

УДК 534.014.1

*В. М. Шишкин, А. П. Левашов*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОГО РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ**

В данной статье разработано математическое и конечно-элементное обеспечение для моделирования изгибных затухающих колебаний удлиненной пластины с учетом амплитудно-зависимого рассеяния энергии в материале. Также демпфирующие свойства материала представляются степенным полиномом, зависящим от амплитуды деформации в произвольной точке пластины. В результате исследования предложен быстрый алгоритм определения амплитуд затухающих колебаний и соответствующих значений логарифмического декремента колебаний пластины без трудоемкой процедуры шагового интегрирования дифференциальных уравнений затухающих колебаний конечно-элементной модели пластины.

*Ключевые слова:* логарифмический декремент колебаний, рассеяние энергии, матрица демпфирования.

Моделирование затухающих колебаний конструкций с учетом амплитудно-зависимого рассеяния энергии в материале в настоящее время наталкивается на серьезные трудности, обусловленные отсутствием соответствующего математического, конечно-элементного и программного обеспечения. Применяемые для этого расчетные модели, обычно, базируются на известном асимптотическом методе Крылова-Боголюбова-Митропольского [1] для решения слабо нелинейных уравнений, что не вписывается в рамки современных конечно-элементных технологий расчета конструкций.

Рассматривается консольно закрепленная удлиненная пластина с несовершенно упругим изотропным материалом, деформируемым в рамках модели Фойгта-Томпсона-Кельвина [5]:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\dot{\varepsilon}$  – соответственно нормальное напряжение, относительная деформация и скорость ее изменения по времени  $t$ ;  $E$ ,  $\eta$  – модуль Юнга и коэффициент вязкости материала. Демпфирующие свойства материала определяются логарифмическим декрементом колебаний (ЛДК)  $\delta(\varepsilon_0)$ , зависящим от амплитуды деформации  $\varepsilon_0$ . Коэффициент  $\eta$  связан ЛДК  $\delta(\varepsilon_0)$  зависимостью

$$\eta = E\delta(\varepsilon_0)/(\pi\omega), \quad (2)$$

где  $\omega$  – частота деформирования материала.

Пластина совершает затухающие колебания после начального статического отклонения  $w_0$  ее свободного конца. Принимается предпосылка о цилиндрической форме изгиба пластины с деформированием ее в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява. Тогда пластину можно представить совокупностью одномерных конечных элементов (рис. 1а), с аппроксимацией прогиба  $w$  в пределах элемента (рис. 1б) функциями Эрмита  $N_1, N_2, N_3, N_4$ :

$$w = \{N\}^T \{r^{(e)}\}; \quad \{N\} = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\}; \quad \{r^{(e)}\} = \{w_1 \ \varphi_1 \ w_2 \ \varphi_2\}, \quad (3)$$

$$N_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3; \quad N_2 = x - 2x^2/l + x^3/l^2;$$

$$N_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3; \quad N_4 = -x^2/l + x^3/l^2; \quad \varphi = w'.$$

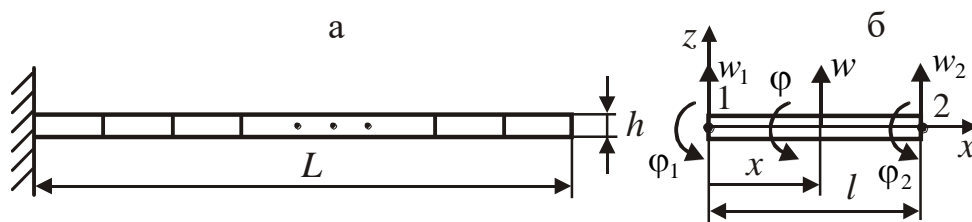


Рис. 1. Конечно-элементная модель пластины (а) и один конечный элемент (б)

