УДК 511.11 DOI 10.25730/VSU.0536.24.008

Числовые системы как основание теории чисел

Вечтомов Евгений Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются и анализируются различные подходы к определению и изучению основных числовых систем. Подчеркивается, что числовые системы натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел и действительных чисел выступают в качестве основания для изучения теории чисел и теоретико-числовых исследований.

Ключевые слова: основные числовые системы, изучение числовых систем, теория чисел.

Введение. В элементарной теории чисел – помимо натуральных чисел (N) и целых чисел (Z) – рассматриваются и применяются рациональные числа (Q) и действительные числа (R). В частности, важную роль играют такие числовые функции, как абсолютная величина, целая часть и дробная часть действительных чисел.

Основные числовые системы N, Z, Q, R уникальны (с точностью до изоморфизма они единственны) и в то же самое время универсальны в применениях как в самой математике и других науках, так и в практических приложениях.

Теория числовых систем выросла из недр арифметики на методической базе абстрактной алгебры и математического анализа [12]. А сами числовые системы служат надежной содержательной основой развития современной теории чисел, а также дальнейшего развития алгебры и анализа.

В этой статье мы последовательно изложим содержательные определения и свойства числовых систем $N\subset Z\subset Q\subset R$, которые являются основанием и обоснованием строгого и систематического изучения теории чисел.

Доступно и содержательно основные числовые системы изложены в известных книгах И. В. Арнольда [1] и И. В. Проскурякова [11], в статье В. И. Игошина [5].

Последовательно рассмотрим эти основные числовые системы.

1. Система натуральных чисел. Натуральные числа составляют фундамент всей математики: являются истоком и источником становления и развития числовой линии в математической науке и в математическом образовании; фундируют мощное арифметико-алгебраическое направление функционирования современной математики; служат числовой базой построения, посредством координатизации, классических геометрий – евклидовой, проективной, геометрии Лобачевского.

Мы с детства воспринимаем натуральные числа опредмеченно, интуитивно. В школе даются и формулируются свойства натуральных чисел на содержательном уровне. Такой подход можно назвать *содержательно-интуитивным*.

В вузе в курсе числовых систем натуральный ряд определяется аксиоматически, скажем, как система Пеано [1, параграфы 17, 18; 3; 12, параграф 3.1]. Это *содержательно-аксиоматическое* определение системы натуральных чисел.

Напомним аксиоматическое определение системы Пеано. Первичные понятия: «множество N», «отображение $'\colon N\to N$», «элемент 1 из N». Таким образом, на множестве N заданы унарная операция $'$ и нульарная операция выделения элемента 1. В результате получается алгебраическая структура $\langle N, ', 1\rangle$ сигнатуры $\{', 1\}$ типа (1, 0).

Алгебраическая структура $\langle N, ', 1\rangle$ называется *системой Пеано*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

© Вечтомов Евгений Михайлович, 2024

P1. $n'\neq 1$ для каждого $n \in N$.

P2. $m'=n' \Rightarrow m=n$ для любых m, $n \in N$.

P3. Для любого подмножества M в N: если 1) $1\in M$ и 2) $n\in M \Rightarrow n'\in M$ для каждого $n\in N$, то $M=N$.

Прокомментируем приведенное определение.

Интуитивно 1 – «первое» натуральное число, а операция ' означает «взятие следующего числа» $n'=n+1$. Аксиома P1 утверждает, что у 1 нет «предшествующего элемента». Аксиома P2 показывает, что «отображение ': $N\to N$» переводит различные числа в различные. Аксиома P3 – это *аксиома индукции*, алгебраический смысл которой состоит в том, что система Пеано не имеет собственных подсистем.

Предполагается непротиворечивость аксиоматики Пеано: существует хотя бы одна система Пеано. Доказывается, что любые две системы Пеано изоморфны [12, теорема 3.4]. Тем самым можно зафиксировать одну из изоморфных систем Пеано, обозначить ее N и назвать *натуральным рядом*, а элементы из N – *натуральными числами*.

В работе [3] на произвольной системе Пеано $\langle N, ', 1\rangle$ непосредственно вводится отношение порядка, что позволяет доказать общую теорему об индуктивных построениях [3; 12, теорема 3.4].

Теорема об индуктивных построениях. Пусть даны произвольное множество X, элемент $x_0\in X$ и некоторая функция g: $X\times N\to X$. Тогда существует однозначно определенная функция f: $N\to X$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношениям:

1) $f(1)=x_0$ (начальное условие);

2) $f(n')=g(f(n), n)$ для каждого $n\in N$ (индуктивное условие).

На основании этой теоремы на N индуктивно определяются операции сложения и умножения (Герман Грассман, 1861 г.) и доказываются их арифметические свойства [1, параграфы 19–21; 3; 12, параграф 3.2].

