

УДК 621.934.2: 621.93.023.21

*А. В. Власов, П. В. Гневашев***ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ КРУГЛЫХ ПИЛ**

Жесткость полотна пилы является одним из критериев качества работы пилы. В настоящее время на предприятиях контроль жесткости полотен круглых пил происходит экспериментально на заключительной стадии их производства, при этом очень часто на этапе проектирования пил этому показателю не уделяется должного внимания ввиду сложности математических моделей для расчета этого показателя. В статье рассматриваются аналитический и численные методы определения жесткости полотна круглой пилы на основе классической теории изгиба пластинок. Представлена аналитическая математическая модель определения жесткости круглой пилы. На примере конкретной пилы рассчитано численное значение её жесткости и оценена адекватность полученной модели. Получена зависимость жесткости круглой пилы от её толщины и диаметра. Сделан вывод о целесообразности применения численного метода для расчета жесткости пил с компенсационными прорезями.

Ключевые слова: круглая пила, жесткость, ansys, несимметричный изгиб.

В настоящее время, в лесной промышленности, широкое распространение получила обработка древесины круглыми пилами. Наряду с большим количеством положительных аспектов, круглые пилы имеют низкую устойчивость и как следствие большую толщину пропила, по сравнению с рамными и ленточными пилами. В связи с тем, что проблема ресурсосбережения и энергосбережения актуальна как никогда раньше, необходимо уменьшать толщину полотна дисковой пилы, но решение этой проблемы невозможно без учета его жесткости.

Имеются различные способы определения жесткости полотна дисковой пилы, а именно, случай, когда пилу устанавливают на три опоры и измеряют прогиб в центре от воздействия силы тяжести, либо пилу подвешивают за централь-

ное отверстие и измеряют прогиб на периферии который так же вызван действием силы тяжести. В реальности, в процессе пиления на полотно пилы действуют боковые силы в зоне резания, поэтому предлагается определять жесткость пилы при действии сосредоточенной боковой силы (рис. 1)

В данной статье, для определения жесткости, рассматривается круглая пила, зафиксированная по внутреннему контуру планшайбами и нагруженная поперечной сосредоточенной силой на внешнем контуре.

Впервые задача несимметричного изгиба диска была рассмотрена Рейснером [1]. Данный способ определения жесткости является аналитическим и поэтому требует ряда условностей (идеализаций), например, полотно пилы принимается в форме сплошного цельного диска без зубьев и т. д.

Для анализа принята схема нагружения, представленная на рисунке 1.

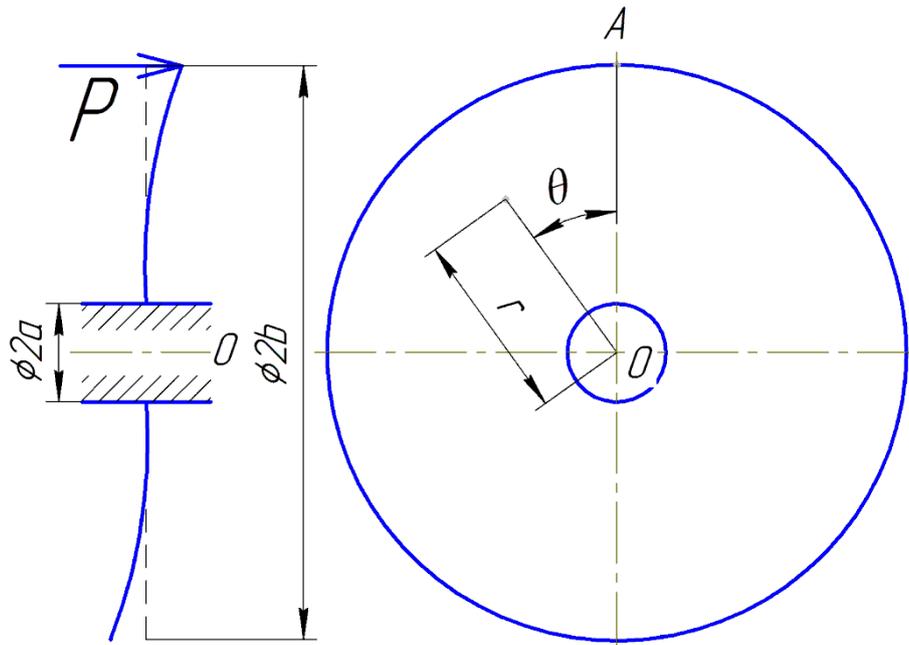


Рис. 1. Схема нагружения диска.