Уравнения затухающих колебаний конечно-элементной модели пластины имеют вид

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $\{r\}$  – соответственно матрица масс, матрица вязкого демпфирования, матрица жесткости и вектор узловых перемещений отмеченной модели. Начальные условия:  $\{r(0)\} = \{r_0\}$ ,  $\{\dot{r}(0)\} = 0$ . Вектор  $\{r_0\}$  содержит узловые перемещения конечно-элементной модели балки при начальном статическом отклонении  $w_0$  ее свободного конца и может быть определен из системы уравнений

$$[\tilde{K}]\{r_0\} = \{P\}. \quad (5)$$

Матрица  $[\tilde{K}]$  получается заменой элемента  $k_{jj}$  ( $j$  – номер узлового перемещения, соответствующего прогибу матрицы  $w_0$ ) матрицы  $[K]$  произведением  $k_{jj}\alpha$  с параметром штрафа  $\alpha = 10^8 \div 10^{10}$ . Вектор  $\{P\}$  состоит из нулей и элемента  $P_j = k_{jj}w_0\alpha$ .

Матрицы  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ , формируются методом прямой жесткости [4] из соответствующих матриц  $[M^{(e)}]$ ,  $[C^{(e)}]$ ,  $[K^{(e)}]$  конечных элементов. Матрицы  $[M^{(e)}]$  и  $[K^{(e)}]$  имеют известный вид:

$$[M^{(e)}] = m \begin{bmatrix} 13l/35 & 11l^2/210 & 9l/70 & -13l^2/420 \\ 11l^2/210 & l^3/105 & 13l^2/420 & -l^3/140 \\ 9l/70 & 13l^2/420 & 13l/35 & -11l^2/210 \\ -13l^2/420 & -l^3/140 & -11l^2/210 & l^3/105 \end{bmatrix};$$

$$[K^{(e)}] = EI \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}.$$

Здесь  $m$ ,  $EI$ ,  $l$  – соответственно погонная масса, жесткость на изгиб и длина элемента.

Считается, что зависимость  $\delta(\varepsilon_0)$  материала известна и представлена степенным полиномом:

$$\delta(\varepsilon_0) = \sum_{k=0}^n c_k \varepsilon_0^k. \quad (6)$$

Для получения матрицы  $[C^{(e)}]$  запишем приращение работы нелинейной части напряжения  $\sigma$  на соответствующем ему приращении деформации  $d\varepsilon$  в объеме конечного элемента:

$$dA = -\frac{E}{\pi\omega} \int_0^l d\varepsilon \delta(\varepsilon_0) \dot{\varepsilon} dF dx. \quad (7)$$

Деформация  $\varepsilon$  и ее амплитуда  $\varepsilon_0$  в точке  $z$  поперечного сечения элемента определяются геометрическими зависимостями

$$\varepsilon = -z\{N''\}^T \{r^{(e)}\}, \quad \varepsilon_0 = |z| \chi_0(x). \quad (8)$$

Здесь  $\chi_0(x)$  – амплитуда кривизны оси элемента. Будем считать, что  $\chi_0$  не зависит от  $x$  и равна ее значению в середине элемента. Тогда с учетом представления (6) вместо (8) получаем зависимость

$$\delta(\varepsilon_0) = \delta(\chi_0) = \sum_{k=0}^n c_k |z|^k \chi_0^k. \quad (9)$$

Выражение (7) с учетом (8) и (9) можно привести к виду

$$dA = -\frac{\delta(\chi_0)}{\pi\omega} \{dr^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{\dot{r}^{(e)}\}, \quad (10)$$

где

$$\delta(\chi_0) = \sum_{k=0}^n c_k \chi_0^k I_k / I; \quad I = \int_F z^2 dF; \quad I_k = \int_F |z|^{k+2} dF;$$

$[K^{(e)}]$  – матрица жесткости конечного элемента:

$$[K^{(e)}] = EI \int_0^l \{N''\} \{N''\}^T dx.$$

Из выражения (10) следует матрица демпфирования конечного элемента:

## Технические науки

$$[C^{(e)}] = \frac{\delta(\chi_0)}{\pi\omega} [K^{(e)}]. \quad (11)$$

Для решения системы (4) необходимо использовать шаговые методы интегрирования, корректируя матрицы  $[C^{(e)}]$  конечных элементов на каждом цикле колебаний в соответствии с достигнутыми значениями  $\chi_0$ . Поэтому шаг интегрирования  $\Delta t$ , необходимый для отслеживания данных значений, должен быть достаточно малым: 100 ... 120 шагов на один цикл колебаний, что влечет за собой достаточно большие затраты машинного времени. Однако известно, что после нескольких первых циклов колебаний от начального статического отклонения  $w_0$  свободного конца пластины ее форма колебаний практически совпадает с низшей модой  $\{F\}_1$ . Это дает возможность перейти от системы (4) к уравнению относительно нормальной координаты  $q_1(t)$  моды  $\{F\}_1$ :

$$m\ddot{q}_1(t) + c\dot{q}_1(t) + kq_1(t) = 0 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$q_1(0) = w_0/F_w, \quad \dot{q}_1(0) = 0. \quad (13)$$

Здесь  $F_w$  – компонента  $\{F\}_1$ , соответствующая прогибу  $w$  свободного конца пластины;  $m$ ,  $c$ ,  $k$  – модальные параметры пластины, соответствующие нормальной координате  $q_1(t)$ :

$$m = \{F\}_1^T [M] \{F\}_1; \quad c = \{F\}_1^T [C] \{F\}_1; \quad k = \{F\}_1^T [K] \{F\}_1.$$

Уравнение (14) можно представить в виде

$$\ddot{q}_1(t) + 2n\dot{q}_1(t) + \omega^2 q_1(t) = 0, \quad (14)$$

где  $n = c/2m$ ,  $\omega^2 = k/m$ . Динамический прогиб свободного конца балки описывается функцией  $w(t) = q_1(t)F_w$ . Тогда вместо (14) получаем уравнение

$$\ddot{w}(t) + 2n\dot{w}(t) + \omega^2 w(t) = 0. \quad (15)$$

Параметр затухания  $n$  в (15) неявно зависит от коэффициентов  $c_k$  полинома (6) через матрицы демпфирования  $[C^{(e)}]$  конечных элементов и должен пересчитываться на каждом цикле колебаний  $i$  в соответствии с текущей амплитудой  $A_i$ . Но в интервале  $[A_i; A_{i+1}]$  эти матрицы являются постоянными. Соответственно будет постоянным и параметр  $n = n_i$  на том же интервале. Тогда можно записать известное аналитическое решение для огибающей  $A(\tau)$  на одном цикле колебаний

$$A(\tau) = A_i \exp(-n_i \tau), \quad (16)$$

где  $0 \leq \tau \leq \bar{T}$  – локальное время. Период колебаний  $\bar{T}$  необходимо находить учетом параметра  $n_i$ :  $\bar{T} = 2\pi / \sqrt{\omega^2 - n_i^2}$ . Однако демпфирующие свойства реальных конструкционных материалов настолько малы, что период  $\bar{T}$  практически не отличается от периода колебаний  $T$  идеально упругой пластины. Поэтому далее можно принять  $\bar{T} = T$ . Логарифмический декремент колебаний  $\delta_i$  пластины при амплитуде  $A_i$  связан с параметром  $n_i$  известной зависимостью:  $\delta_i = n_i T$ . Подставляя сюда  $n_i = c_i / (2m)$  и  $T = 2\pi / \omega$ , получаем

$$\delta_i = c_i \pi / (m\omega). \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) позволяют построить алгоритм получения амплитуд колебаний и соответствующих им ЛДК пластины без процедуры шагового интегрирования уравнения (15):

$$A_{i+1} = A_i \exp(-n_i T); \quad \delta_{i+1} = c_{i+1} \pi / (m\omega). \quad (18)$$

Модальный параметр демпфирования  $c_{i+1}$  балки вычисляется при амплитуде колебаний  $A_{i+1}$  по матрице демпфирования  $[C]_{i+1}$ . Необходимые для этого значения амплитуды кривизны  $\chi_{0,i+1}$  в серединах конечных элементов определяются выражением

$$\chi_{0,i+1} = (\varphi_{2,F} - \varphi_{1,F})A_{i+1}/(F_w l),$$

где  $\varphi_{1,F}$ ,  $\varphi_{2,F}$  – компоненты моды  $\{F\}_1$ , соответствующие углам поворота  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  узлов конечного элемента (рис. 1б).