Сложение. В N существует однозначно определенная бинарная операция сложения +, удовлетворяющая следующим соотношениям:

1) $m+1=m'$ для всех $m\in N$;

2) $m+n'=(m+n)'$ для всех m, $n\in N$.

Умножение. В N существует единственная бинарная операция умножения $\cdot$, обладающая следующими свойствами:

1) $m\cdot 1=m$ для любого $m\in N$;

2) $m\cdot n'=m\cdot n+m$ для любых m, $n\in N$.

*Свойства сложения и умножения***.** Для любых k, m, $n\in N$ верны соотношения:

1. $(k+m)+n=k+(m+n)$, $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot(m\cdot n)$ (ассоциативность операций).
2. $m+n=n+m$, $m\cdot n=n\cdot m$ (коммутативность операций).
3. $(k+m)\cdot n=k\cdot n+m\cdot n$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).
4. $k+m=k+n \Rightarrow m=n$, $k\cdot m=k\cdot n \Rightarrow m=n$ (законы сократимости).
5. $m< n \Leftrightarrow n=m+l$ для некоторого $l\in N$ (взаимосвязь порядка со сложением).

После этого можно систематически развить всю теорию натурального ряда N [12, глава 3].

Также аксиоматика Пеано может быть представлена как формальная аксиоматическая теория натурального ряда, когда содержательная теория излагается на формальном языке математической логики [9, глава 3]. Такой подход можно назвать формально-аксиоматическим.

Мы исповедуем содержательный подход, при котором система N натуральных чисел есть линейно упорядоченное полукольцо $\langle N, +, \cdot, \leq, 1\rangle$ с определенными дополнительно постулируемыми условиями.

Определим используемые здесь понятия и укажем упомянутые дополнительные условия.

Во-первых, N – это алгебраическая структура, являющаяся коммутативным полукольцом $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ с единицей 1 и законами сокращения, то есть алгебра с коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения + и умножения $\cdot$, дистрибутивного относительно сложения ($x(y+z)=xy+xz$ тождественно), нейтральным по умножению элементом 1 ($x1=x$ тождественно) и квазитождествами $x+y=x+z \Rightarrow y=z$, $xy=xz \Rightarrow y=z$.

Во-вторых, N – это вполне упорядоченное множество $\langle N, \leq, 1\rangle$ с наименьшим элементом 1, без наибольшего элемента и в котором любой начальный отрезок $[1, n]=\{m\in N\colon m\leq n\}$, $n\in N$, конечен (как множество).

В-третьих, отношение порядка $\leq$ сохраняется при сложении и умножении, то есть в N выполняются импликации $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$ и $x\leq y \Rightarrow xz\leq yz$ для любых $x, y, z\in N$.

Напомним, что упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Очевидно, что всякое вполне упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ будет *линейно упорядоченным*: $\forall x, y\in X\ (x\leq y \vee y\leq x)$.

По определению, для натурального ряда N имеет место

Принцип наименьшего элемента (ПНЭ). Каждое непустое множество натуральных чисел содержит наименьшее (в себе) число.

В натуральном ряду N для каждого числа n число $n+1>n$ является *следующим* за n числом, то есть между числами n и $n+1$ нет других чисел.

Кроме того, для любого натурального числа $n\neq 1$ существует *предыдущее* число m, для которого $n=m+1$. В самом деле, отрезок $[1, n]$ является конечным линейно упорядоченным множеством натуральных чисел $\{1, 1+1, 1+1+1, \ldots, n\}$. Поэтому множество $[1, n]\setminus\{n\}$ имеет наибольший элемент m, и $m+1=n$.

Рассмотрим бесконечную последовательность A чисел

$$1< 1+1< 1+1+1< 1+1+1+1< \ldots .$$

Этими суммами единиц исчерпываются все натуральные числа, то есть множество A сумм единиц совпадает с N. Действительно, предположим от противного, что множество $N\setminus A$ не пусто. Тогда оно обладает наименьшим числом $m\neq 1$, не имеющим предшествующего элемента; получили противоречие. Тем самым любое натуральное число есть сумма числа 1 с самим собой конечное число раз. В обычной записи: $1< 2< 3< 4< \ldots< n< n+1< \ldots$ (рис. 1).

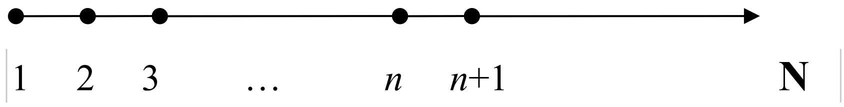


Рис. 1. Сумма числа 1 с самим собой конечное число раз

В системе N выполнение неравенства $m< n$ равносильно существованию единственного натурального числа k, для которого $m+k=n$; число k играет роль разности чисел n и m. Поэтому N допускает частичную операцию вычитания (если $m+k=n$, то $n-m=k$).