Для решения данной задачи используем общее уравнение изгиба пластины [2]:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где w – прогиб пластинки;

q – поперечная распределенная нагрузка;

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость [2];}$$

E – модуль упругости Юнга;

h – толщина диска;

ν – коэффициент Пуассона;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \text{оператор Лапласа в цилиндрических координатах [2].}$$

тах [2].

Решение данного уравнения (1), при несимметричном изгибе пластины, ищется в виде ряда Фурье [2]:

$$w = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \cos k\theta. \quad (2)$$

Так как угол θ отсчитывается от радиуса OA , т.е. изгиб относительно данного радиуса симметричный, то в данном ряде Фурье (2), члены, содержащие $\sin k\theta$, могут быть отброшены.

Подставляя данное решение (2) в исходное уравнение (1), получим [2]:

$$\begin{cases} \omega_0 = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \ln r + d_0 r^2 \ln r \\ \omega_1 = a_1 r + b_1 r^3 + c_1 r^{-1} + d_1 r \ln r \\ \omega_k = a_k r^k + b_k r^{-k} + c_k r^{k+2} + d_k r^{-k+2} \end{cases}. \quad (3)$$

Коэффициенты a , b , c , d уравнений системы (3), определяются из граничных условий.

На внутреннем радиусе диска, равном радиусу планшайбы ($r=a$), прогиб и угол поворота пластины равны нулю [2]:

$$w = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Наружный диаметр диска ($r=b$) свободен, соответственно граничные условия [2]:

Технические науки

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0. \quad (6)$$

Граничное условие для перерезывающей силы на пограничной окружности определится в виде ряда Фурье [2]:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) = \frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta \right), \quad (7)$$

так как данная сила непрерывна во всех точках окружности, за исключением точки А, где она испытывает разрыв непрерывности вследствие присутствия приложенной там сосредоточенной силы Р.

Поочередно подставляя уравнения системы (3) в граничные условия определяем значения коэффициентов a , b , c , d для каждого уравнения системы (3):

$$d_0 = -\frac{P}{8 \cdot \pi \cdot Y},$$

$$c_0 = d_0 \cdot \frac{[2 \cdot (1 + \nu) \cdot \ln(b) + 3 + \nu - (2 \cdot \ln(a) + 1) \cdot (1 + \nu)] \cdot a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot (1 + \nu) - a^2 \cdot (\nu - 1)},$$

$$b_0 = -\left(\frac{c_0}{2 \cdot a^2} \right) - \left(\frac{d_0 \cdot (2 \cdot \ln(a) + 1)}{2} \right),$$

$$a_0 = -a^2 \cdot b_0 - \ln(a) \cdot c_0 - d_0 \cdot a^2 \cdot \ln(a),$$

$$d_1 = \frac{P}{\pi \cdot b \cdot Y \cdot \left[\frac{2a^2(2 + \ln\left(\frac{b}{a}\right)) + 9b^2 + a^2}{2a^2b^2} - \left(\frac{3a^4 - 2a^2b^2 - 9b^4}{a^4b^4} \right) \cdot \frac{a^2b^2 \left[2a^2(1 + \nu + \nu \ln\left(\frac{b}{a}\right)) - 3b^2(2 + \nu) + a^2\nu \right]}{2[a^4(2 - \nu) - 2\nu a^2b^2 + 3b^4(2 + \nu)]} \right]}$$

$$c_1 = -\left[\frac{a^2b^2 \left[2a^2(1 + \nu + \nu \ln\left(\frac{b}{a}\right)) - 3b^2(2 + \nu) + a^2\nu \right]}{2[a^4(2 - \nu) - 2\nu a^2b^2 + 3b^4(2 + \nu)]} \right] \cdot d_1,$$

