пересечение трех отрезков.

Если точка  $P$  движется по некоторой линии  $\gamma$ , то координаты точки  $P$  изменяются, и тогда сложно указать зависимости для отношений  $u, v$  на сторонах треугольника. В этом случае вместо отношений  $u, v$  исходными параметрами должны быть координаты точки  $P$ . Из формул (1) выразим

параметры  $u, v$ :  $v = \frac{x_p(y_b - y_c) + y_p(x_c - x_b) + x_b y_c - x_c y_b}{x_p(y_c - y_a) + y_p(x_a - x_c) + x_c y_a - x_a y_c}, u = \frac{x_c - x_p}{v(x_p - x_a) + x_p - x_b}$ .

Подставляя параметры в формулы (2), получим координаты точки  $Q$ , т. е. координаты точки при изотомическом отображении.

На рис. 4 точка  $P$  движется по окружности  $\gamma$ , а ее образ  $Q$  при изотомическом отображении движется по линии  $\gamma_1$ .

Для компьютерного моделирования можно использовать язык Pascal ABC [4, с. 18–51]. Компьютерная программа построения (рис. 4):

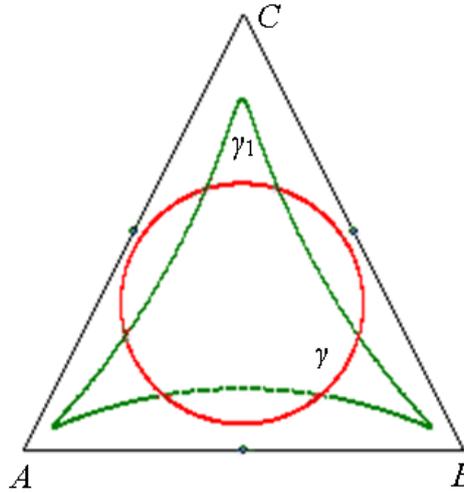


Рис. 4. Треугольник ABC

```

Uses GraphABC; Var x0,y0,xa,ya,xb,yb,xc,yc,i,j:Integer;
xa1,ya1,xb1,yb1,xc1,yc1,xa2,ya2,xb2,yb2,xc2,yc2,xp,yp,xq,yq,u,v,R:real; Begin
x0:=100; y0:=360; xa:=0; ya:=0; xb:=200; yb:=0; xc:=100; yc:=200;
{точка отсчета и координаты вершин}
R:=55; {радиус окружности}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xb,y0-yb); {сторона треугольника AB}
Line (x0+xb,y0-yb,x0+xc,y0-yc); {сторона треугольника BC}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xc,y0-yc); {сторона треугольника AC}
For i:=0 To 628 Do Begin
xp:=(xa+xb+xc)/3+R*cos(i/100); yp:=(ya+yb+yc)/3+R*sin(i/100);
v:=(xp*(yb-yc)+yp*(xc-xb)+xb*yc-xc*yb)/(xp*(yc-ya)+yp*(xa-xc)+ya*xc-xa*yc);
u:=(xc-xp)/(v*xp+xp-v*xa-xb); {отношения на сторонах CB и BA}
xa1:=(xc+u*xb)/(1+u); ya1:=(yc+u*yb)/(1+u); {координаты точки A1}
xc1:=(xb+v*xa)/(1+v); yc1:=(yb+v*ya)/(1+v); {координаты точки C1}
xb1:=(u*v*xa+xc)/(u*v+1); yb1:=(u*v*ya+yc)/(u*v+1);
xa2:=(u*xc+xb)/(u+1); ya2:=(u*yc+yb)/(u+1); {координаты точки A2}
xc2:=(v*xb+xa)/(v+1); yc2:=(v*yb+ya)/(v+1); {координаты точки C2}
xb2:=(u*v*xc+xa)/(u*v+1); yb2:=(u*v*yc+ya)/(u*v+1);
xq:=(u*v*xc+xa+xb*v)/(u*v+v+1); yq:=(u*v*yc+ya+yb*v)/(u*v+v+1);
SetPenColor(clRed);Circle(x0+round(xp),y0-round(yp),1);
Circle(x0+round((xa+xb+xc)/3), y0-round((ya+yb+yc)/3),2);
SetPenColor(clGreen);Circle(x0+round(xq),y0-round(yq),1);
For j:=0 To 400000 Do Begin End;{цикл задержки}End;
Circle(x0+round((xa+xb)/2), y0-round((ya+yb)/2),2);{середины сторон}
Circle(x0+round((xb+xc)/2), y0-round((yb+yc)/2),2);
Circle(x0+round((xa+xc)/2), y0-round((ya+yc)/2),2);
FloodFill(x0+round((xa+xb)/2), y0-round((ya+yb)/2),clBlue);
FloodFill(x0+round((xa+xc)/2), y0-round((ya+yc)/2),clBlue);
FloodFill(x0+round((xb+xc)/2), y0-round((yb+yc)/2),clBlue); End.