Возьмем в N произвольное множество M, такое, что $1\in M$ и для любого $n\in M$ верно $n+1\in M$. Значит, $A\subseteq M$, и, стало быть, $M=N$. Тем самым получаем

Принцип математической индукции (ПМИ). Пусть P – свойство натуральных чисел, такое, что верно P(1) и $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ для любого $n\in N$. Тогда P(n) верно для всех $n\in N$.

Отметим, что запись P(n) означает: число n обладает свойством P. Для доказательства ПМИ достаточно положить $M=\{n\in N: P(n)\}$.

ПНЭ приводит к следующей форме ПМИ:

Вторая форма ПМИ. Пусть свойство P натуральных чисел удовлетворяет условию: если $n\in N$ и из того, что P(m) верно для каждого натурального числа $m< n$, следует истинность P(n). Тогда P(n) верно для всех $n\in N$.

Заметим, что ПНЭ, ПМИ и вторая форма ПМИ часто и существенным образом применяются для доказательства различных утверждений о натуральных числах (и не только натуральных).

2. Система целых чисел. Каждая из числовых систем Z, Q, R определяется и строится, опираясь на предыдущую числовую систему.

Исторически система целых чисел рассматривалась как «двухсторонний натуральный ряд» $Z=N\cup\{0\}\cup(-N)$ с естественным образом определенными порядком и арифметическими операциями [1, параграфы 22, 23], превращающими Z в дискретно упорядоченное целостное кольцо.

Алгебраически система Z определяется и конструируется как *кольцо разностей полукольца* N, на которое соответствующим образом расширяется линейный порядок из N. Именно, на множестве $N\times N$ упорядоченных пар натуральных чисел определяются операции сложения + и умножения $\cdot$ и отношение эквивалентности ~: для любых $a, b, c, d\in N$

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac+bd, ad+bc),$$
$$(a, b)\sim(c, d) \Leftrightarrow a+d=b+c.$$

Мотивация введения таких формул заключается в том, что упорядоченная пара (a, b) натуральных чисел a и b моделирует их разность: $(a, b)\equiv a-b$. Алгебраическая структура $\langle N\times N, +, \cdot\rangle$ является полукольцом, а отношение эквивалентности ~ на $N\times N$ будет конгруэнцией на этом полукольце. Соответствующее полукольцо $(N\times N)/\sim$ и есть кольцо разностей полукольца N. Можно положить $Z=(N\times N)/\sim$. Здесь фактически применен метод пар (Гамильтон).

Линейно упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ называется *дискретно упорядоченным*, если каждый его ненаибольший элемент имеет последующий элемент, каждый его ненаименьший элемент имеет предыдущий элемент и все отрезки в X конечны. Отрезок в X – это множество вида $[x, y]=\{z\in X: x\leq z\leq y\}$, где $x, y\in X$ и $x\leq y$.

Итак, *системой* Z *целых чисел* можно назвать любое дискретно упорядоченное целостное кольцо. Все такие алгебраические системы изоморфны друг другу (рис. 2).

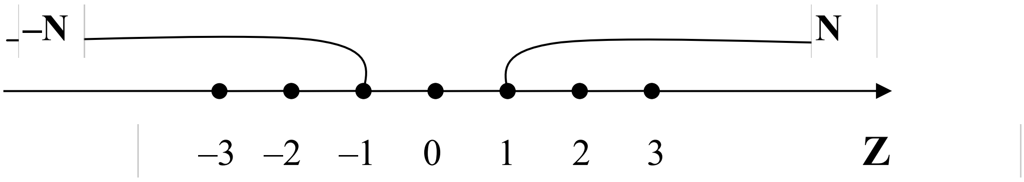


Рис. 2. Система Z целых чисел

Положительная часть Z – это множество $\{z\in \mathrm{Z}: 0< z\}$, равное множеству всевозможных сумм единиц 1, является упорядоченным подполукольцом в Z, изоморфным системе N натуральных чисел и отождествляемым нами с N. Множество $\{z\in \mathrm{Z}: z< 0\}$ совпадает с множеством $(-\mathrm{N})=\{-n\in \mathrm{Z}: n\in \mathrm{N}\}$. В результате и получается система $\mathrm{Z}=\mathrm{N}\cup\{0\}\cup(-\mathrm{N})$, в которой выполняются все обычные свойства сложения и умножения целых чисел. Скажем, справедливо правило знаков при умножении произвольных целых чисел a и b: $(-a)b=a(-b)= -(ab)$. Для любых m, $n\in \mathrm{N}$ имеем: $m< n \Leftrightarrow -n< -m$. Отношение порядка на Z согласовано с операциями сложения и умножения: для любых a, b, $c\in \mathrm{Z}$ имеем $a< b \Leftrightarrow a+c< b+c$ и $a< b \Leftrightarrow ac< bc$ при $c\in \mathrm{N}$.

