№2 (31) 2024

ISSN: 2782-2672

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

# MATHEMATICAL BULLETIN of Vyatka State University

Вятский государственный университет

# Математический вестник Вятского государственного университета

Н а у ч н ы й   ж у р н а л

**№ 2 (31)**

Киров
2024

УДК 51(051)
М34



**Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»**
**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре**
**(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)**
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **А. В. Мариева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

# СОДЕРЖАНИЕ

УДК 514.112.3:004.42 DOI 10.25730/VSU.0536.24.006

# Компьютерное моделирование изотомического отображения для данного треугольника

**Совертков Петр Игнатьевич**
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии,
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена.
Россия, г. Санкт-Петербург. E-mail: psovertkov@mail.ru

**Аннотация.** Изотомическое отображение определено конструктивно, т. е. после построения точки пересечения одной тройки отрезков и построения тройки пересечения новой тройки отрезков, появляется изотомически соответствующая точка. В статье рассмотрено математическое и компьютерное моделирование изотомического отображения двумя способами: с помощью декартовых координат и используя барицентрические координаты. Аналитическое задание закона отображения позволяет быстро построить соответствующую пару точек и находить образ линии при изотомическом соответствии.

**Ключевые слова:** изотомическое отображение, барицентрические координаты.

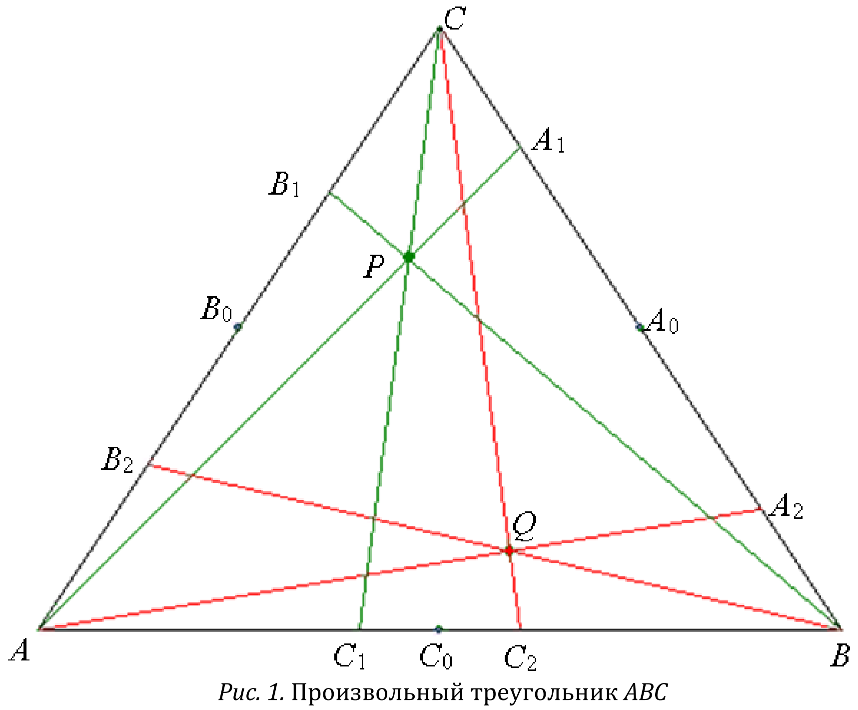


*Рис. 1.* Произвольный треугольник *ABC*

**Постановка задачи.** Пусть в произвольном треугольнике *ABC* проведены отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, где $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$, пересекающиеся в точке *P* (рис. 1). Построим точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, симметричные соответственно точкам $A_1$, $B_1$, $C_1$, относительно середин отрезков *BC*, *CA*, *AB*, тогда отрезки $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ также пересекаются в одной точке *Q*. Точка *Q* называется изотомически сопряженной точке *P*. Аналогично, точка *P* является изотомически сопряженной точке *Q.* Эти две точки называются изотомически сопряженными относительно данного треугольника и говорят, что точка *P* изотомически отображается в точку *Q* относительно треугольника *ABC* [2, с. 66; 3, с. 115].

Если отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ являются медианами треугольника, то точки *P* и *Q* совпадают и являются центром тяжести треугольника.

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке $J$ (рис. 2), называемой точкой Жергонна [1, с. 4].

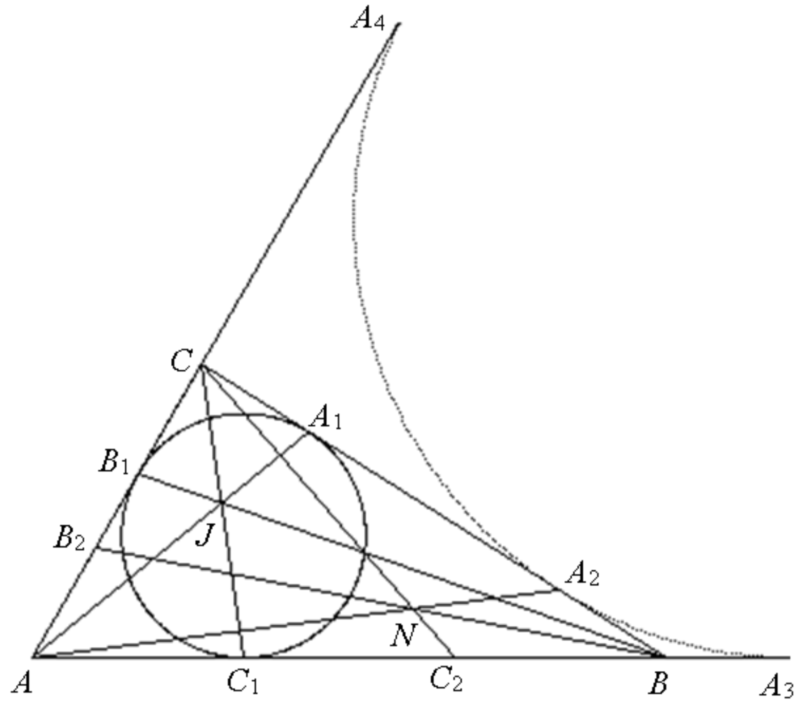


*Рис. 2.* Иллюстрация отрезков на треугольнике *ABC*

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке $N$ (рис. 2), называемой точкой Нагеля [1, с. 4].

Точка Жергонна $J$ и точка Нагеля $N$ изотомически сопряжены относительно треугольника, в котором они построены (рис. 2).

Изотомическое отображение оказывает на учащихся магическое воздействие, так как построив точку $P$ как пересечение трех отрезков и применяя симметрию к этим отрезкам относительно медиан треугольников, мы снова получаем точку $Q$ как пересечение трех отрезков. Утверждение легко доказывается на основании теоремы Чевы. То, что легко доказывается математически, учащийся проверяет, совершая определенную последовательность геометрических построений. Геометрические построения, как известно, выполняются теоретически строго на основании аксиом, а практически, при выполнении нескольких операций допускаются мелкие погрешности. Учитель в этом случае спасает создавшуюся ситуацию словами – «а по теореме Чевы вновь построенные отрезки должны пересечься в одной точке».

Построения на компьютере априори являются относительно точными, так как перед построением точек координаты этих точек округляются до ближайших целых чисел, потому что экран компьютера представляет целочисленную систему координат занумерованных пикселей. Но парадокс заключается в том, что чертеж на экране в большинстве случаев является более качественным, по сравнению с чертежом, выполненным геометрическими инструментами. Если компьютерное моделирование использует геометрические параметры, то повторить чертеж на компьютере для другого расположения исходной точки можно в десятки, сотни, а иногда и тысячи раз быстрее. Велика роль компьютерного моделирования, если требуется отразить связь между параметрами.

Ради справедливости следует отметить и пользу построения чертежа геометрическими инструментами для укладки геометрического факта в долговременную память человека.

В предлагаемой статье рассматривается математическое и компьютерное моделирование произвольного треугольника. Для трех произвольных отрезков, которые пересекаются в одной точке и каждый из которых выходит вершины треугольника, заданы два отношения на сторонах треугольника. Эти отношения полностью определяют положение указанных отрезков. Определяются декартовы и барицентрические координаты точек $P$ и $Q$. Если точка $P$ движется по некоторой траектории, то указан алгоритм построения траектории точки $Q$ при изотомическом отображении.

**Метод использования декартовых координат.** При определении координат точек будем использовать (рис. 3) теорему о пропорциональных отрезках [5, с. 120; 6, с. 64].

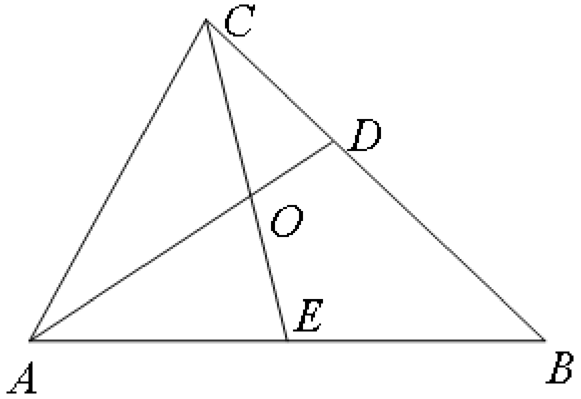


*Рис. 3.* Треугольник *ABC*

Пусть $\frac{CD}{DB}=\frac{m}{n}, \frac{BE}{EA}=\frac{p}{q}$, $CE\cap AD=O$, тогда $\frac{CO}{OE}=\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}+1\right)$.

Целью математического и компьютерного моделирования изотомического отображения является задание первоначальных параметров точки *P* для нахождения координат точки *Q*. Для установления функциональной зависимости будем считать, что заданы координаты вершин $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$ треугольника и отношений *u*, *v*, в которых точка $A_1$ делит отрезок *CB* и точка $C_1$ делит отрезок *BA*, т. е. $CA_1 : A_1B = u, BC_1 : C_1A = v.$ Эти отношения полностью определяют положение точки *P*.

Используя теорему Чевы для трех отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, пересекающихся в одной точке, находим $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{1}{uv}$.

Для координат точек $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно получаем (рис. 1):

$$x_{a1}=\frac{x_c+ux_b}{1+u},\ y_{a1}=\frac{y_c+uy_b}{1+u},x_{c1}=\frac{x_b+vx_a}{1+v},\ y_{c1}=\frac{y_b+vy_a}{1+v}$$

$$x_{b1}=\frac{uvx_a+x_c}{1+uv},\ y_{b1}=\frac{uvy_a+y_c}{1+uv}.$$

Точка *P* делит отрезок $CC_1$ в отношении $CP : PC_1 = u(v+1)$, поэтому

$$x_p=\frac{x_c+u(x_b+vx_a)}{1+u+uv},\ y_p=\frac{y_c+u(y_b+vy_a)}{1+u+uv}. \tag{1}$$

Точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, *Q* имеют координаты

$$x_{a2}=\frac{x_b+ux_c}{1+u},\ y_{a2}=\frac{y_b+uy_c}{1+u},x_{c2}=\frac{x_a+vx_b}{1+v},\ y_{c2}=\frac{y_a+vy_b}{1+v},$$

$$x_{b2}=\frac{uvx_c+x_a}{1+uv},\ y_{b2}=\frac{uvy_c+y_a}{1+uv}.$$

$$x_q=\frac{x_a+v(x_b+ux_c)}{1+v+uv},\ y_q=\frac{y_a+v(y_b+vy_c)}{1+v+uv}. \tag{2}$$

Представленное выше моделирование является наглядным для фиксированной точки *P*, определяемой как пересечение трех отрезков.

Если точка *P* движется по некоторой линии γ, то координаты точки *P* изменяются, и тогда сложно указать зависимости для отношений *u, v* на сторонах треугольника. В этом случае вместо отношений *u, v* исходными параметрами должны быть координаты точки *P*. Из формул (1) выразим параметры *u*, *v*: $v=\frac{x_p(y_b-y_c)+y_p(x_c-x_b)+x_by_c-x_cy_b}{x_p(y_c-y_a)+y_p(x_a-x_c)+x_cy_a-x_ay_c}, u=\frac{x_c-x_p}{v(x_p-x_a)+x_p-x_b}.$

Подставляя параметры в формулы (2), получим координаты точки $Q$, т. е. координаты точки при изотомическом отображении.

На рис. 4 точка $P$ движется по окружности $\gamma$, а ее образ $Q$ при изотомическом отображении движется по линии $\gamma_1$.

Для компьютерного моделирования можно использовать язык Pascal ABC [4, с. 18–51]. Компьютерная программа построения (рис. 4):

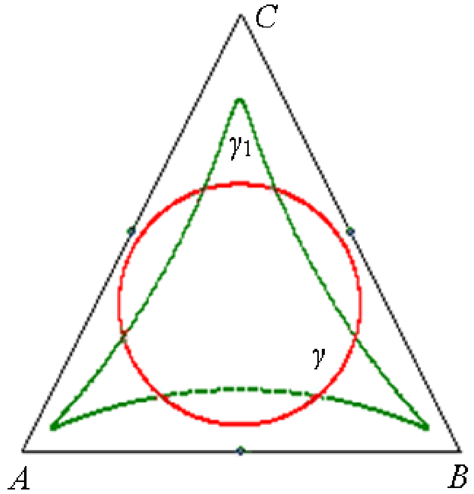


*Рис. 4.* Треугольник *ABC*

```
Uses GraphABC; Var x0,y0,xa,ya,xb,yb,xc,yc,i,j:Integer;
xa1,ya1,xb1,yb1,xc1,yc1,xa2,ya2,xb2,yb2,xc2,yc2,xp,yp,xq,yq,u,v,R:real; Begin
x0:=100; y0:=360; xa:=0; ya:=0; xb:=200; yb:=0; xc:=100; yc:=200;
{точка отсчета и координаты вершин}
R:=55; {радиус окружности}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xb,y0-yb); {сторона треугольника AB}
Line (x0+xb,y0-yb,x0+xc,y0-yc); {сторона треугольника BC}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xc,y0-yc); {сторона треугольника AC}
For i:=0 To 628 Do Begin
xp:=(xa+xb+xc)/3+R*cos(i/100); yp:=(ya+yb+yc)/3+R*sin(i/100);
v:=(xp*(yb-yc)+yp*(xc-xb)+xb*yc-xc*yb)/(xp*(yc-ya)+yp*(xa-xc)+ya*xc-xa*yc);
u:=(xc-xp)/(v*xp+xp-v*xa-xb); {отношения на сторонах CB и BA}
xa1:=(xc+u*xb)/(1+u); ya1:=(yc+u*yb)/(1+u); {координаты точки A1}
xc1:=(xb+v*xa)/(1+v); yc1:=(yb+v*ya)/(1+v); {координаты точки C1}
xb1:=(u*v*xa+xc)/(u*v+1); yb1:=(u*v*ya+yc)/(u*v+1);
xa2:=(u*xc+xb)/(u+1); ya2:=(u*yc+yb)/(u+1); {координаты точки A2}
xc2:=(v*xb+xa)/(v+1); yc2:=(v*yb+ya)/(v+1); {координаты точки C2}
xb2:=(u*v*xc+xa)/(u*v+1); yb2:=(u*v*yc+ya)/(u*v+1);
xq:=(u*v*xc+xa+xb*v)/(u*v+v+1); yq:=(u*v*yc+ya+yb*v)/(u*v+v+1);
SetPenColor(clRed);Circle(x0+round(xp),y0-round(yp),1);
Circle(x0+round((xa+xb+xc)/3), y0-round((ya+yb+yc)/3),2);
SetPenColor(clGreen);Circle(x0+round(xq),y0-round(yq),1);
For j:=0 To 400000 Do Begin End;{цикл задержки}End;
Circle(x0+round((xa+xb)/2), y0-round((ya+yb)/2),2);{середины сторон}
Circle(x0+round((xb+xc)/2), y0-round((yb+yc)/2),2);
Circle(x0+round((xa+xc)/2), y0-round((ya+yc)/2),2);
FloodFill(x0+round((xa+xb)/2), y0-round((ya+yb)/2),clBlue);
FloodFill(x0+round((xa+xc)/2), y0-round((ya+yc)/2),clBlue);
FloodFill(x0+round((xb+xc)/2), y0-round((yb+yc)/2),clBlue); End.
```

Используем барицентрические координаты [1, с. 26; 6, с. 379] для второго, более простого метода моделирования изотомического отображения.

**Метод использования барицентрических координат.** Вначале приведем несколько отношений для точки внутри треугольника (рис. 5).

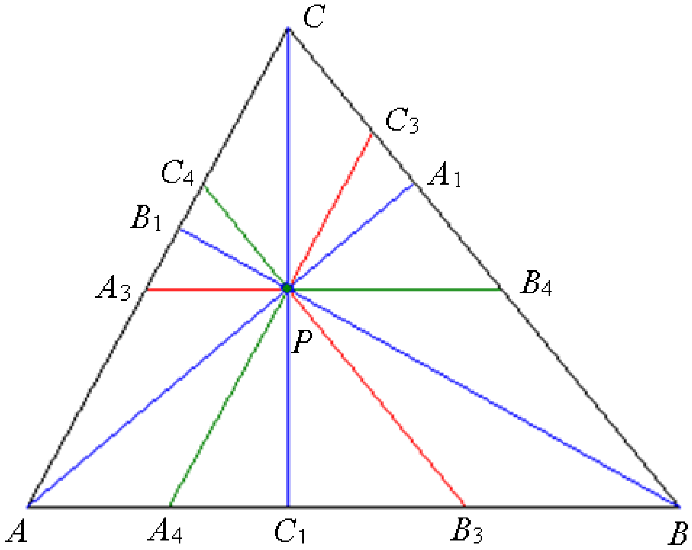


*Рис. 5.* Треугольник *ABC*

Для трех отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, где $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$, пересекающиеся в точке *P*, по теореме Жергонна [5, с. 137] выполняются равенства:

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1, \frac{AP}{AA_1}+\frac{BP}{BB_1}+\frac{CP}{CC_1}=2.$$

Используя теорему Жергонна и подобие треугольников, легко доказываются равенства в следующей теореме.

Теорема. Пусть через точку *P* проведены прямые $A_3B_4$, $B_3C_4$, $C_3A_4$, параллельные сторонам треугольника (рис. 5), тогда выполняются равенства:

$$\frac{A_3B_4}{AB}+\frac{C_3A_4}{CA}+\frac{B_3C_4}{BC}=2=\frac{CB_4}{CB}+\frac{BA_4}{BA}+\frac{AC_4}{AC},$$

$$\frac{CA_3}{CA}+\frac{AB_3}{AB}+\frac{BC_3}{BC}=2, \frac{A_4B_3}{AB}+\frac{B_4C_3}{BC}+\frac{C_4A_3}{CA}=1,$$

$$\frac{AA_4}{AB}+\frac{BB_4}{BC}+\frac{CC_4}{CA}=1, \frac{AA_3}{AC}+\frac{CC_3}{CB}+\frac{BB_3}{BA}=1.$$

Для произвольной точки *P* внутри треугольника справедливы следующие разложения векторов:

$$\overline{AP}=\frac{AA_4}{AB}\overline{AB}+\frac{AA_3}{AC}\overline{AC}, \overline{BP}=\frac{BB_3}{BA}\overline{BA}+\frac{BB_4}{BC}\overline{BC}, \overline{CP}=\frac{CC_4}{CA}\overline{CA}+\frac{CC_3}{CB}\overline{CB}.$$

По теореме Фалеса выполняются равенства

$$\frac{AA_4}{AB}=\frac{CC_3}{CB}, \frac{AA_3}{AC}=\frac{BB_4}{BC}, \frac{BB_3}{BA}=\frac{CC_4}{CA}.$$

На основании предыдущих равенств конструктивно вводятся барицентрические координаты точки *P*(*p*: *q*: r) из равенств:

$$\overline{AP}=q\overline{AB}+r\overline{AC}, \overline{BP}=p\overline{BA}+r\overline{BC}, \overline{CP}=p\overline{CA}+q\overline{CB},$$

причем выполняется равенство $p+q+r=1$.

На рис. 6 представлены барицентрические координаты всех точек и уравнения прямых в барицентрических координатах. Для моделирования любой линии и ее образа при изотомическом отображении применяем следующую последовательность действий:

1) составить параметрические уравнения линии для произвольной точки $P(x_p, y_p)$ в декартовых координатах;

2) найти барицентрические координаты этих точек *P* и *Q*;

3) построить эти точки в декартовой системе координат.

