УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.24.009

К вопросу об обучении школьников построению касательной к сфере

Леонтьева Наталия Владимировна
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики,
Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В. Г. Короленко.
Россия, г. Глазов. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Аннотация. Изучение стереометрии вызывает у школьников определенные трудности. Некоторые из них связаны с необходимостью правильно воспринимать взаимное расположение пространственных объектов, которые заданы условиями задачи. Решение задач на построение способствует формированию у них конструктивных представлений, развитию пространственного мышления. Особенно сложными для школьников являются задачи, связанные со сферой. В данной работе рассмотрен ряд задач на построение касательной плоскости к сфере, заданной различными условиями. В качестве таковых рассматриваются точка и прямая. Для каждой задачи приведено подробное решение по расширенной схеме, а также методические комментарии к выделенным этапам. Обсуждение методических особенностей решения задач на построение касательной дает возможность обосновать организацию процесса обучения школьников.

Ключевые слова: построения в пространстве, задачи на построение, касательная плоскость, обучение задачам на построение, стереометрия.

В процессе решения задач стереометрии школьники сталкиваются с ситуацией, когда в число рассматриваемых условий входит касательная к сфере. В этом случае у них могут возникнуть сложности с представлением их взаимного расположения. Как отмечает В. А. Далингер, именно задачи на построение способствуют развитию пространственного мышления [2, с. 40]. В таком случае можно рассмотреть ряд задач, связанных с построением касательной к сфере.

Прежде чем переходить собственно к содержанию данной работы, уточним некоторые моменты. Для решения задачи на построение будем использовать следующие основные инструменты. С помощью линейки можем через две различные точки пространства провести прямую. Плоскограф предназначен для построения плоскости по трем различным точкам пространства, не лежащим на одной прямой. Сферограф позволяет построить сферу по заданному центру и радиусу. Кроме того, будем применять так называемые базовые построения, представляющие собой основные действия, которые можно выполнять с построенными объектами. Более подробное описание указанных инструментов приведено в работе [7, с. 201]. Кроме того, при решении задач можно опираться на элементарные построения. Получаемые с их помощью фигуры можно использовать при решении других задач как один из промежуточных шагов [4]. В процессе решения задачи будем применять расширенную схему, описанную в работе [3].

Рассмотрим серию задач, связанных с различными случаями построения касательной к сфере.

Задача 1. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через точку, лежащую на сфере [6, с. 96].

Визуализация. Исходными данными к задаче являются сфера $\Omega(O, r)$ и точка $A \in \Omega$.

Анализ. Известно, что радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости [5, с. 102]. Кроме того, через точку прямой можно провести единственную плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

В процессе проведения анализа следует обратить внимание обучающихся на основное свойство касательной плоскости к сфере. Одновременно требуется вспомнить о том, каким образом можно построить перпендикулярную плоскость к данной прямой.

Построение.

1. Построим сферу $\Omega(O, r)$ и точку $A \in \Omega$.

2. Проведем прямую *OA*.

3. Построим плоскость π через точку A перпендикулярно OA.

Плоскость π – искомая.

Желательно, чтобы указанные шаги построения ученики сформулировали самостоятельно. При необходимости учитель оказывает помощь, для этого можно использовать следующие вопросы.

1. Что первоначально нужно построить в пространстве?
2. Какой объект нужно построить следующим?

Доказательство. По построению плоскость π проходит через основание радиуса сферы и перпендикулярна к нему. Следовательно, по признаку плоскость является касательной к сфере.

Исследование. Поскольку каждый шаг решения задачи выполним и единственен, то задача всегда имеет единственное решение.

В процессе обсуждения необходимо акцентировать внимание обучающихся на том, как можно обосновать существование и единственность каждого шага построения.

Динамическое конструирование. При построении модели задачи выберем произвольную точку на сфере, положение которой можно менять. В таком случае появляется возможность наглядно продемонстрировать существование и единственность решения.

В данном случае все этапы решения описаны словесно, наглядно представить результаты построения можно с помощью интерактивных математических систем, в частности, с помощью динамической среды GeoGebra.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через заданную прямую, не имеющую общих точек со сферой.

Визуализация. В числе исходных данных выделим сферу $\Omega(O,r)$, прямую a, не пересекающую сферу.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 1).

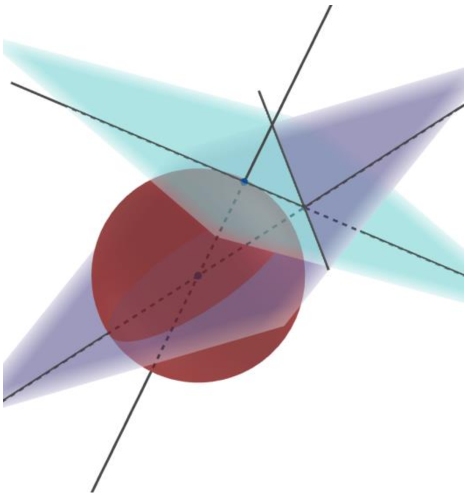

Рис. 1. Иллюстрация к решению задачи

Через точку касания проведем перпендикуляр g к прямой a. Соединим основание перпендикуляра с центром сферы. Перпендикуляр g касается сферы. Соответственно, построим указанный перпендикуляр. Тогда плоскость, проходящая через перпендикуляр g и прямую a, является касательной к сфере. Задача свелась к построению прямой, перпендикулярной к заданной прямой и касающейся сферы.