Напомним понятие *абсолютной величины* $|a|$ целого числа a: $|a|=a$ при $a\geq 0$ и $|a|= -a$ при $a< 0$. Без оговорок будем пользоваться следующими двумя свойствами абсолютной величины ($\forall a$, $b\in \mathrm{Z}$): $|ab|=|a|\cdot|b|$ (мультипликативность) и $|a+b|\leq |a|+|b|$ (неравенство треугольника).

В кольце Z целых чисел выполняется теорема о делении с остатком, лежащая в основе классической теории делимости целых чисел. Из нее выводится другой основополагающий факт: в кольце Z каждый идеал главный, то есть Z является *кольцом главных идеалов*.

Теорема о делении с остатком. Для любых целого числа a и ненулевого целого числа b существуют однозначно определенные целое число q и неотрицательное целое число r< |b|, такие, что a=bq+r. При этом число q называется (неполным) частным от деления a на b, r – остатком.

Теорема о делении с остатком показывает, что кольцо Z является евклидовым кольцом.

Теорема об идеалах. Кольцо Z целых чисел является кольцом главных идеалов.

Докажем эту теорему. Требуется показать, что каждый идеал J кольца Z является главным, то есть $J=m\mathrm{Z}=\{mz: z\in \mathrm{Z}\}$ для некоторого целого числа m. Если $J=\{0\}$ – нулевой идеал, то $J=0\cdot\mathrm{Z}$. Пусть идеал J содержит ненулевое число z. Вместе с z идеал J содержит и противоположное число $-z$. Значит, J содержит некоторое натуральное число, то есть $J\cap\mathrm{N}\neq\varnothing$. В силу ПНЭ множество $J\cap\mathrm{N}$ имеет наименьший элемент m. Покажем, что $J=m\mathrm{Z}$. Включение $m\mathrm{Z}\subseteq J$ очевидно. Пусть $z\in J$. Разделим число z на число m с остатком: $z=mq+r$ при q, $r\in \mathrm{Z}$ и $0\leq r< m$. Число $r=z-mq$ принадлежит идеалу J. Поэтому в силу минимальности m, $r=0$. Откуда $z=mq\in m\mathrm{Z}$. Значит, $J\subseteq m\mathrm{Z}$. Стало быть, $J=m\mathrm{Z}$.

Заметим, что $(-m)\mathrm{Z}=m\mathrm{Z}$ для любого $m\in \mathrm{Z}$.

Сделаем несколько выводов из теоремы об идеалах.

(1) Любой ненулевой идеал кольца Z имеет вид $m\mathrm{Z}$ для единственного натурального числа m.

(2) Сумма любого непустого семейства идеалов кольца Z является главным идеалом в Z.

В частности, для любых целых чисел m_1, m_2, …, m_n ($n\in \mathrm{N}$), одновременно не равных 0, имеем:

$$m_1\mathrm{Z}+m_2\mathrm{Z}+\ldots+m_k\mathrm{Z}=d\mathrm{Z}$$

для единственного натурального числа d, являющегося НОД чисел m_1, m_2, …, m_n. Например, $12\mathrm{Z}+(-20)\mathrm{Z}+36\mathrm{Z}=4\mathrm{Z}$ и $4=12\cdot4+(-20)\cdot4+36\cdot1$.

(3) Пересечение любого непустого семейства идеалов кольца Z является главным идеалом в Z.

В частности, для любых ненулевых целых чисел m_1, m_2, …, m_n ($n\in \mathrm{N}$) верно равенство

$$m_1\mathrm{Z}\cap m_2\mathrm{Z}\cap\ldots\cap m_k\mathrm{Z}=k\mathrm{Z}$$

для единственного натурального числа k, являющегося НОК чисел m_1, m_2, …, m_n. Например, $12\mathrm{Z}\cap(-20)\mathrm{Z}\cap36\mathrm{Z}=180\mathrm{Z}$.

(4) Любая возрастающая относительно включения последовательность строго вложенных друг в друга идеалов кольца Z конечна.

Действительно, пусть дана строго возрастающая последовательность (конечная или бесконечная) $J_1\subset J_2\subset \ldots \subset J_n\subset \ldots$ идеалов кольца Z. Объединение J этих идеалов также будет идеалом в Z. Значит, $J=m\mathrm{Z}$ для какого-то числа m, которое принадлежит некоторому идеалу J_n. Откуда $J=J_n$. И мы получаем конечную цепочку идеалов $J_1\subset J_2\subset \ldots \subset J_n$. Заметим, что для каждого натурального числа $m\neq1$ последовательность $m\mathrm{Z}\supset m^2\mathrm{Z}\supset \ldots \supset m^n\mathrm{Z}\supset \ldots$ бесконечна (счетна).