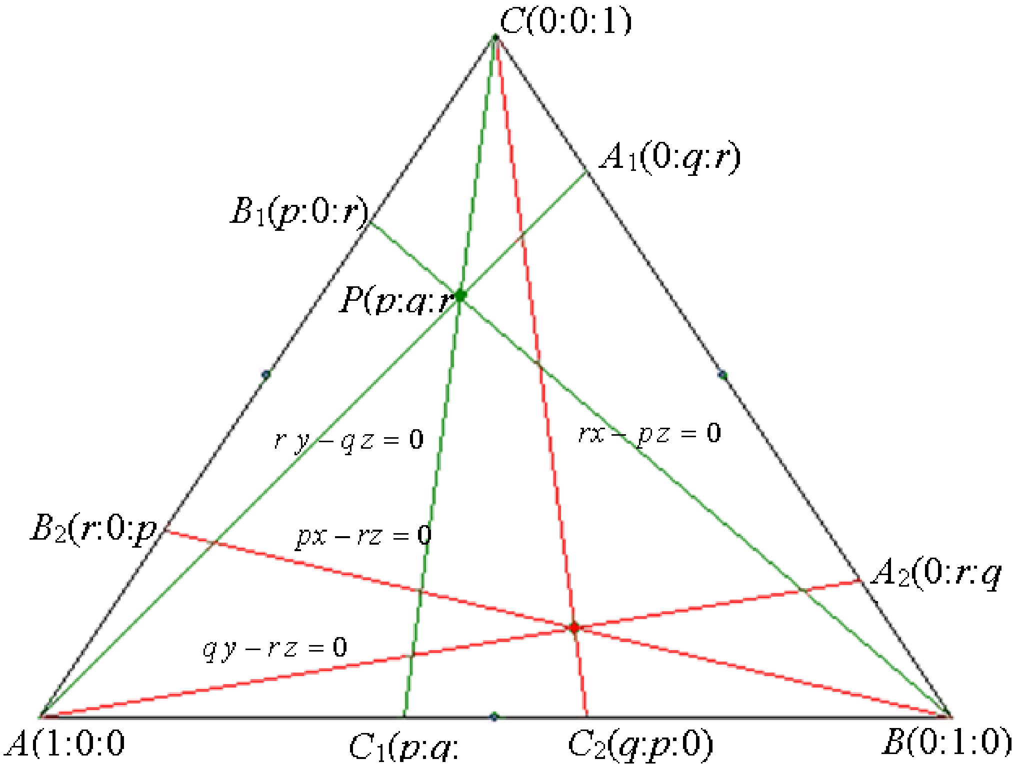


*Рис. 6.* Треугольник *ABC*

Пусть известны декартовы координаты точки $x_p$, $y_p$ точки *P*, тогда используя равенство $\overline{AP} = q\overline{AB} + r\overline{AC}$, получаем систему уравнений

$$qx_b + rx_c = x_p, \quad qy_b + ry_c = y_p.$$

Барицентрические координаты точки *P*:

$$q = (x_p y_c - y_p x_c)/(x_b y_c - y_b x_c),$$

$$r = (x_b y_p - y_b x_p)/(x_b y_c - y_b x_c),\ p = 1 - q - r.$$

Например, для окружности с центром в точке пересечения медиан треугольника используем равенства

$$x_s = (x_a + x_b + x_c)/3,\ y_s = (y_a + y_b + y_c)/3,\ x_p = x_s + r_s\cos t,\ y_p = y_s + r_s\sin t.$$

Следующая компьютерная программа снова строит рисунок 4.

```
Uses GraphABC;
Var x0,y0,b,c,xa,ya,xb,yb,xc,yc,rs,i,j:Integer;
p,q,r,s,xa1,ya1,xb1,yb1,xc1,yc1,xa2,ya2,xb2,yb2,xc2,yc2,xp,yp,xq,yq,xs,ys:real; Begin
x0:=100; y0:=360; xa:=0; ya:=0; xb:=200; yb:=0; xc:=100; yc:=200; rs:=55;
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xb,y0-yb); {сторона AB}
Line (x0+xb,y0-yb,x0+xc,y0-yc); {сторона BC}
Line (x0+xa,y0-ya,x0+xc,y0-yc); {сторона AC}
xs:=(xa+xb+xc)/3; ys:=(ya+yb+yc)/3;
For i:=0 To 628 Do Begin {построение окружности и ее образа}
xp:=xs+rs*cos(i/100); yp:=ys+rs*sin(i/100);
q:=(xp*yc-yp*xc)/(xb*yc-yb*xc); r:=(xb*yp-yb*xp)/(xb*yc-yb*xc);
PutPixel(x0+round(xp),y0-round(yp),clRed);
p:=1-q-r; s:=q*r+p*r+p*q;
xq:=(q*r*xa+p*r*xb+p*q*xc)/s; yq:=(q*r*ya+p*r*yb+p*q*yc)/s;
PutPixel(x0+round(xq),y0-round(yq),clGreen);
For j:=1 To 100000 Do Begin End;End; End.
```

Напоминаем, что изотомическое отображение определено для точек, расположенных внутри треугольника.

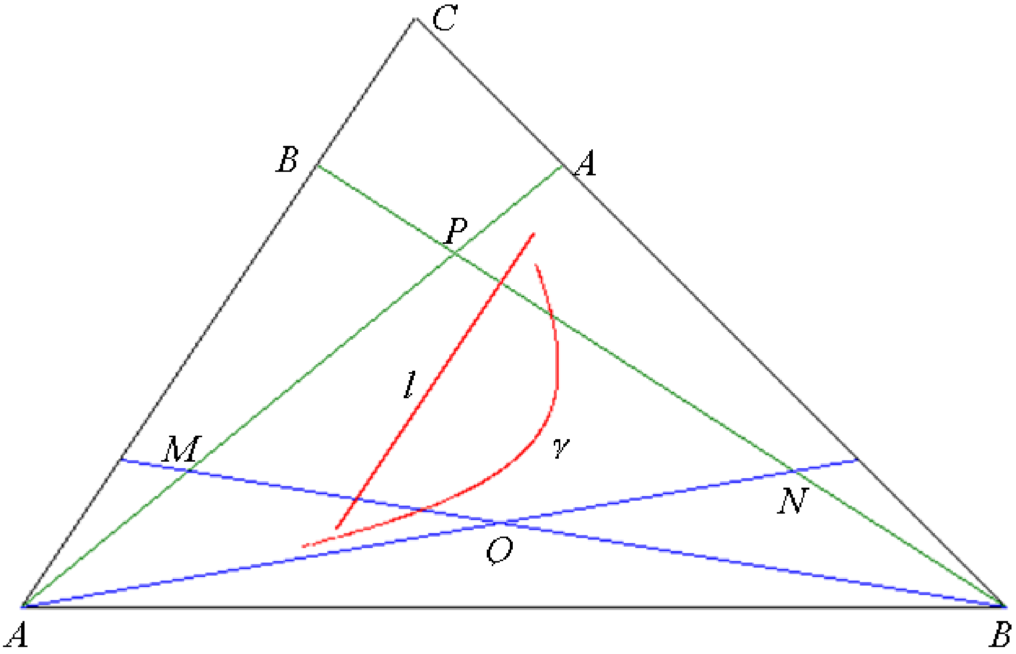


*Рис. 7.* Треугольник *ABC*

При изотомическом отображении точки прямой, проходящей через вершину треугольника, отображаются в точки прямой, проходящей через эту же точку. Например, точки отрезка *PM* (рис. 7) в точки отрезка *QN*, а отрезок *PN* в отрезок *QM*, но образом отрезка *l* на прямой, не проходящей через вершину треугольника, является линия γ.

## Список литературы

1. *Мякишев А. Г.* Элементы геометрии треугольника. М. : МЦНМО, 2002. 32 с.
2. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М. : МЦНМО, 2004. 312 с.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. 1. М. : Наука, 1995.
4. *Совертков П. И.* Компьютерное моделирование. СПб. : Лань, 2023. 424 с.
5. *Совертков П. И.* Олимпиадная подготовка и моделирование по математике. СПб. : Лань, 2022. 400 с.
6. *Совертков П. И.* Справочник по элементарной математике : учебное пособие. СПб. : Лань, 2018. 404 с.

# Computer simulation of an isotomic mapping for a given triangle

**Sovertkov Peter Ignatievich**
PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Geometry,
Russian State Pedagogical University n. a. A. I. Herzen. Russia, St. Petersburg. E-mail: psovertkov@mail.ru

**Abstract**. The isotomic mapping is defined constructively, i. e. after constructing the intersection point of one triple of segments and constructing the intersection point of a new triple of segments, an isotomically corresponding point appears. The article considers mathematical and computer modeling of an isotomic mapping in two ways: using Cartesian coordinates and using barycentric coordinates. The analytical definition of the mapping law allows you to quickly construct the corresponding pair of points and find the image of the line with an isotomic match.

**Keywords**: isotomic mapping, barycentric coordinates.

## References

1. *Myakishev A. G. Elementy geometrii treugol'nika* [Elements of triangle geometry]. M. ICNMO, 2002. 32 p.
2. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya. T. 1* [Elementary geometry. Vol. 1]. M. ICNMO, 2004. 312 p.
3. *Prasolov V. V. Zadachi po planimetrii. Ch. 1* [Problems in planimetry. Part 1]. M. Nauka (Science), 1995.
4. *Sovertkov P. I. Komp'yuternoe modelirovanie* [Computer modeling]. SPb. Lan' (Deer), 2023. 424 p.
5. *Sovertkov P. I. Olimpiadnaya podgotovka i modelirovanie po matematike* [Olympiad preparation and modeling in mathematics]. SPb. Lan' (Deer), 2022. 400 p.
6. *Sovertkov P. I. Spravochnik po elementarnoj matematike : uchebnoe posobie* [Handbook of elementary mathematics : textbook]. SPb. Lan' (Deer), 2018. 404 p.

УДК 658.8:004.6 DOI 10.25730/VSU.0536.24.007

# Сравнение двух методов анализа данных по продажам в сети магазинов Rossmann

**Шатров Анатолий Викторович[1], Левин Михаил Наумович[2]**

[1]доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры ЭВМ,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров; профессор физико-механического института,
Санкт-Петербургский политехнический университет.
Россия, г. Санкт-Петербург. ORCID: 0000-0002-5295-571X. E-mail: shatrov@vyatsu.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

**Аннотация**. В данной работе производится сравнение двух методов прогнозирования продаж по данным статистики европейской торговой сети Rossmann. В качестве методов сравнения выбраны метод множественной линейной регрессии (MultipleLinearRegression – MLR) и модифицированный метод случайного леса (RandomForest). В качестве инструментальной базы расчетов используется среда разработки Python. Предварительная обработка базы данных по типам магазинов, временным интервалам работы сети, состоянию спроса потребителей в зависимости от различных факторов позволила сформировать целевую функцию объема продаж Sales. Обсуждается модифицированная постановка задачи метода случайного леса в контексте формирования ансамбля деревьев решений. Это достигается путем обучения алгоритма Random Forest по обучающей выборке и последующего осреднения по ансамблю. По результатам расчета сделан вывод о преимуществе модели случайного леса на основании значений критериев $R^2$ (коэффициент детерминации) и RMSE (средняя квадратичная ошибка).

**Ключевые слова**: множественная линейная регрессия, метод случайного леса, прогнозирование, Python.

**Введение.** Ранее нами был осуществлен эконометрический анализ данных торговой статистики сети магазинов Rossmann[1], представленной на платформе Kaggle (https://www.kaggle.com/), позволила выявить основные закономерности в зависимости целевой функции Sales от факторов, представленных в исходной базе данных. Методы предварительной обработки данных, дисперсионного и корреляционного анализа [1–3] дают возможность выделить наиболее значимые факторы, влияющие на целевую функцию Sales, представляющую объемы продаж торговой сети. В качестве моделей, обеспечивающих оптимизацию целевой функции, выбраны модель множественной линейной регрессии (MultipleLinearRegression) и модель случайного леса (RandomForest) [4]. Алгоритмы расчета для указанных моделей реализованы в среде разработки Python [10]. Критериями адекватности при сравнении этих моделей выбраны коэффициент детерминации $R^2$ и средняя квадратичная ошибка RMSE.

**1. MLR – множественная линейная регрессия.** Рассматриваемая модель MLR применяется в анализе базы данных используемой статистики продаж для классификации факторов и последующего прогноза целевой функции Sales.

Параметры регрессионной модели рассчитываются с помощью метода наименьших квадратов (OrdinaryLeastSquare – OLS) [3; 12]. Как известно, метод OLS представляет собой основную процедуру в контексте машинного обучения с учителем для прогноза значений целевой переменной, зависящей от заданного числа предикторов. Для реализации МЛР программными средствами Python используется приложение sklearn [10]. Для этого необходимо вызвать функцию LinearRegression с помощью команды:

classsklearn.linear_model.LinearRegression( fit_intercept = True , normalize = False , copy_X = True , n_jobs = 1)

В данной команде используется алгоритм обучения модели fit (X_train, Y_train) [7; 8], где X_train представляет набор факторов-предикторов (независимых переменных), а Y_train – отклик



[1] Статья авторов «Эконометрический анализ торговой статистики сети магазинов Rossmann» в предыдущем выпуске журнала.

(целевая функция) Sales. Для получения прогноза в работе используются два метода: MLR (LinearRegression) и метод случайного леса RF (Random Forest [4; 9]). Рассмотрим реализацию MLR, в терминах параметров вызываемой функции LinearRegression. В процессе реализации вызываемая функция вычисляется для двух выборок: X_train, Y_train, представляющих значения предикторов и отклика соответственно. Для непосредственного вычисления используется команда fit (X_train, Y_train).

Перечень основных параметров вызываемой функции LinearRegression (…) перечислен в таблице 1.

*Таблица 1*

**Параметры функции LinearRegression ()**

| Параметр | Тип | Описание |
|---|---|---|
| *fit_intercept* | bool | Признак центрированности данных: по умолчанию True |
| *normalize* | bool | Этот параметр игнорируется, если для fit_intercept = False. Если True, независимые переменные X будут нормализованы до регрессии путем вычитания среднего значения |
| *copy_X* | bool | Если True, X будет скопирован; иначе он может быть перезаписан |
| *n_jobs* | Int | Количество заданий для вычисления |

Программа расчета в среде Python представлена в Приложении А.

Для проверки адекватности и точности модели вычисляются критерии тестирующей выборки – коэффициент детерминации $R^2$ и средняя квадратичная ошибка RMSE. Вычисленные значения $R^2$=0.5432, RMSE = 1281.83.

Значения критериев $R^2$ и RMSE свидетельствуют, что модель MLR не является адекватной и точной, поэтому не может быть принята для предсказания значений целевой функции Sales.

На рисунке 1 приводится диаграмма рассеивания значений целевой функции.

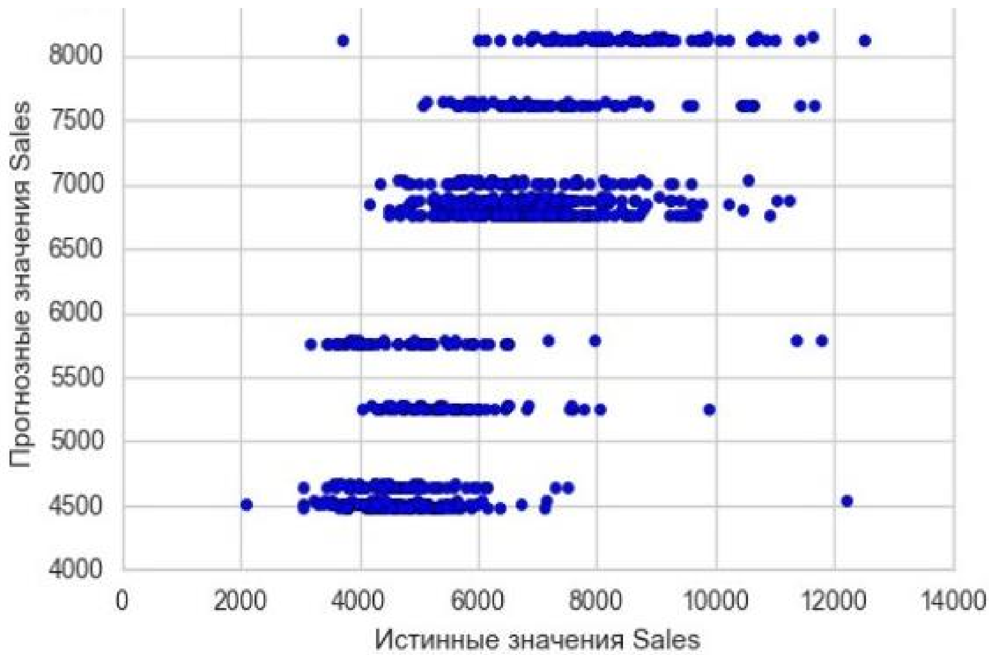


*Рис. 1.* Диаграмма рассеивания для прогноза линейной регрессии

При этом необходимо понимать, что существуют методы обобщения линейной регрессии, в частности, модели с регуляризацией или модификацией квадратичного функционала вOLS. Регуляризованной регрессией (или регрессией со штрафом) является модель, в которой на регрессионные коэффициенты накладывается некоторый штраф с целью улучшить ее способности к обобщению.

В случае обычной регрессии целью является достижение наилучшей аппроксимации заданной линейной зависимости (по обучающей выборке), что приводит к переобучению (overfitting). В этом случае метод хорошо работает на обучающей выборке и плохо работает на примерах, не участвовавших в обучении.

Математически регуляризацию можно описать следующим образом. Имеем набор данных $(x_1, y_1), \dots ,(x_n, y_n)$, где $x_i \in \mathrm{R}^n$ и $y_i \in \{-1, 1\}$. Целевая функция имеет вид $f(x) = w^T x + b$ с параметрами $w \in \mathrm{R}^m$

и свободным членом $b \in$ R. Для того, чтобы сделать прогноз, мы смотрим на знак функции *f(x)*. Найдем параметры модели, минимизируя тренировочную ошибку:

$$E(w,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L(y_i, f(x_i)) + \alpha R(w) \quad (1)$$

где *L* – функция потерь, *R* – функция регуляризации, α > 0.

Наиболее популярные виды функции *R*:

– $R(w) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2$ (L1)

– $R(w) := \sum_{i=1}^{n}|w_i|$ (L2)

– $R(w) := \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2 + (1-p)\sum_{i=1}^{n} |w_i|$ (Elastic Net) – выпуклая комбинация L1 и L2 (рис. 2).

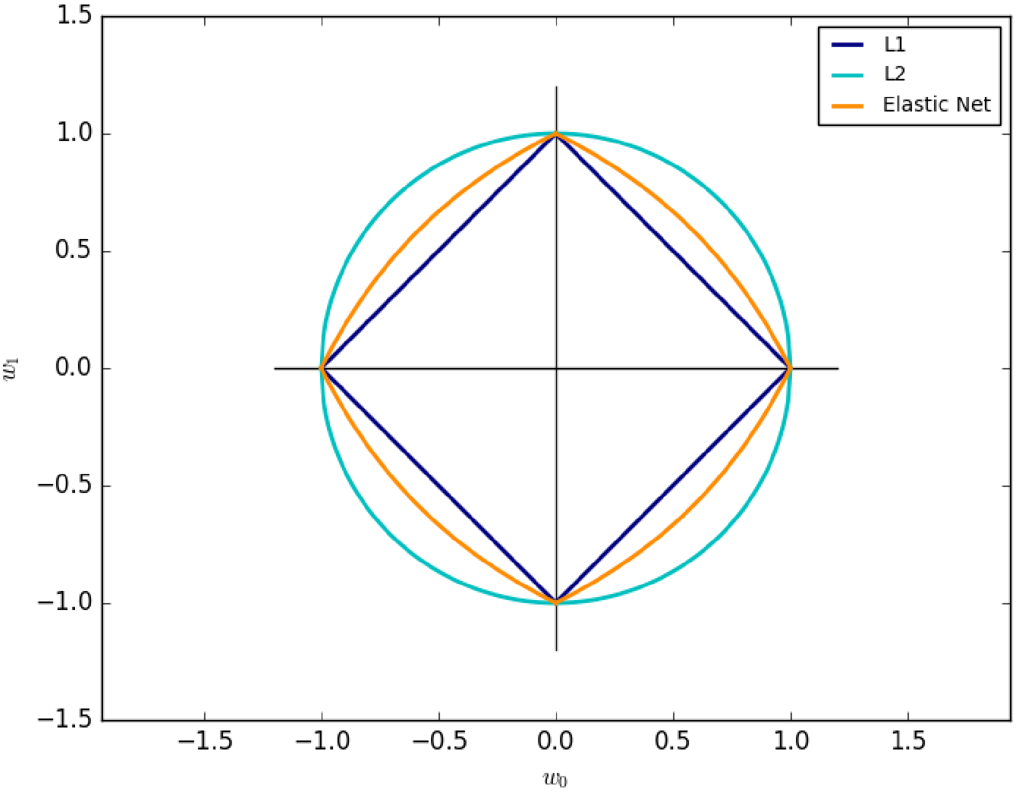


*Рис. 2.* Функция регуляризации *R(w)*

Чаще всего используются два способа регуляризации (штрафа), применяемых в случае регрессии: L1 и L2. Для L1 функция потерь примет вид:

$$\sum_i^n (y_i - f_i(x))^2 + \alpha \sum_i^n |w_i| -> min_x \quad (2)$$

В таком случае одновременно с уменьшением ошибки мы уменьшаем и значения коэффициентов (по их модулю). Для штрафа L2 получим:

$$\sum_i^n (y_i - f_i(x))^2 + \alpha \sum_i^n {w_i}^2 -> min_x \quad (3)$$

α в обоих случаях – параметр регуляризации, контролирующий величину штрафа. Чем меньше его значение, тем меньше штраф. Модели, имеющие в своем составе штрафы L1 и L2, называются Lasso[2] регрессией и Ridge регрессией (или гребневой) соответственно. Оба алгоритма будут давать меньшие значения весовых коэффициентов, нежели обычный метод наименьших квадратов.