Проведем плоскость через центр сферы и построенный перпендикуляр, которая пересекает сферу по окружности ω. Построенная плоскость перпендикулярна прямой a. Такую плоскость всегда можно построить. Прямая g также является касательной к ω.

Для построения перпендикуляра g можно воспользоваться задачей о построении касательной к окружности [1, с. 257]. В результате получаем точку, через которую проходит касательная плоскость.

При анализе задачи со школьниками удобнее использовать рассуждения с конца. В результате можно выстроить последовательную цепочку геометрических объектов, которая дает возможность решить задачу.

Построение.

1. Построим сферу $\Omega(O,r)$, прямую a, не пересекающую сферу.
2. Построим плоскость π через точку O, перпендикулярную a.

3. Найдем линию пересечения ω_0 сферы Ω и плоскости π .

4. Найдем точку *OX* пересечения плоскости и прямой *a*.

5. На отрезке *OX* как на диаметре построим сферу Ω_0.

6. Найдем линию пересечения ω сфер Ω и Ω_0.

7. Построим точку пересечения *A* окружностей ω_0 и ω.

8. Через точку *A* и прямую *a* проведем плоскость *σ*.

Плоскость *σ* – искомая.

Описание процесса построения желательно сопроводить обсуждением того, как можно выполнить тот или иной шаг.

Доказательство. Из построения следует, что радиус *OA* перпендикулярен *a* и *AX*. Прямые *AX* и *a* лежат в плоскости *σ.* Плоскость *σ* перпендикулярна радиусу *OA*, следовательно, является касательной к сфере.

Исследование. Поскольку существует две точки пересечения окружностей ω_0 и ω, то задача имеет два различных решения.

На этом этапе желательно обратить внимание обучающихся на то, что возможны два варианта решения, которые мы не учитываем при выполнении шагов построения.

Динамическое конструирование. При построении модели задачи требуется построить сферу, прямую, не пересекающую сферу. Будем считать положение сферы фиксированным, менять будем произвольно положение прямой. Итоговым результатом будем считать две плоскости, удовлетворяющие условию задачи.

Затем можно предложить ученикам изменить условия последней задачи.

Задача 3. Как изменится решение задачи, если допустить, что прямая касается сферы?

Решение. Поскольку прямая касается сферы, то она имеет с ней ровно одну общую точку, в этом случае задача сводится к задаче 1.

Задача 4. Как изменится решение задачи, если прямая пересекает сферу?

Решение. Предположим, что касательная плоскость построена. Прямая, пересекающая сферу, имеет с ней две общие точки, которые по условию лежат в касательной плоскости. В результате получаем противоречие с определением касательной плоскости. Соответственно, задача решения не имеет.

При обсуждении рассмотренных задач следует особое внимание уделить обоснованию проводимых рассуждений.

Можно предложить ученика в задаче 2 заменить прямую точкой.

Задача 5. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через заданную точку, лежащую вне сферы.

Визуализация. В числе исходных данных выделим сферу $\Omega(O,r)$ и точку *A*.

Анализ. Предположим, что задача решена (рисунок 2).

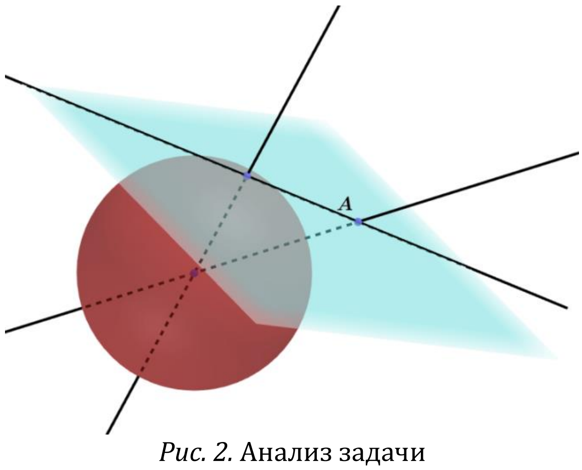

Рис. 2. Анализ задачи

Соединим точку касания с центром окружности и точкой *A*. Если провести через три рассмотренные точки плоскость, то прямая, проходящая через точку касания и точку *A,* является касательной, и задача сводится к построению касательной к окружности.

Построение.

1. Построим сферу $\Omega(O, r)$, прямую *a*, не пересекающую сферу.