(5) Максимальные идеалы кольца Z совпадают с идеалами pZ по всем простым числам p. Нулевой идеал является единственным простым немаксимальным идеалом в кольце Z.

3. Система рациональных чисел. Систему Q рациональных чисел можно определить как минимальное счетное (плотное) линейно упорядоченное поле (рис. 3). *Плотность* линейно упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ означает, что для любых двух элементов $x< y$ из X существует элемент $z\in X$, лежащий между x и y, т. е. $x< z< y$. Известно, что всякое счетное плотное линейно упорядоченное множество без наименьшего и наибольшего элементов изоморфно содержательно понимаемому линейно упорядоченному множеству всех рациональных чисел [6, с. 222].

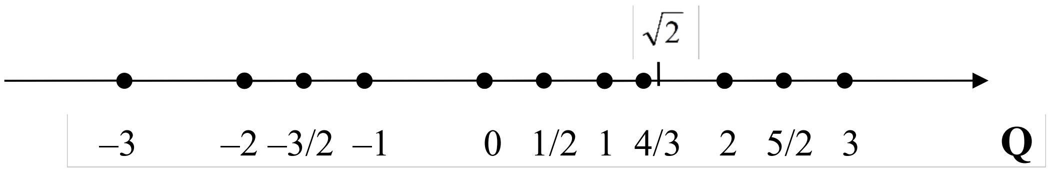


Рис. 3. Система Q рациональных чисел

Алгебраически система Q также определяется и строится как *поле частных кольца* Z с линейным порядком, продолжающим имеющийся на Z порядок. На множестве Z×N упорядоченных пар (a, b) чисел $a\in$ Z и $b\in$ N определяются операции сложения + и умножения · и отношение эквивалентности ~: для любых $a, c\in$ Z и $b, d\in$ N

$$(a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac, bd),$$
$$(a, b)\sim(c, d) \Leftrightarrow ad=bc.$$

Мотивация введения этих соотношений состоит в том, что упорядоченная пара (a, b) целого числа a и натурального числа b моделируется как их частное (дробь): $(a, b)\equiv a/b$. Отношение эквивалентности ~ на алгебраической структуре ⟨Z×N, +, ·⟩ является конгруэнцией, фактор-структура по которой и будет полем частных кольца Z. Полагаем Q=(Z×N)/~. Поле Q является минимальным полем нулевой характеристики (суммы единиц 1 не равны 0), то есть каждое поле нулевой характеристики содержит изоморфный образ поля Q в качестве подполя. Это также есть воплощение метода пар.

Содержательно линейно упорядоченное поле Q есть множество дробей $m/n=mn^{-1}$, где $m\in$ Z и $n\in$ N, со стандартными правилами сложения и умножения дробей, наделенное следующим порядком: $m/n\leq k/l \Leftrightarrow ml\leq nk$ в Z.

На поле Q определяется унарная операция – абсолютная величина рациональных чисел: $|m/n|=|m|/n$. Как и на кольце Z, абсолютная величина на поле Q обладает свойствами мультипликативности и неравенства треугольника.

4. Система действительных чисел. Приведем современное определение системы R действительных (вещественных) чисел. *Системой* R называется непрерывное линейно упорядоченное поле.

Поясним данное определение.

Пусть F – линейно упорядоченное поле. Его наименьшее подполе изоморфно полю Q. Поэтому можно считать, что Q$\subseteq F$. Говорят, что Q *плотно в F*, когда для любых элементов $a< b$ из F существует такое рациональное число q, что $a< q< b$. Поле F называется *архимедовым*, если в нем выполняется *аксиома Архимеда*: для любых $a> 0$ *и* b из F существует такое натуральное число n, что $b< na$.

Определим также понятие сечения. *Сечением* $A|B$ линейно упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ называется разбиение X на два непересекающихся непустых множества A и B, дающих в объединении X, при котором $x< y$ для любых $x\in A$ и $y\in B$. Элемент $r\in X$ называется *рубежом* сечения $A|B$, если $x\leq c\leq y$ при любых $x\in A$ и $y\in B$. Сечения могут иметь 0, 1 или 2 рубежа.

Сечение $A|B$ линейно упорядоченного множества X называется: *щелью*, если оно не имеет рубежа; *дедекиндовым*, если оно имеет ровно один рубеж, то есть либо A обладает наибольшим элементом, либо B – наименьшим; *скачком*, если оно имеет ровно два рубежа, то есть A обладает наибольшим элементом и B обладает наименьшим элементом.