```

Используем барицентрические координаты [1, с. 26; 6, с. 379] для второго, более простого метода моделирования изотомического отображения.

**Метод использования барицентрических координат.** Вначале приведем несколько отношений для точки внутри треугольника (рис. 5).

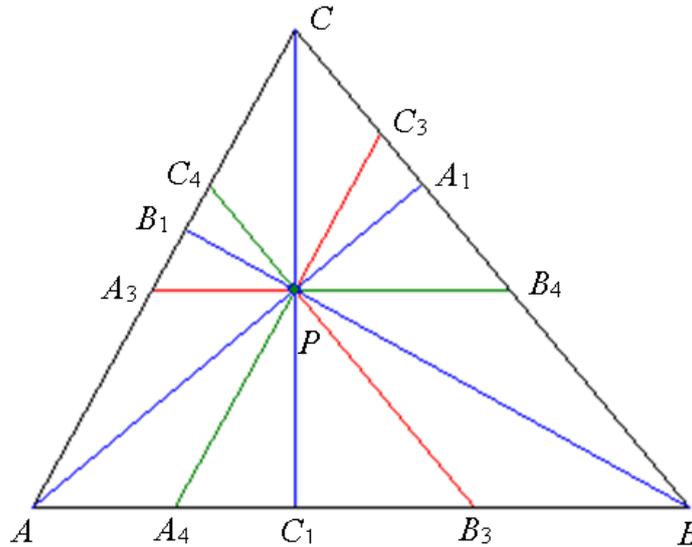


Рис. 5. Треугольник ABC

Для трех отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$ , где  $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$ , пересекающиеся в точке  $P$ , по теореме Жергонна [5, с. 137] выполняются равенства:

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = 1, \quad \frac{AP}{AA_1} + \frac{BP}{BB_1} + \frac{CP}{CC_1} = 2.$$

Используя теорему Жергонна и подобие треугольников, легко доказываются равенства в следующей теореме.

Теорема. Пусть через точку  $P$  проведены прямые  $A_3B_4, B_3C_4, C_3A_4$ , параллельные сторонам треугольника (рис. 5), тогда выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \frac{A_3B_4}{AB} + \frac{C_3A_4}{CA} + \frac{B_3C_4}{BC} &= 2 = \frac{CB_4}{CB} + \frac{BA_4}{BA} + \frac{AC_4}{AC}, \\ \frac{CA_3}{CA} + \frac{AB_3}{AB} + \frac{BC_3}{BC} &= 2, \quad \frac{A_4B_3}{AB} + \frac{B_4C_3}{BC} + \frac{C_4A_3}{CA} = 1, \\ \frac{AA_4}{AB} + \frac{BB_4}{BC} + \frac{CC_4}{CA} &= 1, \quad \frac{AA_3}{AC} + \frac{CC_3}{CB} + \frac{BB_3}{BA} = 1. \end{aligned}$$

