

УДК 51-8

А. А. Горбушин, А. В. Шатров

СИГНАЛЬНАЯ ИГРА С ИНФОРМИРОВАННЫМИ УЧАСТНИКАМИ В ТЕОРИИ КОНТРАКТОВ

В статье рассматривается математическая модель процедуры найма работников в терминах теории игр с учетом ситуации, когда работодатель обладает конфиденциальной информацией о технологии производства. Работодатель знает, какие усилия агент (работник) должен приложить, чтобы получить оптимальный результат, но не может включить это в контракт, так как усилия ненаблюдаемые. Для этого рассматривается сигнальная игра, где в качестве сигнала о качестве технологии предстает контракт, который работодатель предлагает работнику. Работодатель стремится сообщить агенту, какой объём усилий ему будет необходимо приложить, т.к. ему известен оптимальный объём с точки зрения коллективного благосостояния. Работа нацелена на то, чтобы спроектировать оптимальный контракт для работодателя и выяснить, когда работодатель выберет контракт, обеспечивающий разделяющее равновесие вместо объединяющего. Условия, при которых работодатель выбирает разделяющее равновесие, ещё не были проанализированы в литературе.

Ключевые слова: теория игр, сигнальные игры, теория контрактов.

Теория контрактов в настоящее время является в настоящее время наиболее востребованной частью экономической теории и в её отечественном сегменте – математической экономике. Следует отметить, что нобелевская премия 2016 года вручена одним из основателей этой теории О. Харту и Б. Хольстрёму [1]. Стандартная ситуация в теории контрактов – это проблема морального риска – безразличному к риску работодателю требуется помощь работника в выполнении определённого задания. У этого задания наблюдаемый результат, но процесс его выполнения не наблюдаем. Основной проблемой для работодателя в такой ситуации становится разработка контракта для работника, возмещаю-

щая затраченные работником усилия. Решением может быть связь зарплаты с результатами работы, даже в том случае, когда объем выпуска является случайной величиной. В этой постановке задача рассматривалась многими авторами [2–4]. В [5] эта задача решена нами с точки зрения достижения социального оптимума. Ситуация меняется, когда работодатель знает о технологии больше информации, чем может раскрыть агенту (это может быть из-за экспертизы работодателя, конфиденциальности информации или невозможности проверить подлинность слов работодателя). В таком случае между работодателем и агентом возникает сигнальная игра Spence [1973]. Работодатель стремится сообщить агенту, какой объём усилий ему будет необходимо приложить, т.к. ему известен оптимальный объём с точки зрения коллективного благосостояния. Работник, в свою очередь, не доверяет этой информации, так как ожидает, что работодатель будет скрывать информацию о зависимости между уровнями технологии и прилагаемых усилий.

В литературе уделяется не очень много внимания ситуациям, когда у работодателя есть конфиденциальная информация о технологии производства. В то же время эти ситуации встречаются достаточно часто, что можно подтвердить простыми примерами. Например, сотрудники фирмы могут понимать лучше, чем новый менеджер, насколько важна может быть определенная задача; технологическая компания может лучше знать возможности своей технологии, чем покупатель, который хочет приобрести и развивать эту технологию; страховая компания может знать больше о возможных чрезвычайных ситуациях, чем её клиенты.

С одной стороны, информирование работника об оптимальных усилиях повышает ценность технологии, которой обладает работодатель, и может позволить работодателю получить большую выгоду от этой технологии. С другой стороны, информирование может дорого обойтись: работодателю придется предложить агенту контракт, ограничивающий его собственные возможности по изменению условий труда.

Мы рассматриваем агентскую проблему в ситуации морального риска, в которой работодатель располагает конфиденциальной информацией о технологии производства на момент заключения договора. Работа нацелена на то, чтобы спроектировать оптимальный контракт для работодателя и выяснить, когда работодатель выберет контракт, обеспечивающий разделяющее равновесие вместо объединяющего. Условия, при которых работодатель выбирает разделяющее равновесие, ещё не были проанализированы в литературе.

Проблема информированного работодателя рассматривалась [6], как абстрактный случай информированного принципала (руководителя) в контексте сигнальной игры. В работе [7] описывается набор равновесий в модели с полностью наблюдаемыми и проверяемыми действиями. Наличие ненаблюдаемых действий здесь важно, так как это уменьшает возможные варианты при договоре, что, в свою очередь, ведет к изменению результатов игры. В работе [8] рассматривается предполагаемый контракт между работодателем, обладающим неполной конфиденциальной информацией, и избегающим риска агентом. Автор рассматривает эту ситуацию с допущением о том, что работодатель может подписать контракт, прежде чем он получит конфиденциальную информацию. Это означает, что работодатель может выбрать пространство контрактов (сигнальное пространство), а затем выбрать подходящий контракт после поступления информации. Авторы [9] рассматривают контракты в случае, когда высокопроизводительная технология отличается от низкопроизводительной только распределением результата, но не ожидаемой выгодой (ожидаемая выгода зависит только от действий, но не от типа технологии). Они показали, что в такой модели работодатель всегда предпочитает публичную информацию конфиденциальной, а конфиденциальную информацию – отсутствию информации. В работе [10] показано, что, если отношение между результатом и усилиями является линейным, то работодатель может достичь наилучшего результата.