Отметим, что дискретность линейно упорядоченного множества равносильна тому, что его сечения – скачки. Линейно упорядоченные множества ⟨N, ≤⟩ и ⟨Z, ≤⟩ – дискретно упорядоченные. Каждое сечение ⟨Q, ≤⟩ либо дедекиндово (рубежом служит рациональное число), либо является щелью (порождается иррациональным числом).

Мы принимаем без доказательства следующие два утверждения:

Утверждение 1. Для всякого линейно упорядоченного поля F эквивалентны следующие условия:

1) F архимедово;

2) в F для любого b> 0 найдется натуральное n, такое, что 1/n< b;

3) Q плотно в P.

Утверждение 2. Для любого линейно упорядоченного поля F эквивалентны следующие свойства:

1) F непрерывно по Вейерштрассу, то есть любое ограниченное сверху непустое подмножество в F обладает точной верхней гранью;

2) F полно по Дедекинду, то есть каждое сечение F дедекиндово;

3) F архимедово и любая последовательность вложенных друг в друга отрезков в F имеет непустое пересечение (непрерывна по Кантору);

4) F архимедово и все фундаментальные последовательности в F – сходящиеся (полнота по Кантору).

Линейно упорядоченное поле *F* называется *непрерывным*, если оно обладает одним из эквивалентных свойств утверждения 2.

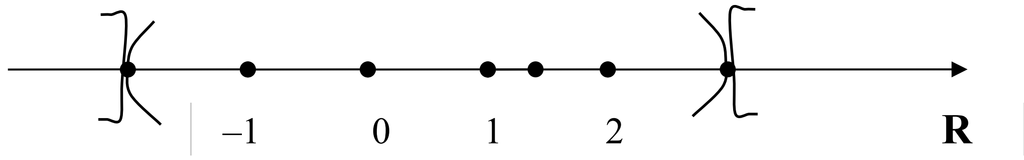


Рис. 4. Система R действительных чисел

Совершенно аналогично целым числам определяется абсолютная величина действительных чисел.

Дополнительно отметим, что поле R является формально вещественным замкнутым полем. Поле *P* называется *формально вещественным*, если элемент –1 не является суммой квадратов своих элементов. Формально вещественное поле *P* называется *формально вещественно замкнутым*, если оно не имеет собственных вещественных алгебраических расширений. Всякое формально вещественно замкнутое поле допускает единственное упорядочение, превращающее его в линейно упорядоченное поле. См. [8, глава XI].

Утверждение 3. Все положительные элементы линейно упорядоченного поля R являются квадратами, любой многочлен нечетной степени из R[x] имеет корень в R и каждое линейно упорядоченное алгебраическое расширение R совпадает с R.

Существует несколько подходов к построению системы R, исходя из системы Q. Укажем три главных подхода.

1. Подход Рихарда Дедекинда: действительные числа определяются как сечения линейно упорядоченного множества Q. При этом отождествляются сечения Q вида $(-\infty, q] | (q, \infty)$ и $(-\infty, q) | [q, \infty)$ для любого рационального числа q. На множестве всех таких сечений естественным образом вводятся операции сложения и умножения и отношение порядка. Можно проверить, что полученная алгебраическая система будет непрерывным линейно упорядоченным полем.

2. Подход Георга Кантора: под действительным числом понимается класс эквивалентности множества *K* всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Последовательности (q_n) и (p_n) называются *эквивалентными*, $(q_n)\sim(p_n)$, если $q_n-p_n\to 0$ при $n\to\infty$. Последовательности (q_n) и (p_n) складываются и умножаются почленно: $(q_n)+(p_n)=(q_n+p_n)$ и $(q_n)(p_n)=(q_np_n)$. Относительно этих операций множество *K* становится целостным кольцом, в котором множество *M* всех сходящихся к нулю последовательностей будет максимальным идеалом. Фактор-кольцо K/M является полем, на котором можно задать порядок, превращающий K/M в непрерывное линейно упорядоченное поле R. Отметим, что K/M и $K/\sim$ равны как множества, причем, $(q_n)+M$ есть класс эквивалентности последовательности $(q_n)\in K$. Заметим также, что R как метрическое пространство с метрикой-расстоянием $|a-b|$ между числами a и b является *полным метрическим пространством* (все фундаментальные последовательности в R сходятся), служащим *пополнением* своего метрического подпространства Q.

3. *Бесконечные десятичные дроби*. Наконец, можно определить действительные числа как бесконечные десятичные дроби. При этом бесконечную смешанную периодическую дробь следует отождествить с соответствующей конечной десятичной дробью, например, 3,1415(9)≡3,1416. Однако, проверка свойств арифметических операций над бесконечными десятичными дробями несколько трудоемка и щепетильна.