$$b_1 = \frac{c_1}{a^4} - \frac{d_1}{2a^2},$$

$$a_1 = -a^2b_1 - \left(\frac{c_1}{a^2} \right) - d_1 \cdot \ln(a),$$

$$d_k = \frac{-P}{\pi b Y [k(2-k)b^{k-3} [a^{2-2k}k - (2-k)b^{2-2k}] + a^2(k-1)b^{k-3}k [a^{-2k}(k-2) + (k+2)b^{-2k}] -$$

$$- [kb^{k-1} [(k+2)^2 - a^2(k-2)kb^{-2}] - a^{2k+2}b^{k-3}k [a^{-2k}(k-2) + (k+2)b^{-2k}]]},$$

$$\cdot \frac{[b^{-k}(2-k)(1-k+\nu) - a^{2-2k}b^{k-2}k(k-1+\nu) + a^2(1-k)b^{k-2} \cdot [(k+1-\nu)b^{-2k} - (k-1+\nu)a^{-2k}]]}{[b^k [(k+2)(k+1+\nu) - a^2k(k-1+\nu)b^{-2}] + a^{2k+2}b^{k-2} [(k+1-\nu)b^{-2k} - (k-1+\nu)a^{-2k}]]},$$

$$c_k = - \frac{[b^{-k}(2-k)(1-k+\nu) - a^{2-2k}b^{k-2}k(k-1+\nu) + a^2(1-k)b^{k-2} \cdot [(k+1-\nu)b^{-2k} - (k-1+\nu)a^{-2k}]]}{[b^k [(k+2)(k+1+\nu) - a^2k(k-1+\nu)b^{-2}] + a^{2k+2}b^{k-2} [(k+1-\nu)b^{-2k} - (k-1+\nu)a^{-2k}]]} \cdot d_k,$$

$$b_k = \frac{a^{2k+2}d_k}{k} + \frac{a^2(1-k)d_k}{k},$$

$$a_k = -a^{-2k}b_k - a^2c_k - a^{2-2k}d_k.$$

Используя представленную выше математическую модель, рассчитываем прогиб диска пилы в точке А. Рассматриваем пилу диаметрами от 350 до 1250 мм с шагом 50 мм и толщинами от 1,6 до 5,0 мм с шагом 0,2 мм. Диаметр планшайб определяется по зависимости $D_{ш} = 5\sqrt{2 \cdot b}$. В расчёте принимаем следующие параметры материала пилы (сталь 9ХФ): модуль упругости Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$; величина поперечной сосредоточенной нагрузки принимается равной 1 Н. Рассматриваем случай, когда окружная скорость вращения диска и начальные напряжения равны нулю. Результаты расчетов представлены на рисунке 2 в виде графика, отображающего зависимость прогиба от диаметра и толщины диска пилы.

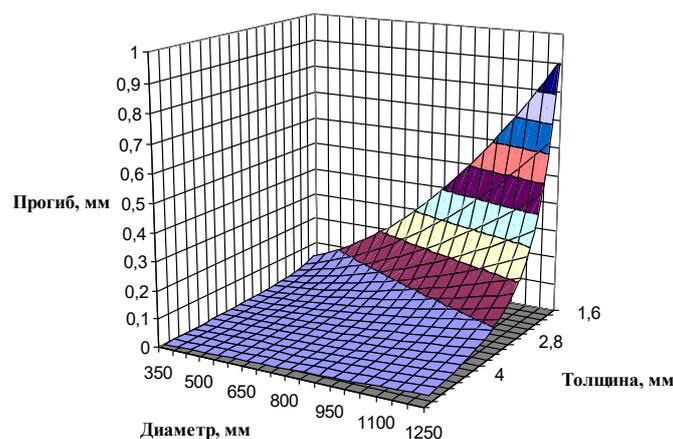


Рис. 2. Зависимость прогиба от диаметра и толщины диска пилы.

По рекомендациям Стахиева Ю. М., жесткость пилы должна быть не менее $30 \div 40$ Н/мм [3], то есть величина прогиба при нагрузке в 1 Н должна составлять не более $0,033 \div 0,025$ мм.

Из представленного графика можно определить толщину пилы при заданном диаметре и рекомендованной величине прогиба. Например, для пилы диаметром 1000 мм, толщина должна быть не менее 4,2 мм.