Однако использование обобщения МЛР за счет регуляризации не избавляет от проблемы переобучения. Одним из методов для решения этой проблемы является использование третьего набора данных – валидационного. Как бы то ни было, разбивая исходный набор данных на три части, мы сильно снижаем количество образцов, которые можем использовать для обучения модели, потенциально снижая ее качество.

**2. RF – Модель RandomForest.** Особенность анализа многомерных статистических выборок для получения прогноза целевой функции методом построения регрессионной зависимости заключается не только в подборе коэффициентов (параметров) регрессии, но и в обоснованном выборе предикторов этой зависимости. Такая задача решается в процессе классификации исходной выборки независимых факторов. Конечного результата можно достичь, используя метод случайного леса

[2] Least absolute shrinkage and selection operator.

(RF – RandomForest) [4; 9], сочетающего возможность решения задачи регрессии для отклика (целевой функции) и задачи классификации предикторов (определяющих факторов). Метод RF представляет обобщение алгоритма решающих деревьев (DecisionTree), который использует ансамбль деревьев для улучшения качества классификации или регрессии. Суть обобщающего метода RF состоит в том, что производится случайный перебор деревьев, составленных из обучающей выборки. Затем производится ансамблирование (комбинация) случайных подмножеств. Полученный ансамбль позволяет уменьшить эффект переобучения и повысить качество предсказаний. Реализация алгоритма выполняется в следующей последовательности:

1. Формируем случайную выборку из факторов (объектов) исходного набора данных.
2. Составляем случайную выборку из исходного набора признаков обучающей выборки.
3. На основании выполненных этапов 1, 2 строим дерево решений для оценки наилучшего признака при разбиении данных на каждом уровне дерева.
4. Реализация алгоритма или построение ансамбля заключается в повторении шагов 1–3 для каждого дерева.

Уравнение регрессии для предсказания целевой функции представляется в результате усреднения по ансамблю решений $T_i(x)$. Прогноз новых значений представляется следующим образом:

$$y^X = \frac{\sum_{i=1}^{X} T_i(x)}{X} \qquad (4)$$

Выполненное усреднение (4) уменьшает дисперсию отдельных деревьев решений.

Модель RandomForest реализуется в Python с помощью функции sklearn.ensemble.Random ForestRegressor [5; 6; 11]:

class sklearn.ensemble.RandomForestRegressor (n_estimators=Int, criterion='mse', max_depth= None, min_samples_split=2, min_samples_leaf=1, min_weight_fraction_leaf=0.0, max_features='auto', max_leaf_nodes=None, min_impurity_decrease=0.0, min_impurity_split=None, bootstrap=True, oob_score= False, n_jobs=1, random_state=None, verbose=0, warm_start=False).

Алгоритм производит на этапе обучения классификацию объектов (факторов) модели. Как отмечалось выше, это является главным преимуществом ансамблевого метода RF, что в конечном итоге позволяет оценить важность каждого фактора для классификации объектов. Это можно сделать, используя атрибут feature_importances модели, который возвращает массив значений, отражающих важность каждого признака. Более важные признаки будут иметь более высокие значения.

Ниже в таблице 2 приводится перечень и описание основных параметров функции sklearn.ensemble.RandomForestRegressor. Принятая в качестве стандарта среды разработки Python реализация алгоритма модели RandomForest предполагает такое использование параметров, при котором можно их варьировать, осуществляя настройку при выполнении алгоритма. Для этого достаточно менять, например, количество деревьев в ансамбле, количество объектов и признаков в каждом подмножестве, критерий информативности, минимальное количество объектов, при котором осуществляется разбиение, количество конечных узлов, максимальную глубину деревьев и т. д.

Вычисленные значения коэффициентов влияния приведены в таблице 3. Структура таблицы 3 демонстрирует очередность факторов по степени важности (коэффициентов влияния) в порядке их убывания.

Таким образом можно установить основные гиперпараметры модели – число деревьев и максимальную глубину дерева. В таблице 4 на основании вычислительного эксперимента приводятся оптимальные значения этих ключевых параметров алгоритма Random Forest. В качестве критериев при осуществлении подбора параметров использовались коэффициент детерминации $R^2$ и средняя квадратичная ошибка RMSE.

Программа выполнения алгоритма модели RandomForest в среде разработки Python приводится в Приложении В.

*Таблица 2*

**Параметры функции RandomForestRegressor ()**

| Параметр | Тип | Описание |
|---|---|---|
| n_estimators | Int | Число деревьев – при увеличении количества деревьев улучшается качество модели, время построения модели увеличивается. |
| criterion | string | Функция для измерения оценки качества разбиения деревьев. |
| max_features | Int, float, string or None | Количество признаков выбора расщепления – для задачи регрессии равен n/3. Является очень важным параметром. При увеличении данного параметра время построения модели увеличивается. |

*Окончание табл. 2*

| Параметр | Тип | Описание |
|---|---|---|
| min_samples_split | Int, float | Минимальное количество объектов, при котором осуществляется разбиение. При увеличении качество снижается, а время построения модели сокращается. |
| min_samples_leaf | Int, float | Минимальное количество объектов в листьях, для задач регрессии рекомендуется использовать значение 5. |
| max_depth | Intor None | Максимальная глубина дерева. |
| min_weight_fraction_leaf | float | Минимальная взвешенная доля суммы весов (всех входных выборок), необходимых для конечного узла. |
| max_leaf_nodes | IntorNone | Количество конечных узлов. Если None, то неограниченное количество конечных узлов. |
| bootstrap=True | Bool (True or False) | Параметр построения решающего дерева. Если False, то для построения каждого дерева используется весь набор данных. |
| oob_score=False | Bool (True or False) | Параметр дополнительной оценки обобщенного признака. |
| n_jobs=1 | Int | Количество заданий, выполняемых параллельно. |
| warm_start=False | Bool (True or False) | Параметр настройки. Если True, необходимо повторно использовать решение предыдущего вызова для подгонки алгоритма. |

Для подбора этих параметров использовался метод ручной настройки – подбор осуществлялся экспериментально.

*Таблица 3*

**Значение коэффициентов влияния факторов на эффективность модели прогнозирования**

| Фактор | Значение коэффициента |
|---|---|
| CompetitionDistance | 0.194650 |
| Store | 0.174714 |
| Promo | 0.135008 |
| DayOfWeek | 0.071729 |
| CompetitionOpenSinceYear | 0.058781 |
| CompetitionOpenSinceMonth | 0.058551 |
| CompetitionOpen | 0.049446 |
| Day | 0.043992 |
| WeekOfYear | 0.037136 |
| StoreType | 0.036059 |
| Promo2SinceYear | 0.029928 |
| Assortiment | 0.029330 |
| Promo2SinceWeek | 0.024404 |
| PromoInterval | 0.014829 |
| PromoOpen | 0.014714 |
| Month | 0.011000 |
| SchoolHoliday | 0.005532 |
| Year | 0.004418 |
| Promo2 | 0.002683 |
| StateHoliday | 0.001611 |
| IsPromoMonth | 0.001484 |

*Таблица 4*

**Параметры модели RF**

| | |
|---|---|
| n_estimators | 3000 |
| maxdepth | 10 |

В результате использования алгоритма Random Forest для прогноза основные критерии адекватности принимают значения $R^2$ = 0.9100 и RMSE = 0.16582. Таким образом, можно утверждать, что модель Random Forest является адекватной и предсказывает результат прогнозирования существенно лучше, чем линейная регрессия.

**Заключение.** Для прогнозирования динамики изменения целевой функции Sales были использованы две модели: модель множественной регрессии и модель случайного леса RF. В результате сравнения для выбранных данных была выбрана модель прогнозирования, которая обладает низкой ошибкой и коэффициентом детерминации, близким к 1. Выбранная модель использует модифицированный алгоритм RF, который относится к методам обучения с учителем и является ансамблевым методом. Модель случайного леса является актуальным и адекватным алгоритмом машинного обучения, способным выполнять функции классификации факторов-предикторов и прогнозирования целевых функций. Вместе с тем алгоритм RF имеет как свои преимущества, так и недостатки. К несомненным преимуществам этого алгоритма относятся следующие свойства:

1. Модель RF может использоваться для задач классификации и регрессии в части прогнозирования целевых функций.
2. Модель RF позволяет обрабатывать данные с большим количеством признаков.
3. Модель RF является достаточно устойчивой к переобучению.
4. Модель дает возможность измерять значимость каждого признака для задачи.

При этом модели RF присущи следующие недостатки:

1. Модель может быть сложной для интерпретации, так как она оперирует большим числом операторов и параметров, принадлежащих множеству деревьев решений.
2. Имеется необходимость в настройке параметров модели, приведенных в таблице 2.
3. Для обучения модели RF может потребоваться существенно больше времени по сравнению с MLR, особенно при использовании большого количества деревьев.

## Список литературы


1. *Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А.* Эконометрика. Начальный курс. М. : Дело, 2007. 504 с.
2. *Нестеров С. А.* Базы данных. Интеллектуальный анализ данных : учебное пособие. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 272 с.
3. *Box G., Jenkins G.* Time series analysis: forecasting and control. John Wiley and Sons, 2008. P. 748.
4. *Breiman Leo*. Random Forests // Machine Learning. 2001. T. 45. № 1. Pp. 5–32.
5. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning, 2nd ed. Springer, 2009. 763 p.
6. *Fayyad M., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P.* From Data Mining to Knowledge Discovery in Databases. URL: https://www.kdnuggets.com/gpspubs/aimag-kdd-overview-1996-Fayyad.pdf (дата обращения: 01.02.2023).
7. NumPyUserGuide (Release 1.14.0). URL: http://docs.scipy.org/doc/numpy/user/ (дата обращения: 11.05.2023).
8. Pandas: powerful Python data analysis toolkit (Release 0.23.0). URL: http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/ (дата обращения: 11.05.2023).
9. *Piatetsky-Shapiro G.* CRISP-DM, still the top methodology for analytics, data mining, or data science projects. 2014. URL: http://www.kdnuggets.com/2014/10/crisp-dm-top-methodology-analytics-data-mining-datascience-projects.html (дата обращения: 25.05.2023).
10. Scikit-learnuserguide (Release 0.19.1). URL: http://scikit-learn.org/stable/user_guide.html (дата обращения: 11.05.2023).
11. Seaborn: Annotated heatmaps (Release 0.9.0). URL: http://seaborn.pydata. org/examples/heatmap_annotation.html (дата обращения: 11.05.2023).
12. Statsmodels: statistics in Python (Release 0.9.0). URL: http://www.statsmodels.org/stable/index.html (дата обращения: 11.05.2023).

**Приложение А**

**Программный код для построения модели линейной регрессии**

```
rossmann_dic = dict(list(train.groupby('Store')))
test_dic = dict(list(test_df.groupby('Store')))
submission = Series()
scores = []
for i in test_dic:
        # current store
        store = rossmann_dic[i]
                # define training and testing sets
X_train = store.drop(["Sales","Store"],axis=1)
Y_train = store["Sales"]
X_test =test_dic[i].copy()
store_ids = X_test["Id"]
X_test.drop(["Id","Store"], axis=1,inplace=True)
        # Linear Regression
lreg = LinearRegression()
lreg.fit(X_train, Y_train)
        Y_pred2=lreg.predict(X_train)
scores.append(lreg.score(X_train, Y_train))
Y_train=list(Y_train)
plt.scatter(Y_train,Y_pred2)
plt.xlabel(u'Истинные значения Sales')
plt.ylabel(u'Прогнозные значения Sales')
plt.title(u'Диаграмма рассеяния для прогноза линейной регрессии')
error=0
for i in range(len(Y_train)):
        error=(abs(Y_pred2[i]-Y_train[i])/Y_train[i])
train_error_bay=error/len(Y_train)*100
print("Train error = " +'{}'.format(train_error_bay)+ " percent in SVM")
        error = mean_squared_error(Y_train, Y_pred2)
print("MSE="+'{}'.format(error))
RR=r2_score(Y_train, Y_pred2)
print("RR="+'{}'.format(RR))
RMSE=0
R=0
for i in range(len(Y_train)):
        R=(Y_pred2[i]-Y_train[i])**2
RMSE=math.sqrt(R/len(Y_train))
print("RMSE="+'{}'.format(RMSE))
```

**Приложение B**

**Программный код для построения модели Randomforest**

```
test = pd.read_csv(io.StringIO(uploaded['test.csv'].decode('utf-8')))
dfdf =newnew..copycopy()()
test.fillna(1, inplace=True)
df = df[df["Open"] != 0]
df = df[df["Sales"] > 0]
df['log_sales'] = np.log(df['Sales'])
df = pd.merge(df, store, on='Store')
test = pd.merge(test, store, on='Store')
df.fillna(0,inplace=True)
test.fillna(0,inplace=True)
dfdf[["StateHoliday""StateH ] = df["StateHoliday"].map({0: 0, "0": 0, "a": 1, "b": 1, "c": 1})
test["StateHoliday"] = test["StateHoliday"].map({0: 0, "0": 0, "a": 1, "b": 1, "c": 1})
df['StateHoliday'] = df['StateHoliday'].astype(float)
test['StateHoliday'] = test['StateHoliday'].astype(float)
X_train, X_val, y_train, y_val = train_test_split(X, y, test_size=0.20, random_state=7)
```

```
X_test=test.drop(['Id','Store','Date','CompetitionOpenSinceYear','Promo2SinceYear','PromoInterval'] , axis = 1)
rf = RandomForestRegressor(n_estimators=3000,max_depth=10)
rf.fit(X_train,y_train)
rf_pred = rf.predict(X_val)
rmse_rf = np.sqrt(mean_squared_error(y_val,rf_pred))
rmse_rf
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(15,8))
sns.barplot(x=0, y=1, color="salmon", data=feature_importance, edgecolor="black")
plt.xlabel("Значения факторов ")
plt.ylabel("Факторы")
```

# Comparison of two methods of analyzing sales data in the Rossmann store chain

**Shatrov Anatoly Viktorovich[1], Levin Mikhail Naumovich[2]**
[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of the Computer Department, Vyatka State University. Russia, Kirov; professor of the Institute of Physics and Mechanics, St. Petersburg Polytechnic University. Russia, St. Petersburg. ORCID: 000-0002-5295-571X. E-mail: shatrov@vyatsu.ru
[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr00227@vyatsu.ru

**Abstract**. This paper compares two sales forecasting methods based on statistics from the European Rossmann retail chain. The method of multiple linear regression (MultipleLinearRegression – MLR) and the modified random forest method (randomForest) were chosen as comparison methods. The Python development environment is used as a calculation tool. Preliminary processing of the database by types of stores, time intervals of the network, and the state of consumer demand, depending on various factors, allowed us to form the target function of Sales volume. A modified formulation of the problem of the random forest method is discussed in the context of the formation of an ensemble of decision trees. This is achieved by training the Random Forest algorithm on a training sample and then averaging over the ensemble. Based on the calculation results, it is concluded that the random forest model is advantageous based on the values of the criteria R2 (coefficient of determination) and RMSE (mean square error).

**Keywords**: multiple linear regression, random forest method, forecasting, Python.

## References

1. *Magnus Ya. R., Katyshev P. K., Pereseckij A. A. Ekonometrika. Nachal'nyj kurs* [Econometrics. The initial course]. M. Delo (Business), 2007. 504 p.
2. *Nesterov S. A. Bazy dannyh. Intellektual'nyj analiz dannyh : uchebnoe posobie* [Databases. Data mining : textbook]. SPb. Polytechnic University Publishing House, 2011. 272 p.
3. *Box G., Jenkins G.* Time series analysis: forecasting and control. John Wiley and Sons, 2008. P. 748.
4. *Breiman Leo*. Random Forests // Machine Learning. 2001. Vol. 45. No. 1. Pp. 5–32.
5. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning, 2nd ed. Springer, 2009. 763 p.
6. *Fayyad M., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P.* From Data Mining to Knowledge Discovery in Databases. Available at: https://www.kdnuggets.com/gpspubs/aimag-kdd-overview-1996-Fayyad.pdf (date accessed: 01.02.2023).
7. NumPyUserGuide (Release 1.14.0). Available at: http://docs.scipy.org/doc/numpy/user/ (date accessed: 11.05.2023).
8. Pandas: powerful Python data analysis toolkit (Release 0.23.0). Available at: http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/ (date accessed: 11.05.2023).
9. *Piatetsky-Shapiro G*. CRISP-DM, still the top methodology for analytics, data mining, or data science projects. 2014. Available at: http://www.kdnuggets.com/2014/10/crisp-dm-top-methodology-analytics-data-mining-datascience-projects.html (date accessed: 25.05.2023).
10. Scikit-learnuserguide (Release 0.19.1). Available at: http://scikit-learn.org/stable/user_guide.html (date accessed: 11.05.2023).
11. Seaborn: Annotated heatmaps (Release 0.9.0). Available at: http://seaborn.pydata.org/examples/heatmap_annotation.html (date accessed: 11.05.2023).
12. Statsmodels: statistics in Python (Release 0.9.0). Available at: http://www.statsmodels.org/stable/index.html (date accessed: 11.05.2023).

УДК 511.11 DOI 10.25730/VSU.0536.24.008

# Числовые системы как основание теории чисел

**Вечтомов Евгений Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

**Аннотация.** Рассматриваются и анализируются различные подходы к определению и изучению основных числовых систем. Подчеркивается, что числовые системы натуральных чисел, целых чисел, рациональных чисел и действительных чисел выступают в качестве основания для изучения теории чисел и теоретико-числовых исследований.

**Ключевые слова:** основные числовые системы, изучение числовых систем, теория чисел.

**Введение.** В элементарной теории чисел – помимо натуральных чисел (N) и целых чисел (Z) – рассматриваются и применяются рациональные числа (Q) и действительные числа (R). В частности, важную роль играют такие числовые функции, как абсолютная величина, целая часть и дробная часть действительных чисел.

Основные числовые системы N, Z, Q, R уникальны (с точностью до изоморфизма они единственны) и в то же самое время универсальны в применениях как в самой математике и других науках, так и в практических приложениях.

Теория числовых систем выросла из недр арифметики на методической базе абстрактной алгебры и математического анализа [12]. А сами числовые системы служат надежной содержательной основой развития современной теории чисел, а также дальнейшего развития алгебры и анализа.

В этой статье мы последовательно изложим содержательные определения и свойства числовых систем $N \subset Z \subset Q \subset R$, которые являются основанием и обоснованием строгого и систематического изучения теории чисел.

Доступно и содержательно основные числовые системы изложены в известных книгах И. В. Арнольда [1] и И. В. Проскурякова [11], в статье В. И. Игошина [5].

Последовательно рассмотрим эти основные числовые системы.

**1. Система натуральных чисел.** Натуральные числа составляют фундамент всей математики: являются истоком и источником становления и развития числовой линии в математической науке и в математическом образовании; фундируют мощное арифметико-алгебраическое направление функционирования современной математики; служат числовой базой построения, посредством координатизации, классических геометрий – евклидовой, проективной, геометрии Лобачевского.

Мы с детства воспринимаем натуральные числа опредмеченно, интуитивно. В школе даются и формулируются свойства натуральных чисел на содержательном уровне. Такой подход можно назвать *содержательно-интуитивным*.