Для произвольной точки  $P$  внутри треугольника справедливы следующие разложения векторов:

$$\vec{AP} = \frac{AA_4}{AB} \vec{AB} + \frac{AA_3}{AC} \vec{AC}, \quad \vec{BP} = \frac{BB_3}{BA} \vec{BA} + \frac{BB_4}{BC} \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \frac{CC_4}{CA} \vec{CA} + \frac{CC_3}{CB} \vec{CB}.$$

По теореме Фалеса выполняются равенства

$$\frac{AA_4}{AB} = \frac{CC_3}{CB}, \quad \frac{AA_3}{AC} = \frac{BB_4}{BC}, \quad \frac{BB_3}{BA} = \frac{CC_4}{CA}.$$

На основании предыдущих равенств конструктивно вводятся барицентрические координаты точки  $P(p:q:r)$  из равенств:

$$\vec{AP} = q \vec{AB} + r \vec{AC}, \quad \vec{BP} = p \vec{BA} + r \vec{BC}, \quad \vec{CP} = p \vec{CA} + q \vec{CB},$$

причем выполняется равенство  $p + q + r = 1$ .

На рис. 6 представлены барицентрические координаты всех точек и уравнения прямых в барицентрических координатах. Для моделирования любой линии и ее образа при изотомическом отображении применяем следующую последовательность действий:

- 1) составить параметрические уравнения линии для произвольной точки  $P(x_p, y_p)$  в декартовых координатах;
- 2) найти барицентрические координаты этих точек  $P$  и  $Q$ ;
- 3) построить эти точки в декартовой системе координат.

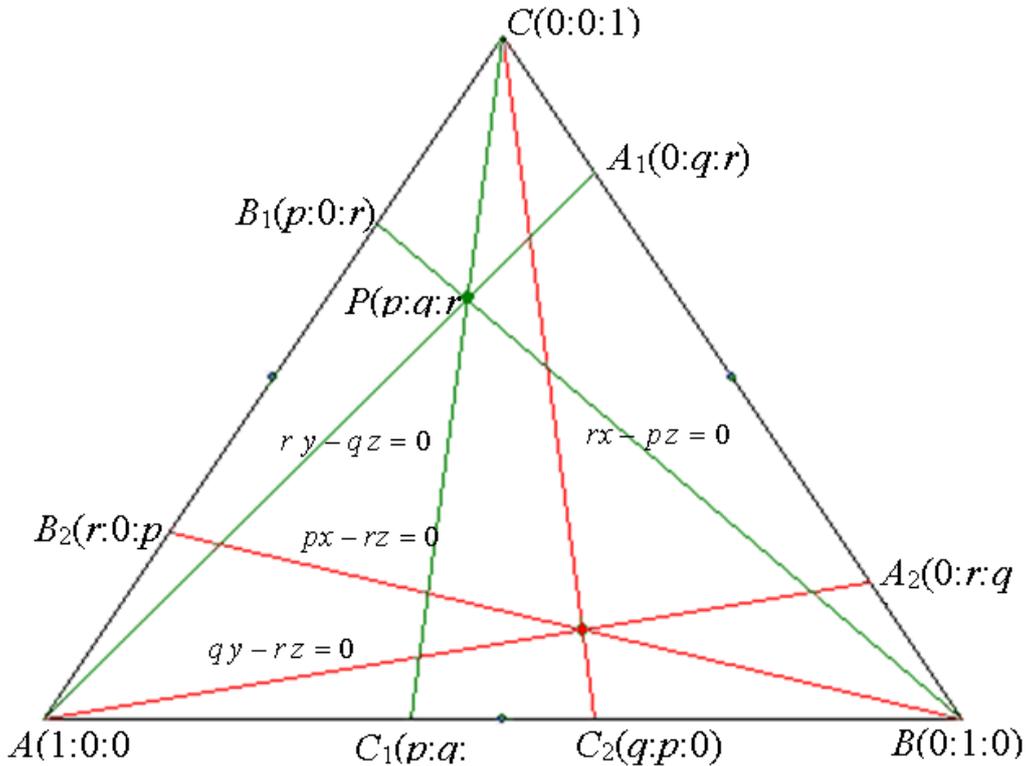


Рис. 6. Треугольник ABC

Пусть известны декартовы координаты точки  $x_p, y_p$  точки  $P$ , тогда используя равенство  $AP = qAB + rAC$ , получаем систему уравнений