Рассмотрим следующую модель. Работодатель и агент безразличны к риску. Агент обладает резервной полезностью U , которую он может получить в

случае отказа от работы. Работодатель обладает технологией производства Y , случайной величиной, которая распределена следующим образом:

$$Y = \begin{cases} 1, & P(1) = \theta e \\ 0, & P(0) = (1 - \theta e) \end{cases} \quad (\theta - \text{параметр технологии, } e - \text{приложенные усилия}),$$

где θ , параметр технологии, может быть, как большим θ_h так и малым θ_l : ($\theta_h > \theta_l$). Работодатель может наблюдать θ , но не может его раскрывать. Агент не может наблюдать θ . Работодателю необходимо, чтобы агент выполнил определённую работу, которая не поддается проверке (e не наблюдаем работодателем). Функция издержек агента: $c(e) = \frac{e^2}{2}$. Примем следующие пред-

положения:

- В условиях производства заложены высоко- или низкопроизводительные типы технологии. Работодатель наблюдает тип технологии, агент не наблюдает.

- Работодатель предлагает контракт.

- Агент принимает или отклоняет контракт. Если агент отклоняет контракт, то он получает U работодатель получает 0.

- Агент прикладывает ненаблюдаемые усилия e

- Реализуется производство Y и стороны получают выручку (в нашем случае при единичной цене равную Y) в соответствии с контрактом.

Необходимо найти разделяющее и объединяющее равновесия в этой модели и проанализировать, в каких условиях они могут быть достигнуты. Для определенности будем рассматривать только разделяющие равновесия. Если обе стороны обладают всей полнотой информации, то мы имеем дело с проблемой общественного планирования $\max_e E[Y(\theta, e) - \frac{e^2}{2}]$ (где E представляет операцию математического ожидания) с оптимальным объемом усилий $e_h = \theta_h$ в случае высокопроизводительной технологии и $e_l = \theta_l$ в случае низкопроизводительной технологии. Наилучший ожидаемый совокупный доход будет равняться-

ся $\frac{\theta_h^2}{2}$ или $\frac{\theta_l^2}{2}$. Оптимальный результат достигим в случае с публичной информацией. Работодатель предлагает контракт в форме $a + bY$, где a – размер фиксированной платы, b – доля работника в итоговом выпуске. В нашем случае оптимальный контракт будет иметь вид $b_h = b_l = 1, a_h = U - \frac{\theta_h^2}{2}, a_l = U - \frac{\theta_l^2}{2}$, работодатель получает выгоду $\frac{\theta_h^2}{2} - U$ или $\frac{\theta_l^2}{2} - U$ в случае высокой и низкой технологий соответственно. В условиях публичной (общедоступной) информации не приходится говорить об объединяющих и разделяющих равновесиях. Рассмотрим вариант разделяющего равновесия, в котором заключение контракта происходит в ситуации, когда работодатель обладает полной информацией о технологии, но агенту эта информация не известна.

Предложение: *Работодатель не может достичь оптимального результата при разделяющем равновесии в ситуации морального риска при обладании конфиденциальной информацией.*

Рассмотрим варианты, которые есть у работодателя (здесь и далее принимаем $U=0$). Будем принимать линейную форму контрактов $bY + a$ без потери общности (линейные контракты представляют собой все возможные контракты в случае, когда существует только два возможных исхода). Обозначим контракты парой (b, a) , где b – доля агента в выпуске, a – фиксированная плата.

В случае низкопроизводительной технологии и разделяющего равновесия работодатель не может получить больше $\frac{\theta_l^2}{2}$. А этот доход он может получить, предлагая такой же контракт работнику, как и в случае с публичной информацией: $b = 1, a = -\frac{\theta_l^2}{2}$ (заметим, что этот результат является оптимальным).

Назовем этот контракт «низким» контрактом. Подставляя в задачу максимизации работодателя ожидаемое значение дохода и оптимальное значение размера

усилий (которые получаются из задачи работника $\max_e \left\{ be\theta_h - \frac{e^2}{2} \right\}$, с решением $e = b\theta_h$), выводим задачу поиска контракта для высокопроизводительной технологии (назовем его «высокий» контракт) с разделяющим равновесием b^s, a^s

$$\max_{a,b} \{ (1-b)b\theta_h^2 - a \}$$

$$\begin{cases} \frac{b^2\theta_h^2}{2} + a \geq 0 \\ \frac{\theta_l^2}{2} \geq (1-b)b\theta_l\theta_h + a \end{cases}$$