В вузе в курсе числовых систем натуральный ряд определяется аксиоматически, скажем, как система Пеано [1, параграфы 17, 18; 3; 12, параграф 3.1]. Это *содержательно-аксиоматическое* определение системы натуральных чисел.

Напомним аксиоматическое определение системы Пеано. Первичные понятия: «множество $N$», «отображение $'$: $N \to N$», «элемент 1 из $N$». Таким образом, на множестве $N$ заданы унарная операция $'$ и нульарная операция выделения элемента 1. В результате получается алгебраическая структура $\langle N, ', 1\rangle$ сигнатуры $\{', 1\}$ типа (1, 0).

Алгебраическая структура $\langle N, ', 1\rangle$ называется *системой Пеано*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

P1. $n'\neq 1$ для каждого $n \in N$.

P2. $m'=n' \Rightarrow m=n$ для любых $m, n \in N$.

P3. Для любого подмножества $M$ в $N$: если 1) $1\in M$ и 2) $n\in M \Rightarrow n'\in M$ для каждого $n\in N$, то $M=N$.

Прокомментируем приведенное определение.

Интуитивно 1 – «первое» натуральное число, а операция ' означает «взятие следующего числа» $n'=n+1$. Аксиома P1 утверждает, что у 1 нет «предшествующего элемента». Аксиома P2 показывает, что «отображение ': $N\to N$» переводит различные числа в различные. Аксиома P3 – это *аксиома индукции*, алгебраический смысл которой состоит в том, что система Пеано не имеет собственных подсистем.

Предполагается непротиворечивость аксиоматики Пеано: существует хотя бы одна система Пеано. Доказывается, что любые две системы Пеано изоморфны [12, теорема 3.4]. Тем самым можно зафиксировать одну из изоморфных систем Пеано, обозначить ее N и назвать *натуральным рядом*, а элементы из N – *натуральными числами*.

В работе [3] на произвольной системе Пеано $\langle N, ', 1\rangle$ непосредственно вводится отношение порядка, что позволяет доказать общую теорему об индуктивных построениях [3; 12, теорема 3.4].

***Теорема об индуктивных построениях.*** Пусть даны произвольное множество X, элемент $x_0\in X$ и некоторая функция g: $X\times N\to X$. Тогда существует однозначно определенная функция f: $N\to X$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношениям:

1) $f(1)=x_0$ (начальное условие);

2) $f(n')=g(f(n), n)$ для каждого $n\in N$ (индуктивное условие).

На основании этой теоремы на N индуктивно определяются операции сложения и умножения (Герман Грассман, 1861 г.) и доказываются их арифметические свойства [1, параграфы 19–21; 3; 12, параграф 3.2].

*Сложение.* В N существует однозначно определенная бинарная операция сложения +, удовлетворяющая следующим соотношениям:

1) $m+1=m'$ для всех $m\in N$;

2) $m+n'=(m+n)'$ для всех $m, n\in N$.

*Умножение.* В N существует единственная бинарная операция умножения $\cdot$, обладающая следующими свойствами:

1) $m\cdot 1=m$ для любого $m\in N$;

2) $m\cdot n'=m\cdot n+m$ для любых $m, n\in N$.

*Свойства сложения и умножения***.** Для любых k, m, $n\in N$ верны соотношения:

1. $(k+m)+n=k+(m+n)$, $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot(m\cdot n)$ (ассоциативность операций).
2. $m+n=n+m$, $m\cdot n=n\cdot m$ (коммутативность операций).
3. $(k+m)\cdot n=k\cdot n+m\cdot n$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).
4. $k+m=k+n \Rightarrow m=n$, $k\cdot m=k\cdot n \Rightarrow m=n$ (законы сократимости).
5. $m< n \Leftrightarrow n=m+l$ для некоторого $l\in N$ (взаимосвязь порядка со сложением).

После этого можно систематически развить всю теорию натурального ряда N [12, глава 3].

Также аксиоматика Пеано может быть представлена как формальная аксиоматическая теория натурального ряда, когда содержательная теория излагается на формальном языке математической логики [9, глава 3]. Такой подход можно назвать формально-аксиоматическим.

Мы исповедуем содержательный подход, при котором система N натуральных чисел есть линейно упорядоченное полукольцо $\langle N, +, \cdot, \leq, 1\rangle$ с определенными дополнительно постулируемыми условиями.

Определим используемые здесь понятия и укажем упомянутые дополнительные условия.

Во-первых, N – это алгебраическая структура, являющаяся коммутативным полукольцом $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ с единицей 1 и законами сокращения, то есть алгебра с коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения + и умножения $\cdot$, дистрибутивного относительно сложения ($x(y+z)=xy+xz$ тождественно), нейтральным по умножению элементом 1 ($x1=x$ тождественно) и квазитождествами $x+y=x+z \Rightarrow y=z$, $xy=xz \Rightarrow y=z$.

Во-вторых, N – это вполне упорядоченное множество $\langle N, \leq, 1\rangle$ с наименьшим элементом 1, без наибольшего элемента и в котором любой начальный отрезок $[1, n]=\{m\in N\colon m\leq n\}$, $n\in N$, конечен (как множество).

В-третьих, отношение порядка $\leq$ сохраняется при сложении и умножении, то есть в N выполняются импликации $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$ и $x\leq y \Rightarrow xz\leq yz$ для любых $x, y, z\in N$.

Напомним, что упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Очевидно, что всякое вполне упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ будет *линейно упорядоченным*: $\forall x, y\in X$ $(x\leq y \vee y\leq x)$.

По определению, для натурального ряда N имеет место

***Принцип наименьшего элемента (ПНЭ).*** Каждое непустое множество натуральных чисел содержит наименьшее (в себе) число.

В натуральном ряду N для каждого числа $n$ число $n+1> n$ является *следующим* за $n$ числом, то есть между числами $n$ и $n+1$ нет других чисел.

Кроме того, для любого натурального числа $n\neq 1$ существует *предыдущее* число $m$, для которого $n=m+1$. В самом деле, отрезок $[1, n]$ является конечным линейно упорядоченным множеством натуральных чисел $\{1, 1+1, 1+1+1, ..., n\}$. Поэтому множество $[1, n]\backslash\{n\}$ имеет наибольший элемент $m$, и $m+1=n$.

Рассмотрим бесконечную последовательность $A$ чисел

$$1< 1+1< 1+1+1< 1+1+1+1< \ldots .$$

Этими суммами единиц исчерпываются все натуральные числа, то есть множество $A$ сумм единиц совпадает с N. Действительно, предположим от противного, что множество $N\backslash A$ не пусто. Тогда оно обладает наименьшим числом $m\neq 1$, не имеющим предшествующего элемента; получили противоречие. Тем самым любое натуральное число есть сумма числа 1 с самим собой конечное число раз. В обычной записи: $1< 2< 3< 4< \ldots< n< n+1< \ldots$ (рис. 1).

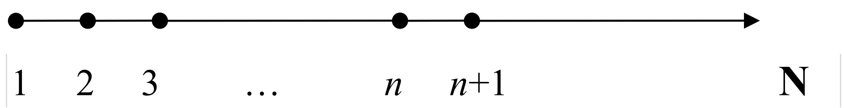


*Рис. 1.* Сумма числа 1 с самим собой конечное число раз

В системе N выполнение неравенства $m< n$ равносильно существованию единственного натурального числа $k$, для которого $m+k=n$; число $k$ играет роль разности чисел $n$ и $m$. Поэтому N допускает частичную операцию вычитания (если $m+k=n$, то $n-m=k$).

Возьмем в N произвольное множество $M$, такое, что $1\in M$ и для любого $n\in M$ верно $n+1\in M$. Значит, $A\subseteq M$, и, стало быть, $M$=N. Тем самым получаем

***Принцип математической индукции (ПМИ).*** Пусть P – свойство натуральных чисел, такое, что верно P(1) и $\mathrm{P(n)} \Rightarrow \mathrm{P(n+1)}$ для любого $\mathrm{n}\in \mathrm{N}$. Тогда P(n) верно для всех $\mathrm{n}\in \mathrm{N}$.

Отметим, что запись P(n) означает: число n обладает свойством P. Для доказательства ПМИ достаточно положить $\mathrm{M}=\{\mathrm{n}\in \mathrm{N}: \mathrm{P(n)}\}$.

ПНЭ приводит к следующей форме ПМИ:

***Вторая форма ПМИ.*** Пусть свойство P натуральных чисел удовлетворяет условию: если $\mathrm{n}\in \mathrm{N}$ и из того, что P(m) верно для каждого натурального числа m< n, следует истинность P(n). Тогда P(n) верно для всех $\mathrm{n}\in \mathrm{N}$.

Заметим, что ПНЭ, ПМИ и вторая форма ПМИ часто и существенным образом применяются для доказательства различных утверждений о натуральных числах (и не только натуральных).

**2. Система целых чисел.** Каждая из числовых систем Z, Q, R определяется и строится, опираясь на предыдущую числовую систему.

Исторически система целых чисел рассматривалась как «двухсторонний натуральный ряд» $\mathrm{Z}=\mathrm{N}\cup\{0\}\cup(-\mathrm{N})$ с естественным образом определенными порядком и арифметическими операциями [1, параграфы 22, 23], превращающими Z в дискретно упорядоченное целостное кольцо.

Алгебраически система Z определяется и конструируется как *кольцо разностей полукольца* N, на которое соответствующим образом расширяется линейный порядок из N. Именно, на множестве N×N упорядоченных пар натуральных чисел определяются операции сложения + и умножения · и отношение эквивалентности ~: для любых $a, b, c, d\in$ N

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac+bd, ad+bc),$$
$$(a, b)\sim(c, d) \Leftrightarrow a+d=b+c.$$

Мотивация введения таких формул заключается в том, что упорядоченная пара $(a, b)$ натуральных чисел $a$ и $b$ моделирует их разность: $(a, b)\equiv a-b$. Алгебраическая структура $\langle N\times N, +, \cdot\rangle$ является полукольцом, а отношение эквивалентности ~ на N×N будет конгруэнцией на этом полукольце. Соответствующее полукольцо (N×N)/~ и есть кольцо разностей полукольца N. Можно положить Z=(N×N)/~. Здесь фактически применен метод пар (Гамильтон).

Линейно упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ называется *дискретно упорядоченным*, если каждый его ненаибольший элемент имеет последующий элемент, каждый его ненаименьший элемент имеет предыдущий элемент и все отрезки в $X$ конечны. Отрезок в $X$ – это множество вида $[x, y]=\{z\in X: x\leq z\leq y\}$, где $x, y\in X$ и $x\leq y$.

Итак, *системой* Z *целых чисел* можно назвать любое дискретно упорядоченное целостное кольцо. Все такие алгебраические системы изоморфны друг другу (рис. 2).

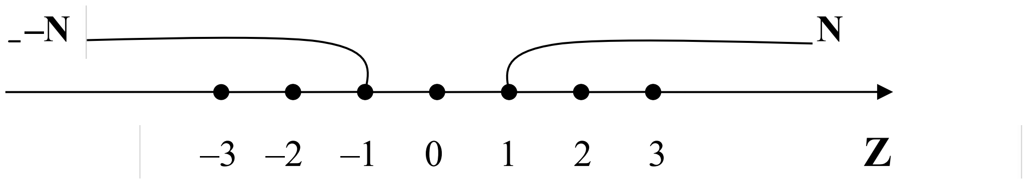


*Рис. 2.* Система Z целых чисел

Положительная часть Z – это множество $\{z\in \mathrm{Z}: 0< z\}$, равное множеству всевозможных сумм единиц 1, является упорядоченным подполукольцом в Z, изоморфным системе N натуральных чисел и отождествляемым нами с N. Множество $\{z\in \mathrm{Z}: z< 0\}$ совпадает с множеством $(-\mathrm{N})=\{-n\in \mathrm{Z}: n\in \mathrm{N}\}$. В результате и получается система $\mathrm{Z}=\mathrm{N}\cup\{0\}\cup(-\mathrm{N})$, в которой выполняются все обычные свойства сложения и умножения целых чисел. Скажем, справедливо правило знаков при умножении произвольных целых чисел $a$ и $b$: $(-a)b=a(-b)= -(ab)$. Для любых $m, n\in \mathrm{N}$ имеем: $m< n \Leftrightarrow -n< -m$. Отношение порядка на Z согласовано с операциями сложения и умножения: для любых $a, b, c\in \mathrm{Z}$ имеем $a< b \Leftrightarrow a+c< b+c$ и $a< b \Leftrightarrow ac< bc$ при $c\in \mathrm{N}$.

Напомним понятие *абсолютной величины* $|a|$ целого числа $a$: $|a|=a$ при $a\geq 0$ и $|a|= -a$ при $a< 0$. Без оговорок будем пользоваться следующими двумя свойствами абсолютной величины ($\forall a, b\in \mathrm{Z}$): $|ab|=|a|\cdot|b|$ (мультипликативность) и $|a+b|\leq |a|+|b|$ (неравенство треугольника).

В кольце Z целых чисел выполняется теорема о делении с остатком, лежащая в основе классической теории делимости целых чисел. Из нее выводится другой основополагающий факт: в кольце Z каждый идеал главный, то есть Z является *кольцом главных идеалов*.

***Теорема о делении с остатком***. Для любых целого числа a и ненулевого целого числа b существуют однозначно определенные целое число q и неотрицательное целое число r< |b|, такие, что a=bq+r. При этом число q называется (неполным) частным от деления a на b, r – остатком.

Теорема о делении с остатком показывает, что кольцо Z является евклидовым кольцом.

***Теорема об идеалах***. Кольцо Z целых чисел является кольцом главных идеалов.

Докажем эту теорему. Требуется показать, что каждый идеал $J$ кольца Z является главным, то есть $J=m\mathrm{Z}=\{mz: z\in \mathrm{Z}\}$ для некоторого целого числа $m$. Если $J=\{0\}$ – нулевой идеал, то $J=0\cdot\mathrm{Z}$. Пусть идеал $J$ содержит ненулевое число $z$. Вместе с $z$ идеал $J$ содержит и противоположное число $-z$. Значит, $J$ содержит некоторое натуральное число, то есть $J\cap\mathrm{N}\neq\varnothing$. В силу ПНЭ множество $J\cap\mathrm{N}$ имеет наименьший элемент $m$. Покажем, что $J=m\mathrm{Z}$. Включение $m\mathrm{Z}\subseteq J$ очевидно. Пусть $z\in J$. Разделим число $z$ на число $m$ с остатком: $z=mq+r$ при $q, r\in \mathrm{Z}$ и $0\leq r< m$. Число $r=z-mq$ принадлежит идеалу $J$. Поэтому в силу минимальности $m$, $r$=0. Откуда $z=mq\in m\mathrm{Z}$. Значит, $J\subseteq m\mathrm{Z}$. Стало быть, $J=m\mathrm{Z}$.

Заметим, что $(-m)\mathrm{Z}=m\mathrm{Z}$ для любого $m\in \mathrm{Z}$.

Сделаем несколько выводов из теоремы об идеалах.

(1) Любой ненулевой идеал кольца Z имеет вид $m\mathrm{Z}$ для единственного натурального числа $m$.

(2) Сумма любого непустого семейства идеалов кольца Z является главным идеалом в Z.

В частности, для любых целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ($n\in \mathrm{N}$), одновременно не равных 0, имеем:

$$m_1\mathrm{Z}+m_2\mathrm{Z}+\ldots+m_k\mathrm{Z}=d\mathrm{Z}$$

для единственного натурального числа $d$, являющегося НОД чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Например, $12\mathrm{Z}+(-20)\mathrm{Z}+36\mathrm{Z}=4\mathrm{Z}$ и $4=12\cdot4+(-20)\cdot4+36\cdot1$.

(3) Пересечение любого непустого семейства идеалов кольца Z является главным идеалом в Z.

В частности, для любых ненулевых целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ($n\in \mathrm{N}$) верно равенство

$$m_1\mathrm{Z}\cap m_2\mathrm{Z}\cap\ldots\cap m_k\mathrm{Z}=k\mathrm{Z}$$

для единственного натурального числа $k$, являющегося НОК чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Например, $12\mathrm{Z}\cap(-20)\mathrm{Z}\cap36\mathrm{Z}=180\mathrm{Z}$.

(4) Любая возрастающая относительно включения последовательность строго вложенных друг в друга идеалов кольца Z конечна.

Действительно, пусть дана строго возрастающая последовательность (конечная или бесконечная) $J_1\subset J_2\subset \ldots \subset J_n\subset \ldots$ идеалов кольца Z. Объединение $J$ этих идеалов также будет идеалом в Z. Значит, $J=m\mathrm{Z}$ для какого-то числа $m$, которое принадлежит некоторому идеалу $J_n$. Откуда $J=J_n$. И мы получаем конечную цепочку идеалов $J_1\subset J_2\subset \ldots \subset J_n$. Заметим, что для каждого натурального числа $m\neq1$ последовательность $m\mathrm{Z}\supset m^2\mathrm{Z}\supset \ldots \supset m^n\mathrm{Z}\supset \ldots$ бесконечна (счетна).

(5) Максимальные идеалы кольца Z совпадают с идеалами $p$Z по всем простым числам $p$. Нулевой идеал является единственным простым немаксимальным идеалом в кольце Z.

**3. Система рациональных чисел**. Систему Q рациональных чисел можно определить как минимальное счетное (плотное) линейно упорядоченное поле (рис. 3). *Плотность* линейно упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ означает, что для любых двух элементов $x<y$ из $X$ существует элемент $z\in X$, лежащий между $x$ и $y$, т. е. $x<z<y$. Известно, что всякое счетное плотное линейно упорядоченное множество без наименьшего и наибольшего элементов изоморфно содержательно понимаемому линейно упорядоченному множеству всех рациональных чисел [6, с. 222].

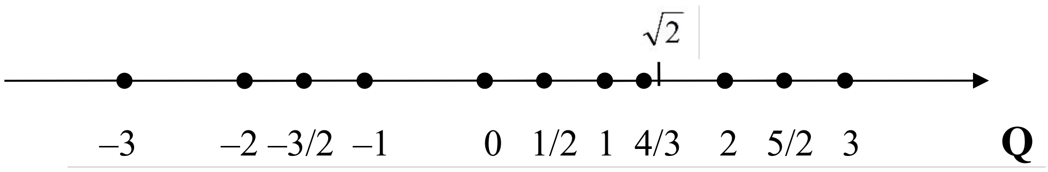


*Рис. 3.* Система Q рациональных чисел

Алгебраически система Q также определяется и строится как *поле частных кольца* Z с линейным порядком, продолжающим имеющийся на Z порядок. На множестве Z×N упорядоченных пар ($a$, $b$) чисел $a\in$ Z и $b\in$ N определяются операции сложения + и умножения · и отношение эквивалентности ~: для любых $a$, $c\in$ Z и $b$, $d\in$ N

$$(a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac, bd),$$
$$(a, b)\sim(c, d) \Leftrightarrow ad=bc.$$

Мотивация введения этих соотношений состоит в том, что упорядоченная пара ($a$, $b$) целого числа $a$ и натурального числа $b$ моделируется как их частное (дробь): $(a, b)\equiv a/b$. Отношение эквивалентности ~ на алгебраической структуре ⟨Z×N, +, ·⟩ является конгруэнцией, фактор-структура по которой и будет полем частных кольца Z. Полагаем Q=(Z×N)/~. Поле Q является минимальным полем нулевой характеристики (суммы единиц 1 не равны 0), то есть каждое поле нулевой характеристики содержит изоморфный образ поля Q в качестве подполя. Это также есть воплощение метода пар.

Содержательно линейно упорядоченное поле Q есть множество дробей $m/n=mn^{-1}$, где $m\in$ Z и $n\in$ N, со стандартными правилами сложения и умножения дробей, наделенное следующим порядком: $m/n\leq k/l \Leftrightarrow ml\leq nk$ в Z.

На поле Q определяется унарная операция – абсолютная величина рациональных чисел: $|m/n|=|m|/n$. Как и на кольце Z, абсолютная величина на поле Q обладает свойствами мультипликативности и неравенства треугольника.

**4. Система действительных чисел.** Приведем современное определение системы R действительных (вещественных) чисел. *Системой* R называется непрерывное линейно упорядоченное поле.

Поясним данное определение.

Пусть $F$ – линейно упорядоченное поле. Его наименьшее подполе изоморфно полю Q. Поэтому можно считать, что Q$\subseteq F$. Говорят, что Q *плотно в F*, когда для любых элементов $a<b$ из $F$ существует такое рациональное число $q$, что $a<q<b$. Поле $F$ называется *архимедовым*, если в нем выполняется *аксиома Архимеда*: для любых $a>0$ *и* $b$ из $F$ существует такое натуральное число $n$, что $b<na$.