$$qx_b + rx_c = x_p, \quad qy_b + ry_c = y_p.$$

Барицентрические координаты точки  $P$ :

$$q = (x_p y_c - y_p x_c) / (x_b y_c - y_b x_c),$$

$$r = (x_b y_p - y_b x_p) / (x_b y_c - y_b x_c), \quad p = 1 - q - r.$$

Например, для окружности с центром в точке пересечения медиан треугольника используем равенства

$$x_s = (x_a + x_b + x_c) / 3, \quad y_s = (y_a + y_b + y_c) / 3, \quad x_p = x_s + r_s \cos t, \quad y_p = y_s + r_s \sin t.$$

Следующая компьютерная программа снова строит рисунок 4.

```
Uses GraphABC;
Var x0,y0,b,c,xa,ya,xb,yb,xc,yc,rs,i,j:Integer;
p,q,r,s,xa1,ya1,xb1,yb1,xc1,yc1,xa2,ya2,xb2,yb2,xc2,yc2,xp,yp,xq,yq,xs,ys:real; Begin
x0:=100; y0:=360; xa:=0; ya:=0; xb:=200; yb:=0; xc:=100; yc:=200; rs:=55;
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xb,y0-yb); {сторона AB}
Line (x0+xb,y0-yb,x0+xc,y0-yc); {сторона BC}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xc,y0-yc); {сторона AC}
xs:=(xa+xb+xc)/3; ys:=(ya+yb+yc)/3;
For i:=0 To 628 Do Begin {построение окружности и ее образа}
xp:=xs+rs*cos(i/100); yp:=ys+rs*sin(i/100);
q:=(xp*yc-yp*xc)/(xb*yc-yb*xc); r:=(xb*yp-yb*xp)/(xb*yc-yb*xc);
PutPixel(x0+round(xp),y0-round(yp),clRed);
p:=1-q-r; s:=q*r+p*r+p*q;
xq:=(q*r*xa+p*r*xb+p*q*xc)/s; yq:=(q*r*ya+p*r*yb+p*q*yc)/s;
PutPixel(x0+round(xq),y0-round(yq),clGreen);
For j:=1 To 100000 Do Begin End;End; End.
```

Напоминаем, что изотомическое отображение определено для точек, расположенных внутри треугольника.