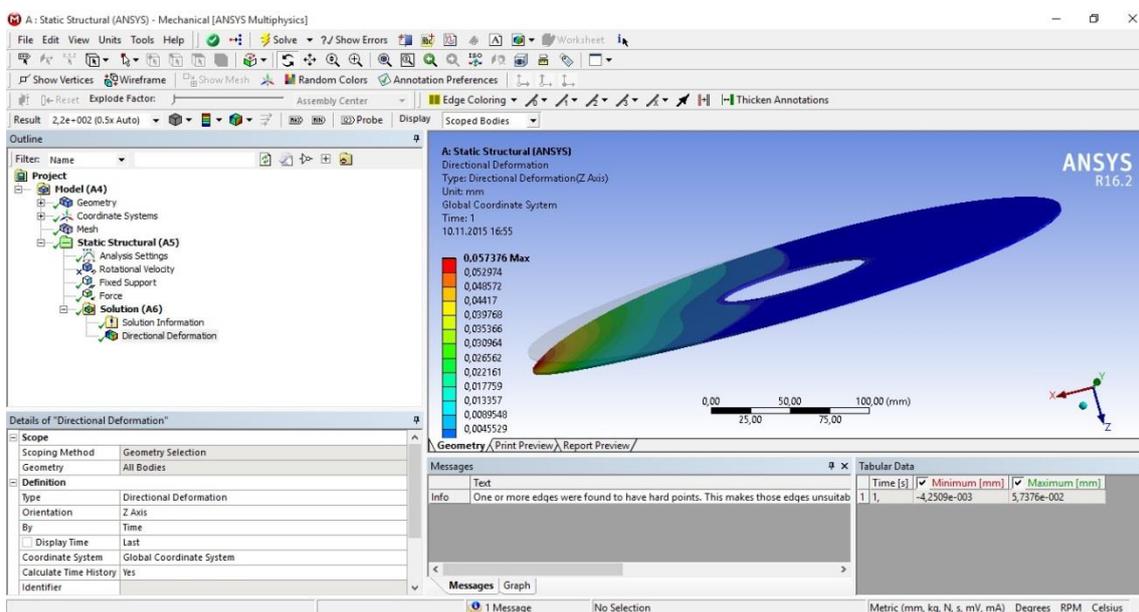


Рис. 3. Пример расчетов в программе ANSYS.

Так же в программном комплексе ANSYS [4], численным методом (метод конечных элементов), была определена жесткость нескольких пил, результаты представлены в таблице 1, из которой видно, что программа ANSYS достаточно точно определяет жесткость.

Таблица 1

Прогиб диска пилы при нагрузке 1Н

Диаметр диска, мм.	Толщина диска, мм.	Прогиб, мм	
		Аналитический метод	Численный метод
350	1,6	0,053	0,057

Технические науки

500	2	0,062	0,069
650	2,6	0,051	0,058
800	3	0,052	0,062
950	3,6	0,044	0,052
1100	4	0,044	0,054
1250	4,6	0,038	0,046

Применение данного программного продукта особенно актуально для пил сложной формы (наличие компенсационных прорезей, конические пилы) так как представленная выше аналитическая модель работает с учетом идеализаций формы пилы.

Список литературы

1. *Reißner H.* Über die unsymmetrische Biegung d'unner Kreisringplatten. Ingenieur-Archiv, 1929. P. 72–83.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки / пер. с англ.; под ред. Г. С. Шапиро. Изд. 3-е. М.: Наука, 1966. 635 с.: ил., табл.; 22 см.
3. *Стахивев Ю. М.* Научно-технологические основы производства, подготовки и эксплуатации плоских круглых пил для распиловки древесины: дис. ... д-ра техн. наук в форме науч. докл. Архангельск, 2002. 46 с.: ил.
4. *Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А.* ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. М.: Едиториал УРСС, 2003. 272 с.

ВЛАСОВ Артем Владимирович – старший преподаватель, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: artjomv@gmail.com

ГНЕВАШЕВ Павел Вячеславович – заведующий лабораторией, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: pasha-moon@mail.ru