2. На отрезке *OA* как на диаметре построим сферу Ω_0.

3. Найдем линию пересечения ω сфер Ω и Ω_0.

4. Соединим некоторую точку *X* окружности ω с центром сферы.

5. Через точку *X* проведем плоскость *σ*, перпендикулярную прямой *OX*.

Плоскость *σ* – искомая.

Доказательство. Аналогично доказательству задачи 2.

Исследование. В данной задаче точка *X*, лежащая на окружности ω, может быть выбрана произвольно. Соответственно, задача является неопределенной.

Динамическое конструирование. При построении модели основным динамическим элементом будет являться выбранная произвольно точка *X* на окружности ω. Изменение положения данной точки позволяет продемонстрировать неопределенность задачи.

Рассмотрение различных случаев, связанных с построением касательной плоскости к сфере, позволяет ученикам лучше понять взаимное расположение этих двух геометрических объектов. Кроме того, школьники могут наглядно представить те случаи, когда построение касательной невозможно, а также когда задача является неопределенной.

Список литературы

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. СПб. : Санкт-Петербург оркестр, 1994. 416 с.

2. *Далингер В. А.* Геометрия: планиметрические задачи на построение : учебное пособие для вузов. М. : Юрайт, 2021. 155 с. URL: https://urait.ru/bcode/473822 (дата обращения: 28.03.2022).

3. *Леонтьева Н. В.* Методика обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы // Вестник Вятского государственного университета. 2022. № 4 (146). С. 121–132. DOI: 10.25730/VSU.7606.22.061.

4. *Леонтьева Н. В.* Применение элементарных построений при решении задач конструктивной геометрии в пространстве // Вестник педагогического опыта. 2022. № 53. С. 37–41.

5. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян и др. М. : Просвещение, 2018. 256 с.

6. *Наумович Н. В.* Геометрические места в пространстве и задачи на построение. М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1962. 152 с.

7. Энциклопедия элементарной математики. Книга 4. Геометрия. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1953. 568 с.

The tangent to the sphere is equated to the question of teaching schoolchildren

Leontieva Natalia Vladimirovna

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Glazov State University of Engineering and Pedagogical n. a. V. G. Korolenko.

Russia, Glazov. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Abstract. The study of stereometry causes certain difficulties for schoolchildren. Some of them are related to the need to perceive the relative location of spatial objects that are set by the conditions of the task. Solving the construction task contributes to the formation of constructive ideas among them, the development of spatial thinking. Tasks related to the field become especially difficult for schoolchildren. In this paper, we consider a number of tasks for constructing a tangent plane to a sphere defined by various conditions. A point and a straight line are considered as such. For each task, a detailed solution is provided according to the extended scheme, as well as methodological comments on the highlighted stages. The discussion of the methodological features of solving the tangent problem makes it possible to justify the organization of the learning process for schoolchildren.

Keywords: construction in space, construction tasks, tangent plane, construction tasks, stereometry.

References

1. *Vygodskij M. Ya. Spravochnik po elementarnoj matematike* [Handbook of Elementary Mathematics]. SPb. St. Petersburg orchestra, 1994. 416 p.

2. *Dalinger V. A. Geometriya: planimetricheskie zadachi na postroenie : uchebnoe posobie dlya vuzov* [Geometry: planimetric construction tasks : textbook for universities]. M. Yurayt, 2021. 155 p. Available at: https://urait.ru/bcode/473822 (date accessed: 28.03.2022).

3. *Leont'eva N. V. Metodika obucheniya resheniyu zadach na postroenie v prostranstve na osnove rasshirennoj skhemy* [Methods of teaching solving spatial construction problems based on an extended scheme] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Vyatka State University. 2022. No. 4 (146). Pp. 121–132. DOI: 10.25730/VSU.7606.22.061.

4. *Leont'eva N. V. Primenenie elementarnyh postroenij pri reshenii zadach konstruktivnoj geometrii v prostranstve* [Application of elementary constructions in solving problems of constructive geometry in space] // *Vestnik pedagogicheskogo opyta* – Herald of Pedagogical Experience. 2022. No. 53. Pp. 37–41.

5. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. 10–11 klassy : ucheb. dlya obshcheobrazovat. organizacij: bazovyj i uglublennyj urovni* – Mathematics: algebra and the beginning of mathematical analysis, geometry. Geometry. Grades 10–11: studies. for general education. organization: basic and advanced levels / L. S. Atanasyan et al. M. Prosveshchenie (Enlightenment), 2018. 256 p.

6. *Naumovich N. V. Geometricheskie mesta v prostranstve i zadachi na postroenie* [Geometric places in space and construction tasks]. M. State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR, 1962. 152 p.

7. *Enciklopediya elementarnoj matematiki. Kniga 4. Geometriya* – Encyclopedia of Elementary Mathematics. Book 4. Geometry. M. State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1953. 568 p.