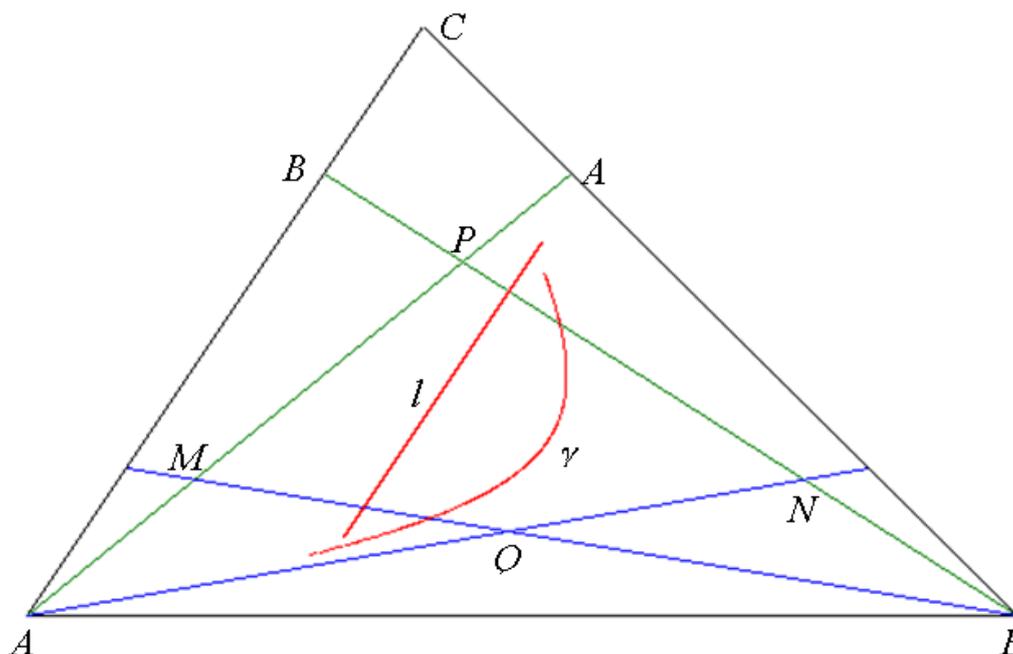


Рис. 7. Треугольник ABC

При изотомическом отображении точки прямой, проходящей через вершину треугольника, отображаются в точки прямой, проходящей через эту же точку. Например, точки отрезка  $PM$  (рис. 7) в точки отрезка  $QN$ , а отрезок  $PN$  в отрезок  $QM$ , но образом отрезка  $l$  на прямой, не проходящей через вершину треугольника, является линия  $\gamma$ .

#### Список литературы

1. Мякишев А. Г. Элементы геометрии треугольника. М. : МЦНМО, 2002. 32 с.
2. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. М. : МЦНМО, 2004. 312 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1. М. : Наука, 1995.
4. Совертков П. И. Компьютерное моделирование. СПб. : Лань, 2023. 424 с.
5. Совертков П. И. Олимпиадная подготовка и моделирование по математике. СПб. : Лань, 2022. 400 с.
6. Совертков П. И. Справочник по элементарной математике : учебное пособие. СПб. : Лань, 2018. 404 с.

## Computer simulation of an isotomic mapping for a given triangle

**Sovertkov Peter Ignatievich**

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Geometry, Russian State Pedagogical University n. a. A. I. Herzen. Russia, St. Petersburg. E-mail: psovertkov@mail.ru

**Abstract.** The isotomic mapping is defined constructively, i. e. after constructing the intersection point of one triple of segments and constructing the intersection point of a new triple of segments, an isotomically corresponding point appears. The article considers mathematical and computer modeling of an isotomic mapping in two ways: using Cartesian coordinates and using barycentric coordinates. The analytical definition of the mapping law allows you to quickly construct the corresponding pair of points and find the image of the line with an isotomic match.

**Keywords:** isotomic mapping, barycentric coordinates.

#### References

1. Myakishev A. G. *Elementy geometrii treugol'nika* [Elements of triangle geometry]. M. ICNMO, 2002. 32 p.
2. Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya. T. 1* [Elementary geometry. Vol. 1]. M. ICNMO, 2004. 312 p.
3. Prasolov V. V. *Zadachi po planimetrii. Ch. 1* [Problems in planimetry. Part 1]. M. Nauka (Science), 1995.
4. Sovertkov P. I. *Komp'yuternoe modelirovanie* [Computer modeling]. SPb. Lan' (Deer), 2023. 424 p.
5. Sovertkov P. I. *Olimpiadnaya podgotovka i modelirovanie po matematike* [Olympiad preparation and modeling in mathematics]. SPb. Lan' (Deer), 2022. 400 p.
6. Sovertkov P. I. *Spravochnik po elementarnej matematike : uchebnoe posobie* [Handbook of elementary mathematics : textbook]. SPb. Lan' (Deer), 2018. 404 p.