Первое условие – рациональность работника. Работник принимает лишь тот контракт, который принесет ему ожидаемую прибыль больше резервной полезности (в нашем случае $U=0$). Второе условие – условие разделения. Доход работодателя в случае низкопроизводительной технологии должен быть выше для «низкого» контракта, чем для «высокого» контракта при реальной низкой технологии. В ситуации высокопроизводительной технологии и значительной разницы между этими типами ($\theta_h \geq 2\theta_l$) работодатель выбирает

$b^s = \frac{1}{2}, a^s = -\frac{\theta_l^2}{2} + \frac{\theta_h\theta_l}{4}$. В этом контракте работодатель и агент получают ожидаемые доходы $\frac{\theta_h^2}{4} + \frac{\theta_l^2}{2} - \frac{\theta_h\theta_l}{4}$ и $\frac{\theta_h^2}{8} - \frac{\theta_l^2}{2} + \frac{\theta_h\theta_l}{4}$ соответственно. Для

$\theta_l < \theta_h < 2\theta_l$ контракт будет $b^s = \frac{\theta_h\theta_l + \theta_l(2\theta_h^2 - 2\theta_h\theta_l)^{\frac{1}{2}}}{2\theta_h\theta_l - \theta_h^2}, a^s = \frac{b^2\theta_h^2}{2}$

Мы видим, что контракт с разделяющим типом равновесия такой же, как и в случае низкопроизводительной технологии, что не позволяет работодателю достичь наилучшего результата в случае высокопроизводительной технологии. В то же время, если технологии значительно отличаются друг от друга, работодатель отдаст часть прибыли работнику, чтобы убедить его в необходимости приложить больше усилий в условиях высокопроизводительной технологии.

Переключение с одного семейства контрактов на другой происходит при $\theta_h = 2\theta_l$. Первое семейство характеризуется распределением выпуска поровну и предложением агенту еще некоторой фиксированной зарплаты (таким образом, что агент в среднем получает доход выше, чем его резервная полезность). Во втором семействе агент получает свою резервную зарплату и еще прибыль больше чем $\frac{1}{2}$, но менее 1. В обоих случаях агент получает мотивацию, характеризуемую долей полученного результата b , ниже оптимального уровня. Социальные издержки при разделяющем равновесии выше, когда технологии сильнее различаются между собой.

Заключение. Было показано, что в агентской проблеме в ситуации морального риска и информированного работодателя, лучший результат не может быть достигнут работодателями с высокопроизводительной технологией. В случае низкопроизводительных технологий работодатель достигает как минимум оптимального результата с точки зрения публичной информации, а иногда даже большей выгоды. Во всех случаях существует разделяющий контракт. Этот контракт дает работодателю с низкопроизводительной технологией лучший результат, а работодатель с высокопроизводительной технологией получает строго меньше выгоды в связи с недостаточно мотивированным агентом. Когда технологии существенно отличаются, работодатель платит работнику больше, чем его резервная полезность, для того, чтобы убедить агента в типе технологии.

Список литературы

1. Нобелевскую премию дали за теорию контрактов. URL: <https://meduza.io/feature/2016/10/10/nobelevskuyu-premiyu-po-ekonomike-dali-za-teoriyu-kontraktov-chto-esche-za-teoriya> (дата обращения 17.01.2017).
2. *Hart O., Moore. J.* On the design of hierarchies: coordination versus specialization // *Journal of Political Economy.* 2005. Vol. 113(4). P. 675–702.

3. *Holmstrom B. H.* Moral hazard and observability // The Bell journal of economics. 1979. Vol. 10. № 1. P. 74–91.
4. *Rothschild M., Stiglitz J.* Equilibrium in competitive insurance markets // An essay on the economics of imperfect information. Springer, 1992. Vol 90. № 4. P. 355–375.
5. *Горбушин А. А., Шатров А. В.* Экономико-математическое моделирование профессиональных контрактов при найме работников в фирму // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика=Perm University Herald. Economy. 2016. Вып. 4 (31). С. 95–105.
6. *Myerson R. B.* Game Theory: Analysis of Conflict. Harvard University, 1997. 600 p.
7. *Maskin E., Tirole J.* Unforceen contingencies, property rights and incomplete contracts // Review of Economic Studies. 1999. Vol. 66(1). P. 83–114.
8. *Tirole J.* Incomplete contracts: Where Do We Stand? // Econometric. Vol. 67(4). P. 741–781.
9. *Wagner E. O.* The Dynamics of Costly Signaling // Games. 2013. Vol. 4(2). P. 163–181.
10. *Inderst R.* Incentive Schemes as a Signaling Device // Journal of Economic Behavior and Organization. 2001. Vol. 44(4). P. 445–465.

ГОРБУШИН Арсений Анатольевич – аспирант кафедры математического моделирования, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: arseniygorbushin@gmail.com

ШАТРОВ Анатолий Викторович – заведующий кафедрой математического моделирования, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: shatrov@vyatsu.ru