Для проведения численных экспериментов выбрана консольно закрепленная пластина с размерами: длина  $L=300$  мм; ширина  $b=20$  мм; толщина  $h=3$  мм. Пластина представлялась в продольном направлении 30-ю конечными элементами одинаковой длины. Материал пластины – сталь Ст. 2:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. В таблице приведены ЛДК  $\delta$  стали Ст. 2 в зависимости от амплитуды деформации  $\varepsilon_0$ , полученные при продольных колебаниях трубчатых образцов (по данным справочника [3]). Зависимость  $\delta(\varepsilon_0)$  представлялась кубическим полиномом

$$\delta(\varepsilon_0) = c_0 + c_1\varepsilon_0 + c_2\varepsilon_0^2 + c_3\varepsilon_0^3. \quad (19)$$

Таблица

**ЛДК  $\delta$  стали Ст. 2 в зависимости от амплитуды деформации  $\varepsilon_0$**

$\varepsilon_0$	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
$\delta$	0,0035	0,0050	0,0097	0,0144	0,0172

Коэффициенты полинома определялись методом наименьших квадратов по данным таблицы 1 и получились такими:  $c_0 = 1,4197 \cdot 10^{-3}$ ;  $c_1 = 4,1199 \cdot 10^1$ ;  $c_2 = -3,7276 \cdot 10^4$ ;  $c_3 = 1,3849 \cdot 10^7$ . На рис. 2 приведен график зависимости (19) (сплошная линия), который проходит достаточно близко от табличных значений  $\delta(\varepsilon_0)$  (точки).

На рис. 3 приведена огибающая  $A(t)$  затухающих колебаний свободного конца пластины при его начальном отклонении  $w_0 = 20$  мм, полученная в резуль-

тате шагового интегрирования уравнений (4) методом Кранка-Николсона-Галеркина [2] с шагом  $\Delta t = T/120$  (сплошная линия). Для сравнения приведена зависимость  $A(t)$ , полученная с использованием алгоритма прогонки (18) (пунктирная линия). Наблюдается незначительное расхождение результатов в области высоких амплитуд и практическое совпадение кривых  $A(t)$  во всем остальном диапазоне.

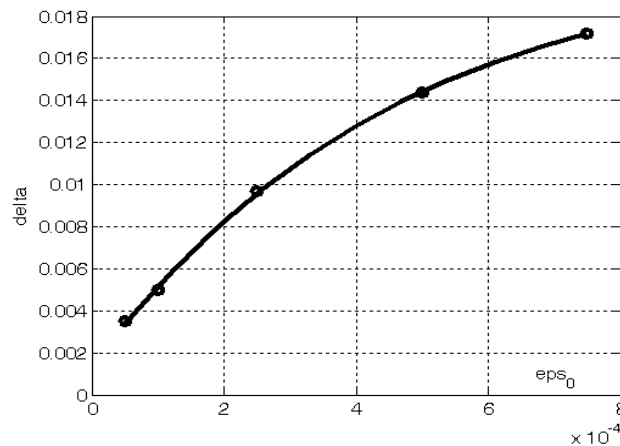


Рис. 2. Зависимость  $\delta(\epsilon_0)$

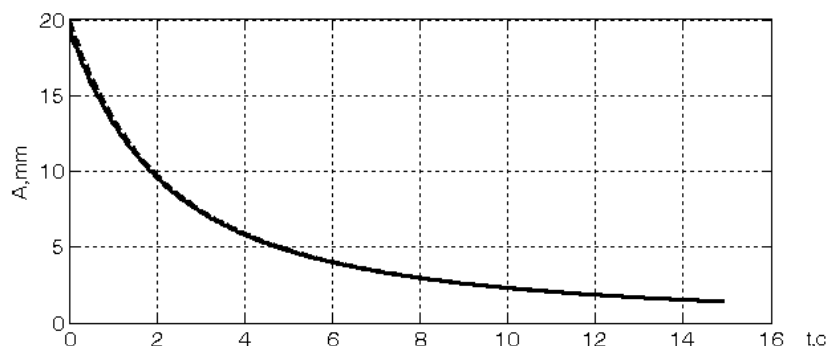


Рис. 3. Огибающие затухающих колебаний свободного конца пластины (пояснения в тексте)