Отметим, что первоначально система действительных чисел была определена Шарлем Мерэ в 1869 году.

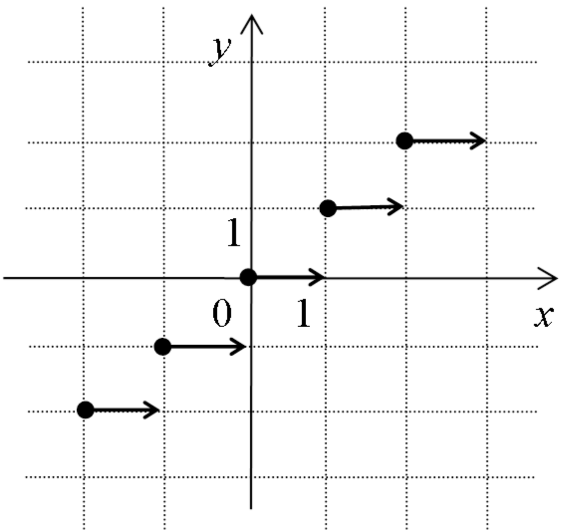
Сравнивая три перечисленных подхода к определению действительного числа, мы при изучении теории действительных чисел отдаем предпочтение подходу Кантора, хотя подходы 1 и 3 более наглядны и «осязаемы».

При подходе Кантора действительное число, определяемое довольно абстрактно, быстро становится элементом числовой алгебраической системы. По ходу изучения повторяются и используются такие важные понятия математического анализа, как числовая последовательность рациональных чисел, ее сходимость и фундаментальность, свойства операций над последовательностями. Применяются алгебраические понятия кольца и поля, идеала и фактор-кольца. Алгебра и анализ «работают сообща». Кроме того, подход Кантора продолжает методику построения целых чисел как классов эквивалентных пар натуральных чисел и построения рациональных чисел как классов эквивалентных пар целых чисел. Метод пар, развиваясь, превращается в метод последовательностей. Заметим также, что методом пар (удвоение по размерности) можно определить поле C комплексных чисел над R (Уильям Гамильтон) и тело H кватернионов над C (Гамильтон определил кватернионы как четверки действительных чисел в 1843 г.).

В заключение параграфа рассмотрим числовые функции $[\cdot]$: $R\to R$ и $\{\cdot\}$: $R\to R$ взятия, соответственно, целой части и дробной части действительного числа. *Целой частью* действительного числа x называется наибольшее целое число $[x]\leq x$, а его *дробной частью* называется действительное число $\{x\}=x-[x]$. Докажем существование целой части любого действительного числа x. Если число x – целое, то $[x]=x$ и $\{x\}=0$. Потому будем считать число x не целым. Предположим сначала, что $x>0$. В силу архимедовости R найдется натуральное число $n>x$. На основании ПНЭ среди таких чисел n существует наименьшее число m. Тогда $m-1<x<m$. Значит, $[x]=m-1$. Пусть теперь $x<0$. Откуда $-x>0$. По доказанному, $m-1<-x<m$ для подходящего натурального числа m. Поэтому $-m<x<1-m$. Получаем $[x]=-m$.

Итак, для любого действительного числа x имеем $x=[x]+\{x\}$. Ясно, что $0\leq\{x\}<1$. Если $x=q+r$, где $q\in Z$ и $r\in[0, 1)$, то $q=[x]$ и $r=\{x\}$. Это означает единственность представления каждого действительного числа в виде суммы целого числа и числа из промежутка [0, 1). Следовательно, каждое действительное число x принадлежит единственному полусегменту $[q, q+1)$ при $q=[x]$. И мы получаем следующее

Утверждение 4. Числовая прямая R есть дизъюнктное объединение полусегментов [q, q+1) по различным целым числам q.



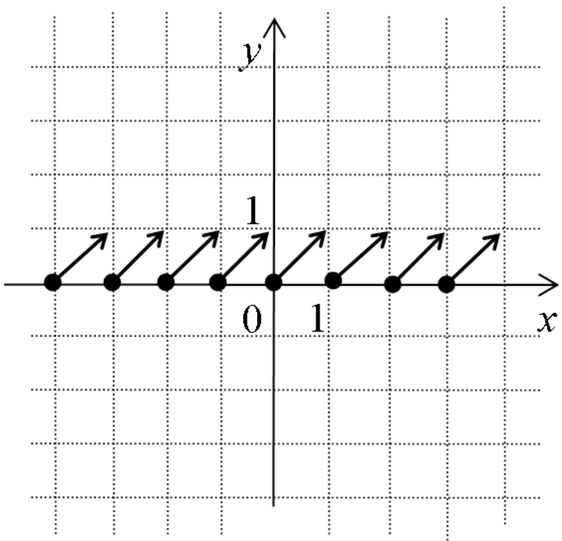


Рис. 5. Графики функций целой и дробной части числа

Замечание 1. Система R действительных чисел является единственной (с точностью до изоморфизма) конечномерной алгеброй над R без делителей нуля, в которой сумма двух квадратов ненулевых элементов отлична от нуля. См. обобщенную теорему Фробениуса [7, с. 270], в которой также фигурируют конечномерные алгебры над R без делителей нуля: поле C комплексных чисел (размерность 2), тело H кватернионов (размерность 4) и альтернативная неассоциативная алгебра Кэли (размерность 8).