Определим также понятие сечения. *Сечением* $A|B$ линейно упорядоченного множества $\langle X, \leq\rangle$ называется разбиение $X$ на два непересекающихся непустых множества $A$ и $B$, дающих в объединении $X$, при котором $x<y$ для любых $x\in A$ и $y\in B$. Элемент $r\in X$ называется *рубежом* сечения $A|B$, если $x\leq c\leq y$ при любых $x\in A$ и $y\in B$. Сечения могут иметь 0, 1 или 2 рубежа.

Сечение $A|B$ линейно упорядоченного множества $X$ называется: *щелью*, если оно не имеет рубежа; *дедекиндовым*, если оно имеет ровно один рубеж, то есть либо $A$ обладает наибольшим элементом, либо $B$ – наименьшим; *скачком*, если оно имеет ровно два рубежа, то есть $A$ обладает наибольшим элементом и $B$ обладает наименьшим элементом.

Отметим, что дискретность линейно упорядоченного множества равносильна тому, что его сечения – скачки. Линейно упорядоченные множества ⟨N, ≤⟩ и ⟨Z, ≤⟩ – дискретно упорядоченные. Каждое сечение ⟨Q, ≤⟩ либо дедекиндово (рубежом служит рациональное число), либо является щелью (порождается иррациональным числом).

Мы принимаем без доказательства следующие два утверждения:

*Утверждение 1.* Для всякого линейно упорядоченного поля F эквивалентны следующие условия:

1) F архимедово;

2) в F для любого b> 0 найдется натуральное n, такое, что 1/n< b;

3) Q плотно в P.

*Утверждение 2.* Для любого линейно упорядоченного поля F эквивалентны следующие свойства:

1) F непрерывно по Вейерштрассу, то есть любое ограниченное сверху непустое подмножество в F обладает точной верхней гранью;

2) F полно по Дедекинду, то есть каждое сечение F дедекиндово;

3) F архимедово и любая последовательность вложенных друг в друга отрезков в F имеет непустое пересечение (непрерывна по Кантору);

4) F архимедово и все фундаментальные последовательности в F – сходящиеся (полнота по Кантору).

Линейно упорядоченное поле *F* называется *непрерывным*, если оно обладает одним из эквивалентных свойств утверждения 2.

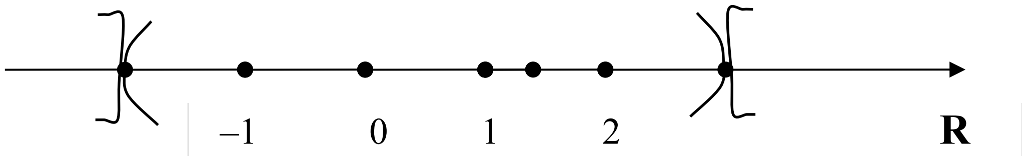


*Рис. 4.* Система R действительных чисел

Совершенно аналогично целым числам определяется абсолютная величина действительных чисел.

Дополнительно отметим, что поле R является формально вещественным замкнутым полем. Поле *P* называется *формально вещественным*, если элемент –1 не является суммой квадратов своих элементов. Формально вещественное поле *P* называется *формально вещественно замкнутым*, если оно не имеет собственных вещественных алгебраических расширений. Всякое формально вещественно замкнутое поле допускает единственное упорядочение, превращающее его в линейно упорядоченное поле. См. [8, глава XI].

*Утверждение 3.* Все положительные элементы линейно упорядоченного поля R являются квадратами, любой многочлен нечетной степени из R[x] имеет корень в R и каждое линейно упорядоченное алгебраическое расширение R совпадает с R.

Существует несколько подходов к построению системы R, исходя из системы Q. Укажем три главных подхода.

1. Подход Рихарда Дедекинда: действительные числа определяются как сечения линейно упорядоченного множества Q. При этом отождествляются сечения Q вида $(-\infty, q]|(q, \infty)$ и $(-\infty, q)|[q, \infty)$ для любого рационального числа $q$. На множестве всех таких сечений естественным образом вводятся операции сложения и умножения и отношение порядка. Можно проверить, что полученная алгебраическая система будет непрерывным линейно упорядоченным полем.

2. Подход Георга Кантора: под действительным числом понимается класс эквивалентности множества *K* всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Последовательности $(q_n)$ и $(p_n)$ называются *эквивалентными*, $(q_n)\sim(p_n)$, если $q_n-p_n\to 0$ при $n\to\infty$. Последовательности $(q_n)$ и $(p_n)$ складываются и умножаются почленно: $(q_n)+(p_n)=(q_n+p_n)$ и $(q_n)(p_n)=(q_np_n)$. Относительно этих операций множество *K* становится целостным кольцом, в котором множество *M* всех сходящихся к нулю последовательностей будет максимальным идеалом. Фактор-кольцо $K/M$ является полем, на котором можно задать порядок, превращающий $K/M$ в непрерывное линейно упорядоченное поле R. Отметим, что $K/M$ и $K/\sim$ равны как множества, причем, $(q_n)+M$ есть класс эквивалентности последовательности $(q_n)\in K$. Заметим также, что R как метрическое пространство с метрикой-расстоянием $|a-b|$ между числами $a$ и $b$ является *полным метрическим пространством* (все фундаментальные последовательности в R сходятся), служащим *пополнением* своего метрического подпространства Q.

3. *Бесконечные десятичные дроби*. Наконец, можно определить действительные числа как бесконечные десятичные дроби. При этом бесконечную смешанную периодическую дробь следует отождествить с соответствующей конечной десятичной дробью, например, 3,1415(9)≡3,1416. Однако, проверка свойств арифметических операций над бесконечными десятичными дробями несколько трудоемка и щепетильна.

Отметим, что первоначально система действительных чисел была определена Шарлем Мерэ в 1869 году.

Сравнивая три перечисленных подхода к определению действительного числа, мы при изучении теории действительных чисел отдаем предпочтение подходу Кантора, хотя подходы 1 и 3 более наглядны и «осязаемы».

При подходе Кантора действительное число, определяемое довольно абстрактно, быстро становится элементом числовой алгебраической системы. По ходу изучения повторяются и используются такие важные понятия математического анализа, как числовая последовательность рациональных чисел, ее сходимость и фундаментальность, свойства операций над последовательностями. Применяются алгебраические понятия кольца и поля, идеала и фактор-кольца. Алгебра и анализ «работают сообща». Кроме того, подход Кантора продолжает методику построения целых чисел как классов эквивалентных пар натуральных чисел и построения рациональных чисел как классов эквивалентных пар целых чисел. Метод пар, развиваясь, превращается в метод последовательностей. Заметим также, что методом пар (удвоение по размерности) можно определить поле C комплексных чисел над R (Уильям Гамильтон) и тело H кватернионов над C (Гамильтон определил кватернионы как четверки действительных чисел в 1843 г.).

В заключение параграфа рассмотрим числовые функции $[\cdot]$: $R \to R$ и $\{\cdot\}$: $R \to R$ взятия, соответственно, целой части и дробной части действительного числа. *Целой частью* действительного числа $x$ называется наибольшее целое число $[x] \leq x$, а его *дробной частью* называется действительное число $\{x\}=x-[x]$. Докажем существование целой части любого действительного числа $x$. Если число $x$ – целое, то $[x]=x$ и $\{x\}=0$. Потому будем считать число $x$ не целым. Предположим сначала, что $x>0$. В силу архимедовости R найдется натуральное число $n>x$. На основании ПНЭ среди таких чисел $n$ существует наименьшее число $m$. Тогда $m-1<x<m$. Значит, $[x]=m-1$. Пусть теперь $x<0$. Откуда $-x>0$. По доказанному, $m-1<-x<m$ для подходящего натурального числа $m$. Поэтому $-m<x<1-m$. Получаем $[x]=-m$.

Итак, для любого действительного числа $x$ имеем $x=[x]+\{x\}$. Ясно, что $0\leq \{x\}<1$. Если $x=q+r$, где $q\in Z$ и $r\in [0, 1)$, то $q=[x]$ и $r=\{x\}$. Это означает единственность представления каждого действительного числа в виде суммы целого числа и числа из промежутка $[0, 1)$. Следовательно, каждое действительное число $x$ принадлежит единственному полусегменту $[q, q+1)$ при $q=[x]$. И мы получаем следующее

*Утверждение 4.* Числовая прямая R есть дизъюнктное объединение полусегментов [q, q+1) по различным целым числам q.

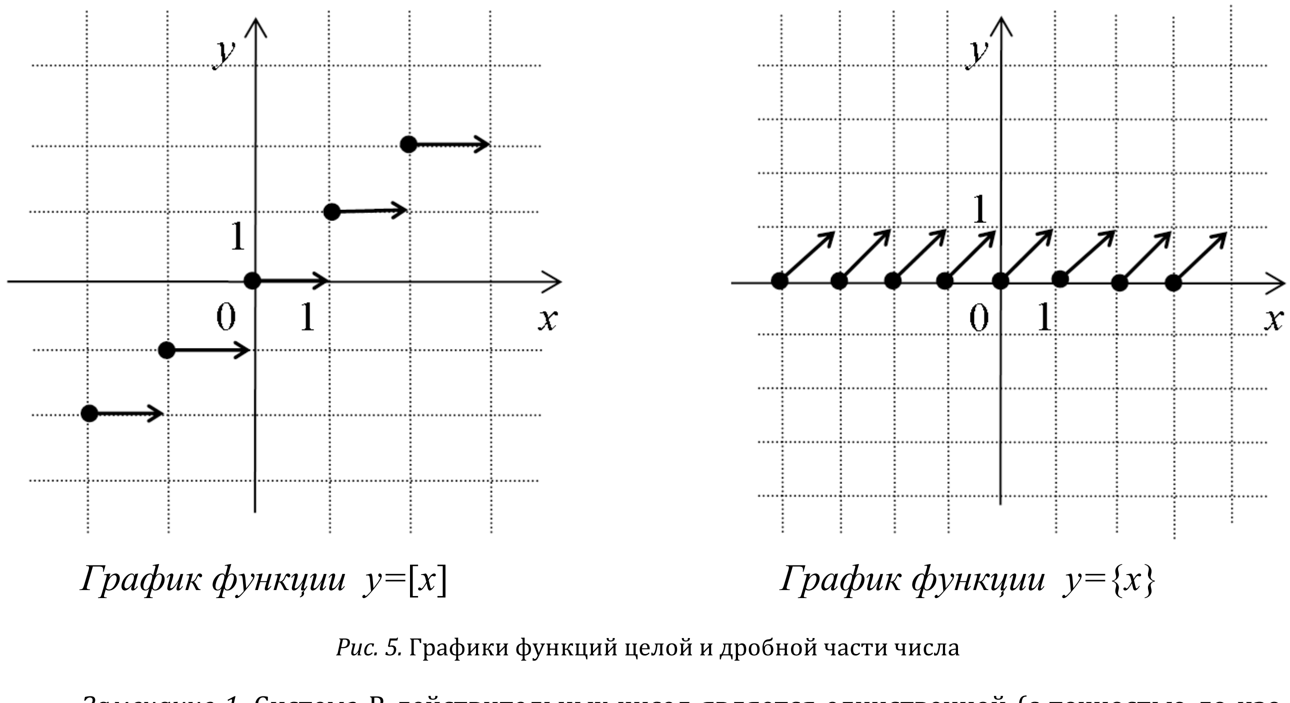


*Рис. 5.* Графики функций целой и дробной части числа

*Замечание 1.* Система R действительных чисел является единственной (с точностью до изоморфизма) конечномерной алгеброй над R без делителей нуля, в которой сумма двух квадратов ненулевых элементов отлична от нуля. См. обобщенную теорему Фробениуса [7, с. 270], в которой также фигурируют конечномерные алгебры над R без делителей нуля: поле C комплексных чисел (размерность 2), тело H кватернионов (размерность 4) и альтернативная неассоциативная алгебра Кэли (размерность 8).

*Замечание 2.* Система R может быть определена также в рамках топологической алгебры – это связное локально компактное поле, не являющееся алгебраически замкнутым [10, теорема 21]. Напомним формулировку классической теоремы Понтрягина (1932 г.): Любое связное локально компактное тело изоморфно топологическому полю действительных чисел, топологическому полю комплексных чисел или топологическому телу кватернионов. Отметим, что среди недискретных несвязных локально компактных тел встречаются поля $p$-адических чисел по различным простым числам $p$. Поля $p$-адических чисел и кольца целых $p$-адических чисел играют существенную роль в современной теории чисел [2, глава I].

*Замечание 3.* Порядковым определениям основных числовых систем посвящено дополнение 2.8.4 учебного пособия [4].

### Список литературы

1. *Арнольд И. В.* Теоретическая арифметика. Изд. 2-е. М. : Учпедгиз, 1939. 400 с.

2. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. Изд. 3-е, доп. М. : Наука, 1985. 504 с.

3. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.

4. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Упорядоченные множества и решетки. СПб. : Лань, 2024. 248 с.

5. *Игошин В. И.* Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 19–36.

6. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. Пер. с англ. М. : Мир, 1970. 416 с.

7. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. Изд. 2-е. М. : Наука, 1973. 400 с.

8. *Ленг С.* Алгебра. Пер. с англ. М. : Мир, 1968. 564 с.

9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. Пер. с англ. М. : Наука, 1971. 320 с.

10. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. Изд. 4-е. М. : Наука, 1984. 520 с.

11. *Проскуряков И. В.* Числа и многочлены. М. : Изд-во АПН РСФСР, 1949. 284 с.

12. *Феферман С.* Числовые системы. Основания алгебры и анализа. Пер. с англ. М. : Наука, 1971. 440 с.

# Numerical systems as the basis of number theory

**Vechtomov Evgeny Mikhailovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

**Abstract**. Various approaches to the definition and study of basic numerical systems are considered and analyzed. It is emphasized that numerical systems of natural numbers, integers, rational numbers, and real numbers serve as the basis for the study of number theory and number-theoretic research.

**Keywords**: basic numerical systems, study of numerical systems, number theory.

### References

1. *Arnol'd I. V. Teoreticheskaya arifmetika. Izd. 2-e* [Theoretical arithmetic. Ed. 2nd]. M. Uchpedgiz, 1939. 400 p.

2. *Borevich Z. I., Shafarevich I. R. Teoriya chisel. Izd. 3-e, dop.* [Theory of numbers. Ed. 3d, suppl]. M. Nauka (Science), 1985. 504 p.

3. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012. No. 10. Pp. 15–34.

4. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered sets and lattices]. SPb. Lan' (Deer), 2024. 248 p.

5. *Igoshin V. I. Kurs chislovyh sistem dlya pedagogicheskogo vuza* [A course of numerical systems for a pedagogical university] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2010. No. 8. Pp. 19–36.

6. *Kuratovskij K., Mostovskij A. Teoriya mnozhestv. Per. s angl.* [Theory of sets. Transl. from English]. M. Mir (World), 1970. 416 p.

7. *Kurosh A. G. Lekcii po obshchej algebre. Izd. 2-e* [Lectures on general algebra. Ed. 2nd]. M. Nauka (Science), 1973. 400 p.

8. *Leng S. Algebra. Per. s angl.* [Algebra. Transl. from English]. M. Mir (World), 1968. 564 p.

9. *Mendel'son E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. Per. s angl.* [Introduction to Mathematical logic. Transl. from English]. M. Nauka (Sceince), 1971. 320 p.

10. *Pontryagin L. S. Nepreryvnye gruppy. Izd. 4-e* [Continuous groups. Ed. 4th]. M. Nauka (Science), 1984. 520 p.

11. *Proskuryakov I. V. Chisla i mnogochleny* [Numbers and polynomials]. M. Publishing House of the Academy of Sciences of the RSFSR, 1949. 284 p.

12. *Feferman S. Chislovye sistemy. Osnovaniya algebry i analiza. Per. s angl.* [Numerical systems. Fundamentals of Algebra and Analysis. Transl. from English]. M. Nauka (Sceince), 1971. 440 p.

УДК 372.851 DOI 10.25730/VSU.0536.24.009

# К вопросу об обучении школьников построению касательной к сфере

**Леонтьева Наталия Владимировна**
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики,
Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В. Г. Короленко.
Россия, г. Глазов. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

**Аннотация**. Изучение стереометрии вызывает у школьников определенные трудности. Некоторые из них связаны с необходимостью правильно воспринимать взаимное расположение пространственных объектов, которые заданы условиями задачи. Решение задач на построение способствует формированию у них конструктивных представлений, развитию пространственного мышления. Особенно сложными для школьников являются задачи, связанные со сферой. В данной работе рассмотрен ряд задач на построение касательной плоскости к сфере, заданной различными условиями. В качестве таковых рассматриваются точка и прямая. Для каждой задачи приведено подробное решение по расширенной схеме, а также методические комментарии к выделенным этапам. Обсуждение методических особенностей решения задач на построение касательной дает возможность обосновать организацию процесса обучения школьников.

**Ключевые слова**: построения в пространстве, задачи на построение, касательная плоскость, обучение задачам на построение, стереометрия.

В процессе решения задач стереометрии школьники сталкиваются с ситуацией, когда в число рассматриваемых условий входит касательная к сфере. В этом случае у них могут возникнуть сложности с представлением их взаимного расположения. Как отмечает В. А. Далингер, именно задачи на построение способствуют развитию пространственного мышления [2, с. 40]. В таком случае можно рассмотреть ряд задач, связанных с построением касательной к сфере.

Прежде чем переходить собственно к содержанию данной работы, уточним некоторые моменты. Для решения задачи на построение будем использовать следующие основные инструменты. С помощью линейки можем через две различные точки пространства провести прямую. Плоскограф предназначен для построения плоскости по трем различным точкам пространства, не лежащим на одной прямой. Сферограф позволяет построить сферу по заданному центру и радиусу. Кроме того, будем применять так называемые базовые построения, представляющие собой основные действия, которые можно выполнять с построенными объектами. Более подробное описание указанных инструментов приведено в работе [7, с. 201]. Кроме того, при решении задач можно опираться на элементарные построения. Получаемые с их помощью фигуры можно использовать при решении других задач как один из промежуточных шагов [4]. В процессе решения задачи будем применять расширенную схему, описанную в работе [3].

Рассмотрим серию задач, связанных с различными случаями построения касательной к сфере.

***Задача 1***. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через точку, лежащую на сфере [6, с. 96].

*Визуализация*. Исходными данными к задаче являются сфера $\Omega(O, r)$ и точка $A \in \Omega$.

*Анализ*. Известно, что радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости [5, с. 102]. Кроме того, через точку прямой можно провести единственную плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

В процессе проведения анализа следует обратить внимание обучающихся на основное свойство касательной плоскости к сфере. Одновременно требуется вспомнить о том, каким образом можно построить перпендикулярную плоскость к данной прямой.

*Построение*.

1. Построим сферу $\Omega(O, r)$ и точку $A \in \Omega$.

2. Проведем прямую *OA*.

3. Построим плоскость $\pi$ через точку *A* перпендикулярно *OA*.

Плоскость $\pi$ – искомая.

Желательно, чтобы указанные шаги построения ученики сформулировали самостоятельно. При необходимости учитель оказывает помощь, для этого можно использовать следующие вопросы.

1. Что первоначально нужно построить в пространстве?
2. Какой объект нужно построить следующим?

*Доказательство*. По построению плоскость $\pi$ проходит через основание радиуса сферы и перпендикулярна к нему. Следовательно, по признаку плоскость является касательной к сфере.

*Исследование*. Поскольку каждый шаг решения задачи выполним и единственен, то задача всегда имеет единственное решение.

В процессе обсуждения необходимо акцентировать внимание обучающихся на том, как можно обосновать существование и единственность каждого шага построения.

*Динамическое конструирование*. При построении модели задачи выберем произвольную точку на сфере, положение которой можно менять. В таком случае появляется возможность наглядно продемонстрировать существование и единственность решения.

В данном случае все этапы решения описаны словесно, наглядно представить результаты построения можно с помощью интерактивных математических систем, в частности, с помощью динамической среды GeoGebra.

Рассмотрим следующую задачу.

***Задача 2***. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через заданную прямую, не имеющую общих точек со сферой.

*Визуализация*. В числе исходных данных выделим сферу $\Omega(O, r)$, прямую *a*, не пересекающую сферу.

*Анализ*. Предположим, что задача решена (рисунок 1).