На рис. 4 приведена амплитудная зависимость  $\delta(A)$  ЛДК пластины, полученная снова при шаговом интегрировании уравнений (4) (сплошная синяя линия), и зависимость  $\delta(A)$  при использовании алгоритма (18) (пунктирная зеленая линия). Наблюдается практическое совпадение кривых до  $A = 16$  мм, что составляет 80% от начального отклонения  $W_0$ , и значительное расхождение результатов при  $A > 16$  мм, обусловленное переходом пластины от начальной статической



формы изгиба к колебаниям по низшей моде  $\{F\}_1$ . Поэтому зависимость  $\delta(A)$  необходимо определять не с начального момента времени, а после завершения переходного процесса.

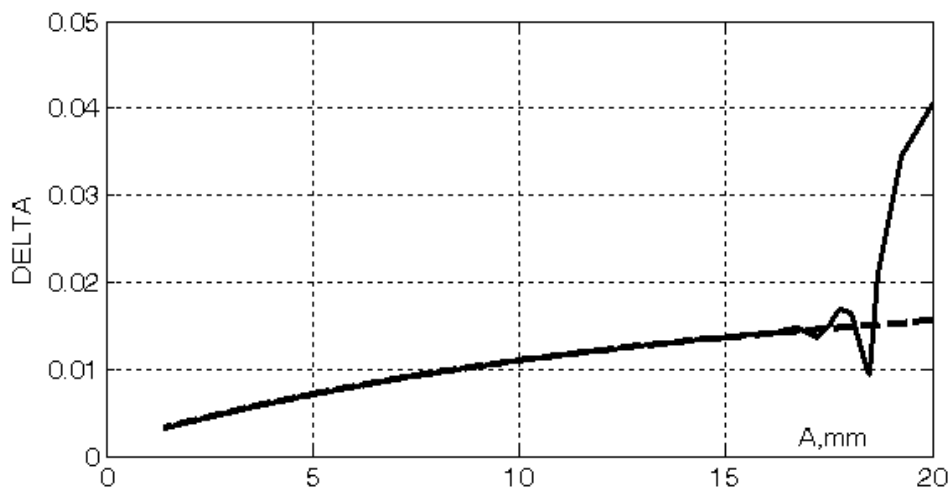


Рис. 4. Амплитудные зависимости ЛДК пластины (пояснения в тексте)

Вычисления проведены с использованием лицензионного математического пакета MATLAB R2012b.

В результате проведенных численных исследований показана возможность применения разработанного математического и конечно-элементного обеспечения для учета демпфирующих свойств материалов с амплитудно-зависимым рассеянием энергии при анализе затухающих колебаний удлиненных пластин. Разработанный алгоритм быстрого получения амплитудной зависимости ЛДК пластины может быть использован при идентификации вибропоглощающих свойств жестких материалов по экспериментально измеренным демпфирующим свойствам специально изготовленных тестовых пластин (образцов).

### Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / пер. с англ. М.: Мир, 1981. 216 с.

---

**Технические науки**

3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: справочник. Киев: Наук. думка, 1971. 375 с.

4. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.

5. Хильчевский В. В., Дубенец В. Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. Киев: Вища шк., 1977. 252 с.

**ШИШКИН Виктор Михайлович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры ТиСМ, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: [usr00008@vyatsu.ru](mailto:usr00008@vyatsu.ru)

**ЛЕВАШОВ Александр Павлович** – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры ТиСМ, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: [usr00008@vyatsu.ru](mailto:usr00008@vyatsu.ru)