Замечание 2. Система R может быть определена также в рамках топологической алгебры – это связное локально компактное поле, не являющееся алгебраически замкнутым [10, теорема 21]. Напомним формулировку классической теоремы Понтрягина (1932 г.): Любое связное локально компактное тело изоморфно топологическому полю действительных чисел, топологическому полю комплексных чисел или топологическому телу кватернионов. Отметим, что среди недискретных несвязных локально компактных тел встречаются поля p-адических чисел по различным простым числам p. Поля p-адических чисел и кольца целых p-адических чисел играют существенную роль в современной теории чисел [2, глава I].

Замечание 3. Порядковым определениям основных числовых систем посвящено дополнение 2.8.4 учебного пособия [4].

Список литературы

1. *Арнольд И. В.* Теоретическая арифметика. Изд. 2-е. М. : Учпедгиз, 1939. 400 с.
2. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. Изд. 3-е, доп. М. : Наука, 1985. 504 с.
3. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.
4. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Упорядоченные множества и решетки. СПб. : Лань, 2024. 248 с.
5. *Игошин В. И.* Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 19–36.
6. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. Пер. с англ. М. : Мир, 1970. 416 с.
7. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. Изд. 2-е. М. : Наука, 1973. 400 с.
8. *Ленг С.* Алгебра. Пер. с англ. М. : Мир, 1968. 564 с.
9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. Пер. с англ. М. : Наука, 1971. 320 с.
10. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. Изд. 4-е. М. : Наука, 1984. 520 с.
11. *Проскуряков И. В.* Числа и многочлены. М. : Изд-во АПН РСФСР, 1949. 284 с.
12. *Феферман С.* Числовые системы. Основания алгебры и анализа. Пер. с англ. М. : Наука, 1971. 440 с.

Numerical systems as the basis of number theory

Vechtomov Evgeny Mikhailovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. Various approaches to the definition and study of basic numerical systems are considered and analyzed. It is emphasized that numerical systems of natural numbers, integers, rational numbers, and real numbers serve as the basis for the study of number theory and number-theoretic research.

Keywords: basic numerical systems, study of numerical systems, number theory.

References

1. *Arnol'd I. V. Teoreticheskaya arifmetika. Izd. 2-e* [Theoretical arithmetic. Ed. 2nd]. M. Uchpedgiz, 1939. 400 p.
2. *Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Teoriya chisel. Izd. 3-e, dop.* [Theory of numbers. Ed. 3d, suppl]. M. Nauka (Science), 1985. 504 p.
3. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012. No. 10. Pp. 15–34.
4. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. SPb. Lan' (Deer), 2024. 248 p.
5. *Igoshin V. I. Kurs chislovyh sistem dlya pedagogicheskogo vuza* [A course of numerical systems for a pedagogical university] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2010. No. 8. Pp. 19–36.
6. *Kuratovskij K., Mostovskij A. Teoriya mnozhestv. Per. s angl.* [Theory of sets. Transl. from English]. M. Mir (World), 1970. 416 p.
7. *Kurosh A. G. Lekcii po obshchej algebre. Izd. 2-e* [Lectures on general algebra. Ed. 2nd]. M. Nauka (Science), 1973. 400 p.
8. *Leng S. Algebra. Per. s angl.* [Algebra. Transl. from English]. M. Mir (World), 1968. 564 p.
9. *Mendel'son E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. Per. s angl.* [Introduction to Mathematical logic. Transl. from English]. M. Nauka (Sceince), 1971. 320 p.
10. *Pontryagin L. S. Nepreryvnye gruppy. Izd. 4-e* [Continuous groups. Ed. 4th]. M. Nauka (Science), 1984. 520 p.
11. *Proskuryakov I. V. Chisla i mnogochleny* [Numbers and polynomials]. M. Publishing House of the Academy of Sciences of the RSFSR, 1949. 284 p.
12. *Feferman S. Chislovye sistemy. Osnovaniya algebry i analiza. Per. s angl.* [Numerical systems. Fundamentals of Algebra and Analysis. Transl. from English]. M. Nauka (Sceince), 1971. 440 p.