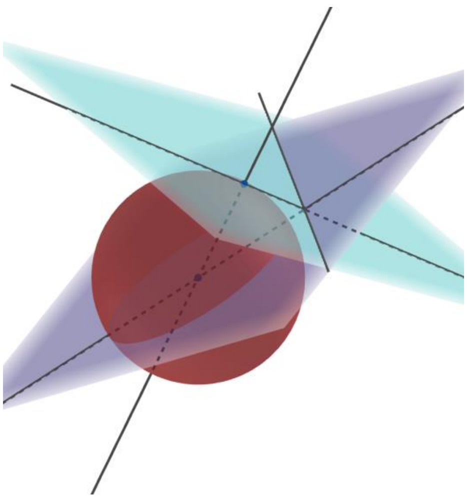

*Рис. 1.* Иллюстрация к решению задачи

Через точку касания проведем перпендикуляр *g* к прямой *a*. Соединим основание перпендикуляра с центром сферы. Перпендикуляр *g* касается сферы. Соответственно, построим указанный перпендикуляр. Тогда плоскость, проходящая через перпендикуляр *g* и прямую *a*, является касательной к сфере. Задача свелась к построению прямой, перпендикулярной к заданной прямой и касающейся сферы.

Проведем плоскость через центр сферы и построенный перпендикуляр, которая пересекает сферу по окружности $\omega$. Построенная плоскость перпендикулярна прямой *a*. Такую плоскость всегда можно построить. Прямая *g* также является касательной к $\omega$.

Для построения перпендикуляра *g* можно воспользоваться задачей о построении касательной к окружности [1, с. 257]. В результате получаем точку, через которую проходит касательная плоскость.

При анализе задачи со школьниками удобнее использовать рассуждения с конца. В результате можно выстроить последовательную цепочку геометрических объектов, которая дает возможность решить задачу.

*Построение*.

1. Построим сферу $\Omega(O, r)$, прямую *a*, не пересекающую сферу.
2. Построим плоскость $\pi$ через точку *O*, перпендикулярную *a*.

3. Найдем линию пересечения $\omega_0$ сферы $\Omega$ и плоскости $\pi$.

4. Найдем точку *OX* пересечения плоскости и прямой *a*.

5. На отрезке *OX* как на диаметре построим сферу $\Omega_0$.

6. Найдем линию пересечения ω сфер $\Omega$ и $\Omega_0$.

7. Построим точку пересечения *A* окружностей $\omega_0$ и ω.

8. Через точку *A* и прямую *a* проведем плоскость *σ*.

Плоскость *σ* – искомая.

Описание процесса построения желательно сопроводить обсуждением того, как можно выполнить тот или иной шаг.

*Доказательство*. Из построения следует, что радиус *OA* перпендикулярен *a* и *AX*. Прямые *AX* и *a* лежат в плоскости *σ.* Плоскость *σ* перпендикулярна радиусу *OA*, следовательно, является касательной к сфере.

*Исследование*. Поскольку существует две точки пересечения окружностей $\omega_0$ и ω, то задача имеет два различных решения.

На этом этапе желательно обратить внимание обучающихся на то, что возможны два варианта решения, которые мы не учитываем при выполнении шагов построения.

*Динамическое конструирование*. При построении модели задачи требуется построить сферу, прямую, не пересекающую сферу. Будем считать положение сферы фиксированным, менять будем произвольно положение прямой. Итоговым результатом будем считать две плоскости, удовлетворяющие условию задачи.

Затем можно предложить ученикам изменить условия последней задачи.

***Задача 3***. Как изменится решение задачи, если допустить, что прямая касается сферы?

*Решение*. Поскольку прямая касается сферы, то она имеет с ней ровно одну общую точку, в этом случае задача сводится к задаче 1.

***Задача 4***. Как изменится решение задачи, если прямая пересекает сферу?

*Решение*. Предположим, что касательная плоскость построена. Прямая, пересекающая сферу, имеет с ней две общие точки, которые по условию лежат в касательной плоскости. В результате получаем противоречие с определением касательной плоскости. Соответственно, задача решения не имеет.

При обсуждении рассмотренных задач следует особое внимание уделить обоснованию проводимых рассуждений.

Можно предложить ученика в задаче 2 заменить прямую точкой.

***Задача 5***. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящую через заданную точку, лежащую вне сферы.

*Визуализация*. В числе исходных данных выделим сферу $\Omega(O, r)$ и точку *A*.

*Анализ*. Предположим, что задача решена (рисунок 2).

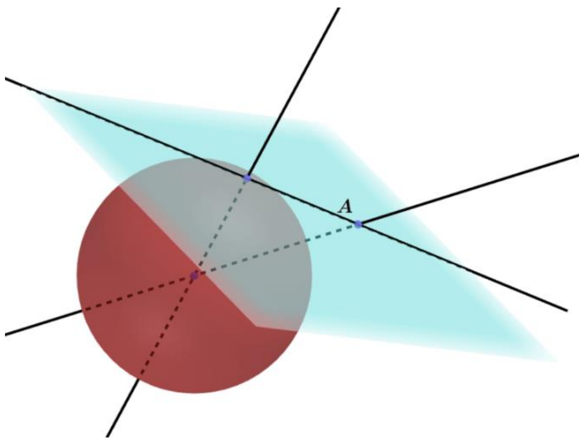


*Рис. 2.* Анализ задачи

Соединим точку касания с центром окружности и точкой *A*. Если провести через три рассмотренные точки плоскость, то прямая, проходящая через точку касания и точку *A,* является касательной, и задача сводится к построению касательной к окружности.

*Построение*.

1. Построим сферу $\Omega(O, r)$, прямую *a*, не пересекающую сферу.

2. На отрезке *OA* как на диаметре построим сферу $\Omega_0$.

3. Найдем линию пересечения ω сфер Ω и $\Omega_0$.

4. Соединим некоторую точку *X* окружности ω с центром сферы.

5. Через точку *X* проведем плоскость *σ*, перпендикулярную прямой *OX*.

Плоскость *σ* – искомая.

*Доказательство*. Аналогично доказательству задачи 2.

*Исследование*. В данной задаче точка *X*, лежащая на окружности ω, может быть выбрана произвольно. Соответственно, задача является неопределенной.

*Динамическое конструирование*. При построении модели основным динамическим элементом будет являться выбранная произвольно точка *X* на окружности ω. Изменение положения данной точки позволяет продемонстрировать неопределенность задачи.

Рассмотрение различных случаев, связанных с построением касательной плоскости к сфере, позволяет ученикам лучше понять взаимное расположение этих двух геометрических объектов. Кроме того, школьники могут наглядно представить те случаи, когда построение касательной невозможно, а также когда задача является неопределенной.

## Список литературы

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. СПб. : Санкт-Петербург оркестр, 1994. 416 с.

2. *Далингер В. А.* Геометрия: планиметрические задачи на построение : учебное пособие для вузов. М. : Юрайт, 2021. 155 с. URL: https://urait.ru/bcode/473822 (дата обращения: 28.03.2022).

3. *Леонтьева Н. В.* Методика обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы // Вестник Вятского государственного университета. 2022. № 4 (146). С. 121–132. DOI: 10.25730/VSU.7606.22.061.

4. *Леонтьева Н. В.* Применение элементарных построений при решении задач конструктивной геометрии в пространстве // Вестник педагогического опыта. 2022. № 53. С. 37–41.

5. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян и др. М. : Просвещение, 2018. 256 с.

6. *Наумович Н. В.* Геометрические места в пространстве и задачи на построение. М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1962. 152 с.

7. Энциклопедия элементарной математики. Книга 4. Геометрия. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1953. 568 с.

# The tangent to the sphere is equated to the question of teaching schoolchildren

**Leontieva Natalia Vladimirovna**

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Glazov State University of Engineering and Pedagogical n. a. V. G. Korolenko.

Russia, Glazov. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

**Abstract**. The study of stereometry causes certain difficulties for schoolchildren. Some of them are related to the need to perceive the relative location of spatial objects that are set by the conditions of the task. Solving the construction task contributes to the formation of constructive ideas among them, the development of spatial thinking. Tasks related to the field become especially difficult for schoolchildren. In this paper, we consider a number of tasks for constructing a tangent plane to a sphere defined by various conditions. A point and a straight line are considered as such. For each task, a detailed solution is provided according to the extended scheme, as well as methodological comments on the highlighted stages. The discussion of the methodological features of solving the tangent problem makes it possible to justify the organization of the learning process for schoolchildren.

**Keywords**: construction in space, construction tasks, tangent plane, construction tasks, stereometry.

## References

1. *Vygodskij M. Ya. Spravochnik po elementarnoj matematike* [Handbook of Elementary Mathematics]. SPb. St. Petersburg orchestra, 1994. 416 p.

2. *Dalinger V. A. Geometriya: planimetricheskie zadachi na postroenie : uchebnoe posobie dlya vuzov* [Geometry: planimetric construction tasks : textbook for universities]. M. Yurayt, 2021. 155 p. Available at: https://urait.ru/bcode/473822 (date accessed: 28.03.2022).

3. *Leont'eva N. V. Metodika obucheniya resheniyu zadach na postroenie v prostranstve na osnove rasshirennoj skhemy* [Methods of teaching solving spatial construction problems based on an extended scheme] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Vyatka State University. 2022. No. 4 (146). Pp. 121–132. DOI: 10.25730/VSU.7606.22.061.

4. *Leont'eva N. V. Primenenie elementarnyh postroenij pri reshenii zadach konstruktivnoj geometrii v prostranstve* [Application of elementary constructions in solving problems of constructive geometry in space] // *Vestnik pedagogicheskogo opyta* – Herald of Pedagogical Experience. 2022. No. 53. Pp. 37–41.

5. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. 10–11 klassy : ucheb. dlya obshcheobrazovat. organizacij: bazovyj i uglublennyj urovni* – Mathematics: algebra and the beginning of mathematical analysis, geometry. Geometry. Grades 10–11: studies. for general education. organization: basic and advanced levels / L. S. Atanasyan et al. M. Prosveshchenie (Enlightenment), 2018. 256 p.

6. *Naumovich N. V. Geometricheskie mesta v prostranstve i zadachi na postroenie* [Geometric places in space and construction tasks]. M. State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR, 1962. 152 p.

7. *Enciklopediya elementarnoj matematiki. Kniga 4. Geometriya* – Encyclopedia of Elementary Mathematics. Book 4. Geometry. M. State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1953. 568 p.

УДК 51-7 DOI 10.25730/VSU.0536.24.010

# О математических аспектах методологии подготовки будущих учителей предмета «Технология» в цифровую эпоху

**Перминов Евгений Александрович**
доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики и физики,
Уральский технический институт связи и информатики. Россия, г. Екатеринбург.
ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

**Аннотация**. В цифровую эпоху происходит постоянное обновление высокотехнологичных отраслей современного производства в процессе их ускоренной автоматизации и роботизации и внедрения в них Искусственного интеллекта. В этом велико значение современной математики как математической основы языка современных высоких технологий (Hi-Tech). Поэтому актуальна проблема обеспечения опережающего характера математической подготовки будущих учителей предмета «Технология», играющего важную роль в социализации учащихся, особенно в их вхождении в мир технологий.

Целью работы является исследование математических аспектов методологии подготовки будущих учителей технологии. Исследование основано на методах анализа философской, математической, культурологической, психолого-педагогической, методической и нормативной литературы по математике, информатике и предметной области «Технология».

Обосновано, что знание математического аппарата этой предметной области в реалиях цифровой эпохи способствует развитию у будущих учителей технологии новых ключевых компетенций, позволяющих находить комплексные технологические решения на основе междисциплинарного синтеза знаний математики и естественных наук. В этом ведущую роль играет их обучение математическому моделированию с использованием компьютера и дискретной (компьютерной) математике.

Эти области математики как наиболее яркие проявления современной математической культуры исследований имеют фундаментальное значение в формировании у будущих учителей технологии междисциплинарного мышления и навыков проектной деятельности. Они лежат в основе методики формирования у них важных элементов технологической культуры посредством формирования представлений о видах задач математического и других видов моделирования объекта, процесса или явления.

Результаты статьи будут способствовать модернизации методической системы профильной подготовки будущих учителей технологии в реалиях цифровой эпохи. Они могут служить практической основой отбора содержания специальных курсов их подготовки и курсов методики профильного обучения школьников проектной деятельности.

**Ключевые слова**: цифровая эпоха, будущие учителя технологии, методология подготовки, математические аспекты.

В цифровую эпоху в условиях постоянного, ускоренного обновления производственных технологий на основе их автоматизации и роботизации и внедрения Искусственного интеллекта важно обеспечить опережающий характер подготовки будущих учителей предмета «Технология», играющего важную роль в социализации учащихся, особенно в их вхождении в мир технологий.

Несомненно, цели и содержание обучения предметной области «Технология» (возможно, и название предмета «Технология») будет перманентно изменяться в условиях лавинообразного распространения новых высоких технологий цифровой эпохи. В статье будет обосновано, что в условиях математизации наук [16] все более возрастающую роль в обеспечении опережающего характера профильного обучения школьников этой предметной области будет играть математика.

Игнорирование роли математики и порожденного ею процесса математизации наук (и как следствие их цифровизации) приводит к большим рискам, прежде всего в высокотехнологичных отраслях производства, в которых все больше реальных объектов управляется с помощью компьютеров и их программного и аппаратного обеспечения. Поэтому еще на рубеже веков выдающийся математик В. И. Арнольд предупреждал, что «математическая безграмотность губительнее костров инквизиции» [1].

Как показывает анализ содержания подготовки по направлению «Математика и компьютерные науки», открытого недавно в ведущих университетах России, важную роль в разработке новых поколений компьютеров и их программного и аппаратного обеспечения играет научная область «Компьютерные науки», в которой велико значение дискретной математики, являющейся основой языка информационных технологий.

Исследование математических аспектов методологии подготовки будущих учителей предмета «Технология (труд)» играет важную роль в решении актуальной проблемы преодоления негативных последствий многочисленных диспропорций, существующих в их подготовке, в том числе – диспропорций между фундаментализацией, цифровизацией, дифференциацией, гуманитаризацией и другими тенденциями современного образования. В результате в условиях большой свободы, предоставляемой вузам компетентностными ФГОС ВО, в отборе содержания подготовки будущих учителей технологии наблюдается «"размывание" предметного содержания, формирование фрагментарных, несистемных знаний» [8, с. 112]. В свою очередь это является большим препятствием в развитии проектного обучения как ведущей формы учебной деятельности учащихся, важной в формировании их технологической грамотности. Отметим, что ее концепция в 90-х гг. прошлого века была принята за основу школьных программ по технологии во многих странах мира.

Таким образом, является актуальной *цель* статьи, заключающаяся в исследовании математических аспектов методологии подготовки будущих учителей технологии.

Для исследования математических аспектов этой методологии было проанализировано содержание работ, так или иначе связанных с темой исследования. Укажем только наиболее важные из этих работ. В постиндустриальном обществе в условиях широкого распространения высоких технологий в соответствии с логикой исследования необходимо было сначала проанализировать работы, посвященные проблемам методологии реализации междисциплинарности образования [4; 18], важной в модернизации сложившейся в стране системы профессиональной подготовки кадров, в том числе модернизации подготовки педагогов-профессионалов [25].

В проведенном исследовании важную роль играли результаты работы [10] о роли ДМ как математической основы языка информационных технологий, а также работ [19; 22], посвященных формированию технологической культуры.

В исследовании ведущую роль играл анализ литературы по реализации междисциплинарного подхода и культурологического подхода в математической подготовке учителей технологии, математической, методической и нормативной литературы по предметной области «Технология».

Проведенный анализ междисциплинарных и культурологических аспектов модернизации методической системы профильной подготовки будущих учителей технологии в реалиях цифровой эпохи свидетельствует о возрастающей роли предмета «Технология. Поэтому «отсутствие часов на изучение предмета «Технология» в старших классах … создает проблемы для реализации необходимого технологического образования и трудового воспитания молодежи» [21, с. 11].

Действительно, назрела необходимость внедрять профильное обучение этому предмету учащихся 10–11 классов с целью формирования их представлений о разнообразии и уровне развития высоких технологий, в которых лидирующую роль играет процесс математизации науки и современная математическая культура исследований с использованием уникальных возможностей компьютера.

**Результаты исследования.** 1. *О математических аспектах методологии реализации междисциплинарного подхода.* В последние десятилетия ведущей тенденцией в образовании постиндустриального общества становится междисциплинарный подход, имеющий фундаментальное значение в подготовке будущих профессионалов, способных переходить от выполнения одних производственных функций к другим и даже менять специальность и профессию.

Поэтому закономерно, что проблемам реализации междисциплинарного подхода в образовании в педагогической науке в последнее время уделяется достаточно много внимания (в том числе инженерному образованию [3; 25]). Одной из наиболее фундаментальных работ по междисциплинарности образования является статья В. С. Сенашенко [19]. В этой работе обсуждается проблема междисциплинарности образования как отражения междисциплинарности социальной и профессиональной деятельности. В нашем исследовании важную роль играет трактовка междисциплинарности образования будущих учителей технологии как обеспечение целенаправленного формирования их умений и навыков комплексного использования знаний математики, информатики, физики и других естественных наук при решении учебных задач предмета «Технология».

В методологии реализации междисциплинарного подхода в подготовке будущих учителей предмета «Технология» фундаментально значение математики как математической основы языка современных высоких технологий. В том числе – наиболее новых и прогрессивных технологий, среди которых высокие технологии автоматизации и роботизации производства, Искусственного интеллекта, ракетно-космических исследований, атомных производств, самолетостроения и др.

В основе разработки и внедрения той или иной высокой технологии лежат процессы генерации, кодирования, передачи, считывания и реализации информации [2], в чем велико значение дискретной математики как математической основы языка информационных технологий.

Таким образом, знание математического аппарата предметной области «Технология» в реалиях цифровой эпохи способствует формированию у студентов этого профиля подготовки важных технологических компетенций на основе междисциплинарного синтеза знаний математики, информатики, физики и других естественных наук. В связи с этим важно учесть, что все современные высокие технологии разработаны на основе выдающихся достижений математики и других естественных наук, что важно учесть в достижении опережающего характера подготовки будущих учителей технологии. В том числе – в методике обучения проектной творческой деятельности школьников. Пока же в российских школах плохо развивается проектная деятельность и исследовательские практики, которые бы не ограничивались ориентацией детей на школьные предметы, а рассматривали бы явления через призму различных областей знаний.

Все вышеизложенное имеет фундаментальное значение в подготовке студентов к формированию не только математической функциональной грамотности школьников, но и в их подготовке к формированию их функциональной информационной, естественно-научной и социально-культурной грамотности, лежащих в основе их социализации в современном цифровом мире и обществе.

В методологии реализации междисциплинарного подхода главной целью в подготовке будущих учителей технологии должно стать формирование у них междисциплинарного стиля мышления и умение организовать учебный процесс с использованием проектной деятельности на междисциплинарной основе. Как будет обосновано ниже, в этом ведущую роль играет их обучение математическому моделированию с использованием компьютера, дискретной математике и вычислительным процессам, имеющим фундаментальное значение в формировании у них междисциплинарного мышления и проектной деятельности, особенно в классах технологического (инженерного) профиля.

К сожалению, до сих пор система обучения будущих учителей-предметников, как правило, остается узкодисциплинарной, не учитывающей фундаментальное значение математики и ее междисциплинарных связей в исследовательской практике в самых различных научных сферах науки и производства. Тем самым – не учитывающей ее значение в проектной деятельности школьников, особенно старшеклассников, что особенно препятствует подготовке будущих учителей предмета «Технология». В соответствии с традиционной методологией разные компоненты содержания обучения рассматриваются отдельно друг от друга, более того, часто противопоставляются друг другу. Таким образом, весьма актуальным является преодоление разрыва между требованиями к междисциплинарной целостной профессиональной подготовке современных учителей и сложившейся системой их подготовки в реалиях современной цифровой эпохи, порожденных математикой и компьютерными науками.

Важное сравнение роли математики и компьютера привел ректор МГУ В. А. Садовничий: «Если за 20 лет (с 1992 по 2012) скорость компьютеров увеличилась примерно в 8 тысяч раз, то за счет развития математических методов скорость расчетов увеличилась более чем в 400 тысяч раз» [18, с. 9]. Поэтому следует подчеркнуть, что в условиях современной компьютерной революции нельзя ориентироваться в предметной области «Технология» в основном на материальные технологии (ручного труда), особенно в VIII–IX классах. Как следует из изложенного, назрела необходимость внедрения предмета «Технология» в учебный план технологического (инженерного профиля) с углубленным изучением математики и физики [15]. Наряду с этим необходимо включение элементов технологических знаний в общеобразовательные школьные дисциплины. Особенно – в математику и физику, лежащих в основе исследований технических наук, играющих ведущую роль в современных высокотехнологичных отраслях промышленности.

Необходима также подготовка будущих учителей технологии к технологическому просвещению старшеклассников (концепцию которого еще предстоит разработать).

2. *О роли математического моделирования и дискретной математики в методологии реализации культурологического подхода*. Как показывает историко-философский анализ развития математики, «самыми яркими проявлениями этой новой ступени «всечеловеческой» культуры, оказывающими наибольшее воздействие на математическое образование, являются математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы [12, с. 50].

В работе [13] кратко охарактеризована фундаментальная роль математического моделирования в реализации культурологического подхода в подготовке будущих учителей к профильному обучению предмету «Технология». В этой же работе охарактеризованы важные культурологические аспекты особенности разработки методики обучения начальным элементам математического моделирования и дискретной математики. В частности, охарактеризована роль этих областей математики в разработке методики формирования технологической грамотности, критического и креативного мышления учащихся.

В результате в работе [13] охарактеризованы важные методические особенности подготовки будущих учителей технологии к обучению школьников самостоятельному построению «полной цепочки использования компьютеров: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов» (в терминологии выдающегося математика Н. Н. Красовского) [6, с. 13]. В основе методики формирования технологической культуры учителей технологии лежит формирование у них представлений о видах задач, возникающих в математическом и других видах моделирования объекта, процесса или явления в процессе разработки высоких технологий: производственных, социальных и других.

Для дальнейшего исследования необходимо указать, что это «задачи следующих видов:

1) с неверно составленным условием;

2) с не найденным решением;

3) не имеющие решения (например, задача создания вечного двигателя);

4) имеющие решение на языке какой-либо науки или нескольких наук;

5) имеющие решение, но с бесконечным алгоритмом решения задачи исследования объекта, процесса или явления;

6) имеющие решение с конечным, но с «плохим» (экспоненциальным) алгоритмом решения задачи;

7) имеющие решение с «хорошим» *эффективным* алгоритмом решения» [13, с. 7].

Методика обучения решению задач всех перечисленных типов, по существу, способствует формированию у учащихся важных умений различать, что можно и чего нельзя сделать с помощью компьютера в мире материальных, информационных, коммуникационных, когнитивных, социальных технологий и других технологий.

В основе формирования этих важных умений лежат ставшие обшеобразовательными понятия ДМ. Как следует из изложенного в [10], к числу таких понятий ДМ метапредметного содержания обучения математике и информатике в школе следует в первую очередь отнести понятия: бинарное отношение и граф, алгебраическая операция и алгебра, высказывание и логическая операция с высказываниями, комбинаторная конфигурация, математическая модель, изоморфные («равные») модели и другие.

В учебных пособиях [9; 11] на основе методики развивающего обучения и задачного подхода изложены эти и другие посильные восприятию школьников понятия и их свойства. В том числе – многочисленные различные задачи по ДМ практического содержания. Причем в [9] показано на примерах, как по-разному решают задачи введенные и охарактеризованные в пособии персонажи Смекалкин, Ленивкин и Кнопкин.

Эта методика является культурологическим ориентиром в методике обучения математике и информатике будущих учителей предмета «Технология. В том числе – ориентиром к внедрению в региональный и местный компоненты системы технологического образования отдельных модулей «среднего профессионального образования и высшего образования в соответствии с профилем обучения по выбранным ими профессиям» [5, с. 10].

Учебное пособие по ДМ для школьников [9] и указанную в нем литературу для чтения можно также использовать в реализации проектного метода для творческого развития учащихся при их обучении предмету «Технология». В частности, в процессе изучения на элективных курсах понятий и их свойств из этого пособия можно предложить интересные для учащихся темы проектов. Например – группы симметрий в дизайне, архитектуре и искусстве; логические элементы в конструировании привода робота; графы в проектировании транспортных магистралей и линий газо- и нефтепроводов; алгебра остатков (от деления натуральных чисел) в шифровании и др.

Важно подчеркнуть, что в свою очередь включение элементов технологических знаний в математику, а также в информатику, физику и другие школьные дисциплины является весьма актуальной и сложной проблемой подготовки школьников к их вхождению в мир технологий. Как следует из изложенного, в решении этой проблемы фундаментально значение полученных результатов анализа междисциплинарной и культурологической роли методологии математики в подготовке будущих учителей предмета «Технология» в цифровую эпоху.

3. *О роли вычислительных процессов.* Как уже отмечалось, *вычислительные процессы* наряду с математическим моделированием и ДМ являются наиболее яркими проявлениями современной математической культуры исследований.

Как известно, «функционирование сложных систем управления технологическими процессами, энергетическими и другими важными системами обеспечивается вычислительным процессом, реализуемым специализированным или универсальным компьютером, который все чаще становится наиболее важным узлом данных систем» [12, с. 54]. Несомненно, корректное осуществление вычислительного процесса требует от современного технолога весьма универсальных познаний в той специальной области технологической сферы, в которой реализуется им вычислительный процесс. Но как показывает проведенный в работе [10] анализ предмета и функций ДМ, корректная реализация вычислительного процесса специализированным компьютером во взаимодействии с математиками и программистами требует от него соответствующих представлений о теории алгоритмов и формальных языков и др., являющихся областями современной дискретной математики.

Важно подчеркнуть, что в корректной реализации вычислительного процесса фундаментальна роль вычислительного эксперимента, предваряющего его реализацию в технологии производства. В проведении вычислительного эксперимента велика роль не только перечисленных областей ДМ, но экспериментальной математики, элементы которой уже внедрены в обучение математике в школе [24]. При этом в проведении вычислительного эксперимента перед внедрением той или иной технологии стали широко использоваться системы компьютерной математики (СКМ). В их умелом использовании важно знание и умелое использование языков программирования, разрабатываемых на основе теории формальных языков как области ДМ.

Важно подчеркнуть, что в цифровую эпоху значение вычислительного эксперимента (в отличие от натурного) велико в разработке и дальнейшей экспертизе конструкций, устройств, изобретений и др., лежащих в основе функционирования той или иной технологии. При этом в основе их разработки лежат идеальные, существующие лишь в воображении модели, которые ни в коем случае не должны оказаться карикатурой на действительность. В этом велика роль синергии (эффекта) взаимодействия дискретной и непрерывной математики [14] как математической основы разработки таких моделей в процессе проведения серии вычислительных экспериментов. В частности, такой синергетический эффект происходит при изучении разнообразных формальных систем моделирования и алгоритмизации с использованием компьютера, которые особенно важны во внедрении в высокие технологии Искусственного интеллекта.

Как следует из изложенного, в содержании математической подготовки будущих учителей технологии необходимо отразить важные элементы теорий алгоритмов, формальных языков и СКМ, экспериментальной математики и Искусственного интеллекта. Эти теории лежат в основе классификации ранее перечисленных типов задач, возникающих в математическом и других видах моделирования объекта, процесса или явления.

Важно подчеркнуть, что знание и умелое использование теории алгоритмов важно в распознавании вычислительных задач с бесконечным алгоритмом решения или с конечным, но с экспоненциальным («плохим») алгоритмом решения. В свою очередь знание и умелое использование теории формальных языков и СКМ лежит в основе корректного выбора языков программирования для решения задач, имеющих эффективный («хороший») алгоритм решения.

Таким образом, важные элементы теорий алгоритмов, формальных языков и СКМ необходимы в формировании математической культуры учителя технологии. В том числе – в формировании умений различать, что можно и чего нельзя сделать с помощью компьютера в мире материальных, информационных, коммуникационных, социальных и других технологий цифровой эпохи.

Как следует из изложенного, в формировании технологической грамотности школьников важную роль играет формирование у них представлений о базовых понятиях математического моделирования, дискретной математики и вычислительных процессах. Эти базовые понятия имеют также фундаментальное значение в формировании метапредметного содержания образования в ФГОС среднего (полного) общего образования, что также важно учесть во внедрении предмета «Технология» в учебный план технологического (инженерного) профиля с углубленным изучением математики и физики. В том числе – во включении элементов технологических знаний в общеобразовательные школьные дисциплины, изучаемые в старших классах.

**Заключение.** В подготовке учителя технологии важную роль играет междисциплинарный и культурологический подходы, реализуемые на основе самых ярких достижений современной «всечеловеческой» культуры исследований, какими являются математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы. Роль этих областей математики лежит в основе формирования умений решать технологические задачи и проблемы на основе различных видов моделирования с использованием компьютера и, как следствие, в отборе содержания подготовки будущих учителей технологии и в формировании у них технологической культуры цифровой эпохи.

Следует отметить, что в работах ряда других авторов не отражено методологическое значение идей и методов указанных областей математики как основы формирования у учителей технологии фундаментальных умений различать, что можно и чего нельзя сделать с помощью компьютера в мире технологий. Это важно в формировании у них представлений о перечисленных ранее видах задач, возникающих в процессе разработки производственных, социальных и других высоких технологий.

В формировании этих фундаментальных умений препятствует распространение некорректных, не прошедших стандартизацию информационных технологий (ИТ), причем разработанных подчас далекими от математики и программирования специалистами, гарантирующими быстрый эффект. К тому же воздействие таких некорректных ИТ усиливается деградацией физико-математической подготовки в школах и вузах. Это отмечают выдающиеся ученые в области математики и физики и методики их обучения [7; 16]. В то же время все уникальные технологии цифровой эпохи были разработаны «на основе достижений математики и физики за последние десятилетия в процессе давно происходящей математизации и начавшейся физизации наук, т. е. проникновения их идей и методов в естественные, технические (инженерные) и другие науки» [21, с. 20]. Все это является еще одним важным свидетельством актуальности полученных результатов проведенного исследования.

Знание математического аппарата предметной области «Технология» имеет фундаментальное значение в подготовке будущих учителей технологии к формированию математической функциональной грамотности школьников, лежащей в основе формирования у них технологической грамотности в использовании уникальных возможностей компьютера.

В методологии реализации междисциплинарного подхода на основе математического аппарата предметной области главной целью должно стать формирование у будущих учителей технологии междисциплинарного стиля мышления и умений организовать учебный процесс с использованием проектной деятельности на междисциплинарной основе.

## Список литературы


1. *Арнольд В. И.* Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции // Газета «Известия». 16 января 1998 г.

2. *Жукова А. Е.* Проблема классификации высоких технологий // Вестник Томского гос. педаг. ун-та. 2008. Вып. 1 (75). С. 34–46.

3. *Иванов В. Г., Кайбияйнен А. А., Галиханов М. Ф.* Междисциплинарность как вектор развития инженерного образования (обзор сетевой конференции) // Высшее образование в России. 2016. № 8–9. С. 149–160.

4. *Колесников А. В., Сиренко С. Н.* Междисциплинарность, синергетика и грядущий новый этап научно-технической революции как предпосылки обновления содержания высшего образования. Научные труды Республиканского института высшей школы. Минск, 2016. № 16–2. С. 344–351.

5. Концепция преподавания предметной области «Технология» в образовательных организациях Российской Федерации, реализующих основные общеобразовательные программы. URL: http://uchutrudu.ru/kontseptsiya-predmetnoy-oblasti-2019/.

6. *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе. Екатеринбург : Известия УрГУ, 1995. № 4. С. 12–24.

7. *Красовский Н. Н.* Размышления о математическом образовании // Известия УрГУ. 2003. № 27. С. 5–11.

8. *Пичугина Г. В.* Типичные ошибки, риски и заблуждения в организации проектной деятельности школьников : мат-лы XXI Междун. научно-практической конф. «Современное технологическое образование в школе и педагогическом вузе». М. : МПГУ, 2015. 300 с.

9. *Перминов Е. А.* Дискретная математика : учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург : ИРРО, 2004. 206 с.

10. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений в аспекте интеграции образования : монография. Изд. 2-е, дополн. и испр. Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2019. 287 с.

11. *Перминов Е. А.* Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений : учебное пособие. Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2015. 256 с.

12. *Перминов Е. А.* О методологических аспектах реализации культурологического подхода в математическом образовании // Педагогика. 2011. № 9. С. 49–55.

13. *Перминов Е. А.* О роли культурологического подхода в обучении предмету «Технология» учащихся профильных классов : мат-лы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Самара : СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2019. С. 66–68.

14. *Перминов Е. А., Тестов В. А.* Математизация профильных дисциплин как основа фундаментализации IT-подготовки в вузах. Образование и наука. 2024. № 7 (26). С. 12–43.

15. Приказ Минпросвещения РФ № 62 от 1 февраля 2024 г. о внесении изменений в Федеральные образовательные программы ООО и СООС, п. 131.20.6 Учебный план технологического (инженерного профиля). С.77–78.

16. *Разумовский В. Г., Сауров Ю. А.* Методология деятельности экспериментирования как стратегического ресурса физического образования // Сибирский учитель. 2012. № 2. С. 5–13.

17. *Рузавин Г. И.* Математизация научного знания. М. : Мысль, 1984. 207 с.

18. *Садовничий В. А.* Большие данные в современном мире. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017. 28 с.

19. *Сенашенко В. С.* Междисциплинарность образования как отражение междисциплинарности окружающего мира на любых уровнях его организации. Управление устойчивым развитием. 2016. № 3 (04). С. 79–85.

20. *Симоненко В. Д., Матяш Н. В.* Основы технологической культуры. М. : Вентана-Граф, 2000. 175 с.

21. *Тестов В. А., Перминов Е. А.* Трансдисциплинарная роль физико-математических дисциплин в современном естественно-научном и инженерном образовании // Образование и наука. 2023. Т. 23. № 7. С. 14–43.

22. *Хотунцев Ю. Л.* Проблемы технологического образования и трудового воспитания школьников в 2023 году : сб. материалов XXIX Межд. научно-практ. конф. «Современное технологическое образование». М. : Ассоциация технических университетов, 2023. С. 3–12.

23. *Хотунцев Ю. Л., Насипов А. Ж.* Системное технологическое мышление, проектно технологическое мышление и технологическая культура человека : мат-лы XXI Межд. научно-практ. конф. «Современное технологическое образование в школе и педагогическом вузе» / под ред. Ю. Л. Хотунцева, Д. Л. Харичевой. М. : МПГУ, 2015. С. 4–10.

24. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение : коллективная монография / М. В. Шабанова, Р. П. Овчинникова, А. В. Ястребов и др. М. : Издательский дом академии Естествознания, 2016. 300 с.

25. *Tejedor G., Segalas J., Rosas-Casals M.* Transdisciplinarity in higher education for sustainability: How discourses are approached in engineering education // Journal of Cleaner Production. 2018. Vol. 175. Pp. 29–37. DOI: 10.1016/j.jclepro.2017.11.085.

26. *Zeer E. F., Streltsov A. V.* Technological Platform for Realization of Students' Individual Educational Trajectories in a Vocational School // IEJME Mathematics Education. 2016. Vol. 11. Is. 4. Pp. 2639–2650.

# On the mathematical aspects of the methodology of training future teachers of the subject "Technology" in the digital age

**Perminov Evgeny Alexandrovich**
Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor, professor of the Department of Higher Mathematics and Physics, Ural Technical Institute of Communications and Informatics. Russia, Ekaterinburg.
ORCID: 0000-0002-8807-2476. E-mail: perminov_ea@mail.ru

**Abstract**. In the digital age, high-tech industries of modern production are constantly being updated in the process of their accelerated automation and robotization and the introduction of Artificial Intelligence in them. This is the great importance of modern mathematics as the mathematical basis of the language of modern high technologies (Hi-Tech). Therefore, the problem of ensuring the advanced mathematical training of future teachers of the subject "Technology", which plays an important role in the socialization of students, especially in their entry into the world of technology, is urgent.

The purpose of the work is to study the mathematical aspects of the methodology of training future teachers of technology. The research is based on methods of analysis of philosophical, mathematical, cultural, psychological, pedagogical, methodological and normative literature on mathematics, computer science and the subject area "Technology".

It is proved that knowledge of the mathematical apparatus of this subject area in the realities of the digital age contributes to the development of new key competencies among future technology teachers, allowing them to find complex technological solutions based on an interdisciplinary synthesis of knowledge of mathematics and natural sciences. In this, their training in mathematical modeling using a computer and discrete (computer) mathematics plays a leading role.

These areas of mathematics, as the most striking manifestations of the modern mathematical culture of research, are of fundamental importance in the formation of interdisciplinary thinking and project skills among future teachers of technology. They underlie the methodology of forming important elements of their technological culture through the formation of ideas about the types of tasks of mathematical and other types of modeling of an object, process or phenomenon.

The results of the article will contribute to the modernization of the methodological system of specialized training of future teachers of technology in the realities of the digital age. They can serve as a practical basis for selecting the content of special courses for their preparation and courses on the methodology of specialized training of schoolchildren in project activities.

**Keywords**: digital age, future technology teachers, training methodology, mathematical aspects.

## References

1. *Arnol'd V. I. Matematicheskaya bezgramotnost' gubitel'nee kostrov inkvizicii* [Mathematical illiteracy is more destructive than the fires of the Inquisitionъ // *Gazeta "Izvestiya"* – "Izvestia" newspaper. January 16, 1998.

2. *Zhukova A. E. Problema klassifikacii vysokih tekhnologij* [The problem of classification of high technologies] // *Vestnik Tomskogo gos. pedag. un-ta* – Herald of Tomsk State Pedagogical University. 2008. Is. 1 (75). Pp. 34–46.

3. *Ivanov V. G., Kajbiyajnen A. A., Galihanov M. F. Mezhdisciplinarnost' kak vektor razvitiya inzhenernogo obrazovaniya (obzor setevoj konferencii)* [Interdisciplinarity as a vector of engineering education development (network conference review)] // *Vysshee obrazovanie v Rossii* – Higher education in Russia. 2016. No. 8–9. Pp. 149–160.

4. *Kolesnikov A. V., Sirenko S. N. Mezhdisciplinarnost', sinergetika i gryadushchij novyj etap nauchno-tekhnicheskoj revolyucii kak predposylki obnovleniya soderzhaniya vysshego obrazovaniya. Nauchnye trudy Respublikanskogo instituta vysshej shkoly* [Interdisciplinarity, synergetics and the upcoming new stage of the scientific and technological revolution as prerequisites for updating the content of higher education. Scientific works of the Republican Institute of Higher Education]. Minsk. 2016. No. 16–2. Pp. 344–351.

5. *Koncepciya prepodavaniya predmetnoj oblasti "Tekhnologiya" v obrazovatel'nyh organizaciyah Rossijskoj Federacii, realizuyushchih osnovnye obshcheobrazovatel'nye programmy* – The concept of teaching the subject area "Technology" in educational institutions of the Russian Federation that implement basic general education programs. Available at: http://uchutrudu.ru/kontseptsiya-predmetnoy-oblasti-2019/.

6. *Krasovskij N. N. Matematicheskoe modelirovanie v shkole* [Mathematical modeling in school]. Yekaterinburg. USU Izvestiya, 1995. No. 4. Pp. 12–24.

7. *Krasovskij N. N. Razmyshleniya o matematicheskom obrazovanii* [Reflections on mathematical education] // *Izvestiya UrGU* – USU news. 2003. No. 27. Pp. 5–11.

8. *Pichugina G. V. Tipichnye oshibki, riski i zabluzhdeniya v organizacii proektnoj deyatel'nosti shkol'nikov : mat-ly XXI Mezhdun. nauchno-prakticheskoj konf. "Sovremennoe tekhnologicheskoe obrazovanie v shkole i pedagogicheskom vuze"* [Typical mistakes, risks and misconceptions in the organization of project activities of schoolchildren : proceedings of the XXI International Scientific and Practical Conference. "Modern technological education in schools and pedagogical universities"]. M. Moscow State University, 2015. 300 p.

9. *Perminov E. A. Diskretnaya matematika : uchebnoe posobie dlya 8–9-h klassov srednej obshcheobrazovatel'noj shkoly* [Discrete mathematics : textbook for grades 8–9 of secondary schools]. Yekaterinburg. IRRO, 2004. 206 p.

10. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij v aspekte integracii obrazovaniya : monografiya. Izd. 2-e, dopoln. i ispr.* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical disciplines in the aspect of educational integration : monograph. 2nd ed., suppl. and corr.]. Yekaterinburg. Publishing House of Russian State Prof.-Ped. University, 2019. 287 p.

11. *Perminov E. A. Metodicheskaya sistema obucheniya diskretnoj matematike studentov pedagogicheskih napravlenij : uchebnoe posobie* [Methodical system of teaching discrete mathematics to students of pedagogical fields : textbook]. Yekaterinburg. Publishing House of Russian State Prof.-Ped. University, 2015. 256 p.

12. *Perminov E. A. O metodologicheskih aspektah realizacii kul'turologicheskogo podhoda v matematicheskom obrazovanii* [On the methodological aspects of the implementation of the cultural approach in mathematical education] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2011. No. 9. Pp. 49–55.

13. *Perminov E. A. O roli kul'turologicheskogo podhoda v obuchenii predmetu "Tekhnologiya" uchashchihsya profil'nyh klassov : mat-ly XXXVIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* [On the role of the cultural approach in teaching the subject "Technology" to students of specialized classes : proceedings of the XXXVIII International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer science at universities and pedagogical universities]. Samara : SF GAOU HE MSPU, 2019. Pp. 66–68.

14. *Perminov E. A., Testov V. A. Matematizaciya profil'nyh disciplin kak osnova fundamentalizacii IT-podgotovki v vuzah. Obrazovanie i nauka* [Mathematization of specialized disciplines as the basis for the fundamentalization of IT training in universities. Education and science]. 2024. No. 7 (26). Pp. 12–43.

15. Order of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 62 of February 1, 2024 on amendments to the Federal Educational Programs of LLC and SES, p. 131.20.6 Curriculum of technological (engineering profile). Pp. 77–78.

16. *Razumovskij V. G., Saurov Yu. A. Metodologiya deyatel'nosti eksperimentirovaniya kak strategicheskogo resursa fizicheskogo obrazovaniya* [Methodology of experimentation as a strategic resource of physical education] // *Sibirskij uchitel'* – Siberian teacher. 2012. No. 2. Pp. 5–13.

17. *Ruzavin G. I. Matematizaciya nauchnogo znaniya* [Mathematization of scientific knowledge]. M. Mysl (Thought), 1984. 207 p.

18. *Sadovnichij V. A. Bol'shie dannye v sovremennom mire* [Big data in the modern world]. M. Lomonosov Moscow State University, 2017. 28 p.

19. *Senashenko V. S. Mezhdisciplinarnost' obrazovaniya kak otrazhenie mezhdisciplinarnosti okruzhayushchego mira na lyubyh urovnyah ego organizacii. Upravlenie ustojchivym razvitiem* [Interdisciplinarity of education as a reflection of the interdisciplinarity of the surrounding world at any levels of its organization. Sustainable development management]. 2016. No. 3 (04). Pp. 79–85.

20. *Simonenko V. D., Matyash N. V. Osnovy tekhnologicheskoj kul'tury* [Fundamentals of technological culture]. M. Ventana-Graf, 2000. 175 p.

21. *Testov V. A., Perminov E. A. Transdisciplinarnaya rol' fiziko-matematicheskih disciplin v sovremennom estestvenno-nauchnom i inzhenernom obrazovanii* [The transdisciplinary role of physical and mathematical disciplines in modern natural science and engineering education] // *Obrazovanie i nauka* – Education and Science. 2023. Vol. 23. No. 7. Pp. 14–43.

22. *Hotuncev Yu. L. Problemy tekhnologicheskogo obrazovaniya i trudovogo vospitaniya shkol'nikov v 2023 godu : sb. materialov XXIX Mezhd. nauchno-prakt. konf. "Sovremennoe tekhnologicheskoe obrazovanie"* [Problems of technological education and labor education of schoolchildren in 2023 : collection of materials of the XXIX International Scientific and Practical Conference. "Modern technological education"]. M. Association of Technical Universities, 2023. Pp. 3–12.

23. *Hotuncev Yu. L., Nasipov A. Zh. Sistemnoe tekhnologicheskoe myshlenie, proektno tekhnologicheskoe myshlenie i tekhnologicheskaya kul'tura cheloveka : mat-ly XXI Mezhd. nauchno-prakt. konf. "Sovremennoe tekhnologicheskoe obrazovanie v shkole i pedagogicheskom vuze"* [System technological thinking, design technological thinking and technological culture of man : materials of the XXI International Scientific and Practical Conference. "Modern technological education in schools and pedagogical universities"] / ed. by Yu. L. Khotuntsev, D. L. Kharicheva. M. Moscow State University, 2015. Pp.4–10.

24. *Eksperimental'naya matematika v shkole. Issledovatel'skoe obuchenie : kollektivnaya monografiya* – Experimental mathematics at school. Research education : a collective monograph / M. V. Shabanova, R. P. Ovchinnikova, A. V. Yastrebov et al. M. : Publishing House of the Academy of Natural Sciences, 2016. 300 p.

25. *Tejedor G., Segalas J., Rosas-Casals M.* Transdisciplinarity in higher education for sustainability: How discourses are approached in engineering education // Journal of Cleaner Production. 2018. Vol. 175. Pp. 29–37. DOI: 10.1016/j.jclepro.2017.11.085.

26. *Zeer E. F., Streltsov A. V.* Technological Platform for Realization of Students' Individual Educational Trajectories in a Vocational School // IEJME Mathematics Education. 2016. Vol. 11. Is. 4. Pp. 2639–2650.

УДК 519.22 DOI 10.25730/VSU.0536.24.011

# Построение статистических интервальных рядов распределения в курсе математики

**Чиркова Лариса Николаевна**
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11713@vyatsu.ru

**Аннотация.** Статья посвящена рассмотрению вопроса изучения темы математической статистики – «Вариационные ряды и их графическое изображение» – при обучении математике студентов направления «Таможенное дело». Рассмотрены основные действия при построении равноинтервального ряда статистического распределения выборки на занятиях по математике со студентами данного направления подготовки, в том числе в ходе решения профессионально ориентированных практических задач, что позволит в дальнейшем применить полученные знания при изучении курса таможенной статистики. Статья может быть полезна преподавателям и студентам при изучении курсов математики и статистики.

**Ключевые слова:** математика, математическая статистика, вариационный ряд, статистическое распределение выборки, полигон частот, интервальный ряд распределения выборки, гистограмма частот, профессиональная направленность обучения математике.

Дисциплина математика является одной из основных учебных дисциплин, изучаемых студентами направления «Таможенное дело». Одним из разделов курса математики, имеющем важное практическое значение в будущей профессиональной деятельности специалиста данного направления, является математическая статистика, поскольку на практике специалисты таможенного дела изучают количественные данные массовых явлений и процессов, происходящих во внешней торговле и взаимной торговле. «Таможенные органы выполняют учетные, контрольные и правоохранительные функции при транспортировке товаров и перевозках граждан через границу страны, а также осуществляют экономическую оценку условий и результатов всей таможенной деятельности» [1, с. 11]. «Установление статистических закономерностей, присущих массовым случайным явлениям, основано на изучении статистических данных – сведений о том, какие значения принял в результате наблюдений интересующий признак (случайная величина)» [3, с. 264]. Так, методы изучения вариации и рядов распределения в статистике внешней торговли и взаимной торговли используются «для анализа закономерностей формирования цен на товары; для решения вопросов о типичности и надежности средней цены товара; для решения вопросов об однородности совокупности контрактов по значениям контрактных цен; для изучения формы распределения единиц совокупности по величине цены; для определения единиц совокупности контрактов, цены по которым являются завышенными» [1, с. 34–35]. Для формирования таможенной статистики внешней торговли и статистики взаимной торговли изучаются такие показатели, как вес нетто и брутто (кг), количество товара в дополнительной единице измерения, стоимость товаров, перемещаемых через границу, и другие.

Изучение раздела «Математическая статистика» начинается с рассмотрения понятия дискретного вариационного ряда и его графического изображения. Отметим, что, если объем выборки составляет 25–30 единиц, для ее представления используется статистический дискретный ряд. В практической деятельности исследуемый показатель может принимать множество различных значений, признак может непрерывно варьироваться, поэтому специалистам часто требуется строить интервальный вариационный ряд. Рассмотрим построение интервального ряда на профессионально ориентированном примере.

*Пример 1.* Составить статистический равноинтервальный ряд распределения выборки 50 значений веса брутто (кг) некоторого товара, отправленного международными почтовыми отправлениями, перемещаемого через таможенный пост, построить гистограмму и полигон относительных частот, изобразить графически эмпирическую функцию распределения: 5,1; 7,2; 8,5; 3,9; 6; 5; 4,4; 5,6; 6,4; 6,2; 5,5; 5,8; 7,3; 8,8; 10,4; 6,1; 8,2; 7; 6,6; 6,2; 3,6; 4; 7,7; 5; 7,4; 10; 4,5; 6,2; 5,5; 7,8; 3,5; 6,6; 3,8; 3,5; 7,7; 5,1; 5,9; 5,8; 8; 3,2; 5,7; 9,1; 8; 6,2; 5,3; 4,5; 7,3; 10,2; 3; 6,4.

Студенты отмечают, что все значения веса брутто заключены в пределах от 3 до 11, среди значений есть одинаковые, но число вариант выборочной совокупности велико, и поэтому целесообразно провести интервальное разбиение. Студенты проводят ранжирование данных, находят наименьшее и наибольшее значения $x_{\min} = 3,2$, $x_{\max} = 10,4$ и рассчитывают длину интервала, в пределах которого варьируется вес брутто (кг) – размах вариации *R*: $R = x_{\max} - x_{\min} = 10,4 - 3,2 = 7,2$ (кг). Далее студенты должны определить значение *k* – количество групп. «Не следует стремиться к очень большому количеству групп, так как в такой группировке часто исчезают различия между группами. Также надо избегать образования и слишком малочисленных групп, включающих несколько единиц совокупности, потому что в таких группах перестает действовать закон больших чисел и возможно проявление случайности» [2, с. 33]. Для нахождения оптимального числа интервалов *k* применяется формула Стэрджесса: $k = 1 + 3,32 \cdot \lg n$ (*n* – объем выборки), при этом результат округляется до ближайших левого или правого целого числа. Студенты проводят вычисления и получают: $k = 1 + 3,32 \cdot \lg 50 \approx 1 + 3,32 \cdot 1,699 \approx 6,641$, таким образом, можно принять *k*=6 интервалов. Заметим, что часто по условию задачи при построении интервального вариационного ряда необходимое количество интервалов *k* уже дано.

При построении разноинтервального вариационного ряда разбиение его на частичные интервалы должно соответствовать структуре изучаемой совокупности и отдельно определяется в каждой конкретной задаче. Отметим, что в данном примере используется равноинтервальная группировка: студенты вычисляют длину частичного интервала: $h = \frac{R}{k} = \frac{7,2}{6} = 1,2$ и к наименьшей варианте 3,2 прибавляют 1,2, получая верхнюю границу 4,4 первого интервала, и продолжают процесс, пока не получится интервал, в который попадет наибольшая варианта 10,4, затем подсчитывают частоты по каждому интервалу (количество значений, попавших в каждый интервал), вычисляют относительные частоты как отношения частот к объему *n*=50 данной выборки, а также рассчитывают середины полученных интервалов как средние арифметические значений их концов. После этого для каждого частичного интервала студенты находят накопленную частоту, которая рассчитывается как сумма частот всех предшествующих интервалов, включая данный, и накопленную относительную частоту как отношение накопленной частоты к объему выборки. Результаты проведенных вычислений представлены в таблице 1.

*Таблица 1*

**Равноинтервальная группировка значений веса брутто**

| интервалы | середина интервала | частота интервала | относительная частота | накопленная частота | накопленная относительная частота |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,2 – 4,4 | 3,8 | 8 | 0,16 | 8 | 0,16 |
| 4,4 – 5,6 | 5,0 | 10 | 0,2 | 18 | 0,36 |
| 5,6 – 6,8 | 6,2 | 15 | 0,3 | 33 | 0,66 |
| 6,8 – 8,0 | 7,4 | 8 | 0,16 | 41 | 0,82 |
| 8,0 – 9,2 | 8,6 | 6 | 0,12 | 47 | 0,94 |
| 9,2 – 10,4 | 9,8 | 3 | 0,06 | 50 | 1 |
| | | сумма = 50 | сумма = 1 | | |

В случае построения неравноинтервального ряда подсчет частот и средних значений выполняются так же, как и в случае равноинтервального ряда, а при нахождении плотностей каждую частоту нужно разделить на длину конкретного интервала. Отметим, что если варианта совпадает с концом частичного интервала, то ее следует относить в правый интервал.

Студенты делают вывод, что обзор несгруппированной выборочной совокупности не позволял получить ясное представление об изменчивости значений веса брутто данного товара, тогда как составленный равноинтервальный вариационный ряд позволяет выявить закономерности распределения веса брутто по интервалам его значений. Студенты отмечают, что вес брутто товарной позиции колеблется от 3,2 до 10,4 кг, наибольшее количество товарных партий имеет вес от 5,6 до 6,8 кг, наименьшее – от 9,2 до 10,4 кг.

Графическим изображением интервального вариационного ряда распределения служит гистограмма частот – «расположенная в прямоугольной системе координат геометрическая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются откладываемые по оси *Ox* значения концов частичных интервалов, а соответствующими им высотами служат откладываемые по оси *Oy* частоты или относительные частоты» [5, с. 39]. Тогда при условии, что выборка репрезентативна, построенная гистограмма дает наглядное представление о распределении веса брутто товарных партий по всей генеральной совокупности (рисунок 1).

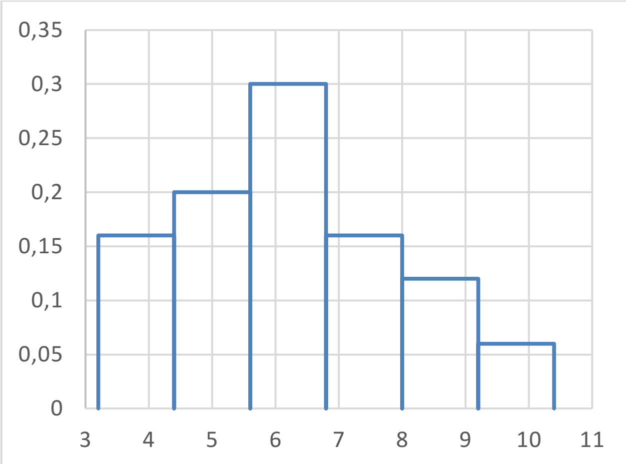

*Рис. 1.* Гистограмма относительных частот

Графическое представление интервального вариационного ряда можно дополнить построением полигона относительных частот – ломаной, соединяющей точки с абсциссами – серединами интервалов, и ординатами – относительными частотами (рисунок 2).

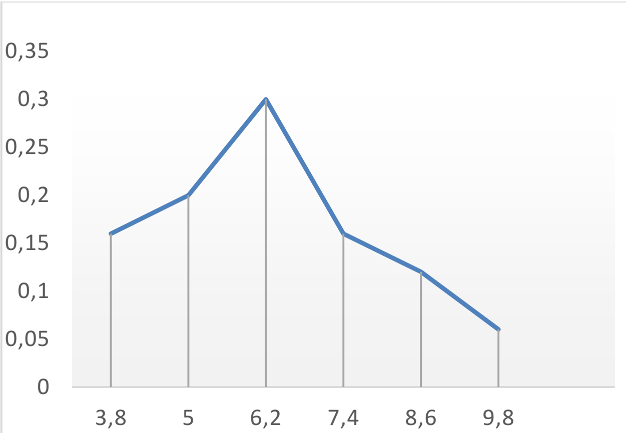

*Рис. 2.* Полигон относительных частот

Для интервального вариационного ряда эмпирическая функция распределения $F(x)$ определяется так же, как в дискретном случае – это «относительная частота того, что случайная величина (признак) примет значение, меньшее заданного $x$» [3, с. 267]. Студенты строят кумуляту – кусочно-ломаную линию, соединяющую точки, абсциссы которых – правые концы интервалов, а ординаты – накопленные относительные частоты. Для построенного интервального вариационного ряда кумулята начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала (3,2), а ордината – накопленной относительной частоте, равной 0. Отметим, что при этом $F(x)$=0, если x≤3,2, и $F(x)$=1, если $x$≥10,4, данная функция не убывает, принимает значения из промежутка [0; 1] и в случае интервального вариационного распределения непрерывна (рисунок 3).

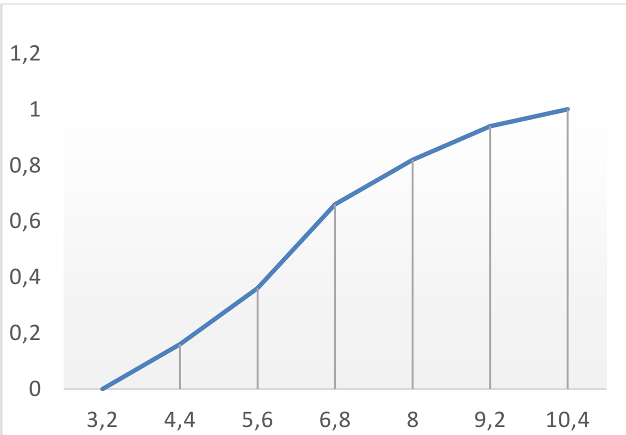

*Рис. 3.* Кумулята относительных частот

Добавим, что на практическом занятии все вычисления и построение графиков удобно автоматизировать средствами табличного редактора. С целью закрепления пройденного материала для самостоятельного решения студентам может быть предложено выполнение следующего задания.

*Пример 2.* Составить статистический равноинтервальный ряд распределения выборки 22 значений стоимости (млн руб.) основного капитала предприятий – участников внешнеэкономической деятельности, построить гистограмму и полигон относительных частот, изобразить графически эмпирическую функцию распределения (количество групп принять равным 3): 190; 580; 635; 512; 408; 196; 420; 287; 441; 280; 750; 358; 190; 240; 391; 150; 620; 356; 492; 380; 537; 203.

Изучение теории вероятностей и математической статистики должно иметь профессиональную направленность, это осуществляется посредством использования на занятиях профессионально значимой информации, соотнесения методов решения учебных математических задач с методами, применяемыми в будущей профессиональной деятельности, и это способствует выработке умения применять полученные знания на практике [4].

### Список литературы

1. *Афонин П. Н.* Таможенная статистика : учебное пособие. СПб. : Интермедия, 2012. 153 с.

2. *Воронцова Н. Д.* Статистика : учебное пособие : в 2 ч. Ч. 1. Киров : ВятГУ, 2015. 63 с.

3. *Кремер Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 543 с.

4. *Чиркова Л. Н.* Значение элементов теории вероятностей и математической статистики при обучении специалистов таможенного дела // Математика и проблемы образования : мат-лы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Киров, 2022. С. 179–180.

5. *Шилова З. В.* Некоторые разделы математического анализа и статистики : учебно-методические рекомендации. Киров : Изд-во ВятГГУ. 83 с.

## Construction of statistical interval distribution series in the course of mathematics

**Chirkova Larisa Nikolaevna**

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. E-mail: usr11713@vyatsu.ru

**Abstract**. The article is devoted to the issue of studying the topic of mathematical statistics – "Variation series and their graphical representation" – in teaching mathematics to students of the "Customs business" field. The main actions in constructing an equal-interval series of statistical sampling distribution in mathematics classes with students of this field of study are considered, including during the solution of professionally oriented practical tasks, which will further apply the acquired knowledge when studying the course of customs statistics. The article may be useful for teachers and students when studying mathematics and statistics courses.

**Keywords**: mathematics, mathematical statistics, variation series, statistical sampling distribution, frequency polygon, interval series of sampling distribution, frequency histogram, professional orientation of mathematics education.

### References

1. *Afonin P. N. Tamozhennaya statistika : uchebnoe posobie* [Customs statistics : textbook]. SPb. Intermedia, 2012. 153 p.

2. *Voroncova N. D. Statistika : uchebnoe posobie : v 2 ch. Ch. 1* [Statistics : textbook : in 2 parts. Part 1]. Kirov. VyatSU, 2015. 63 p.

3. *Kremer N. Sh. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika : uchebnik dlya vuzov* [Probability theory and mathematical statistics : textbook for universities]. M. UNITY-DANA, 2002. 543 p.

4. *Chirkova L. N. Znachenie elementov teorii veroyatnostej i matematicheskoj statistiki pri obuchenii specialistov tamozhennogo dela* [The importance of elements of probability theory and mathematical statistics in the training of customs specialists] // *Matematika i problemy obrazovaniya : mat-ly 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov* – Mathematics and problems of education : proceedings of the 41st International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer Science at universities and pedagogical universities. Kirov, 2022. Pp. 179–180.

5. *Shilova Z. V. Nekotorye razdely matematicheskogo analiza i statistiki : uchebno-metodicheskie rekomendacii* [Some sections of mathematical analysis and statistics : educational and methodological recommendations]. Kirov. VyatSHU Publishing House. 83 p.

**Математический вестник Вятского государственного университета**

**Научный журнал № 2 (31) (2024)**

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964