УДК 517

Е. Н. Руренко

МОДЕЛЬ РИЧАРДСОНА С УПРАВЛЕНИЕМ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается модель гонки вооружений Ричардсона. Вводится в качестве одного из коэффициентов модели управление. Модель становится нелинейной управляемой системой дифференциальных уравнений. С помощью специальной заменой переменных модель сводится к более простой системе, для которой строится гамильтониан и применятся принцип максимума Понтрягина для нахождения структуры оптимального управления. Получено, что оптимальное управление может принимать только свои граничные значения и иметь не более одной точки переключения. Знание этой структуры позволяет получить уравнения границы множества достижимости исходной системы. Рассматривается частный случай равенства определенных коэффициентов модели. Система при граничных значениях управления становится линейной, решение записывается с помощью экспоненциала матрицы системы. Используется известная формула нахождения экспоненциала матрицы по ее собственным значениям, которые получаются действительными и различными числами. Точка переключения оптимального управления принимается за параметр. Получены параметрические уравнения верхней и нижней границы множества достижимости.

Ключевые слова: управляемая динамическая система, множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, точки переключения.

Рассмотрим следующую ситуацию, в которой могут оказаться две враждующие страны. Первая страна («желтые») вооружается, опасаясь потенциальной угрозы войны с соседней враждебной страной («зеленые»). В свою очередь «зеленые», зная о росте затрат на вооружение «желтых», также увеличивает расходы на вооружение. Предположим, что каждая страна изменяет скорость роста (сокращения) вооружений пропорционально уровню затрат другой. Математически эта ситуация может быть смоделирована следующим образом. Пусть $x_1(t)$ – расходы на вооружение «желтых» к моменту $t \geq 0,$ $x_2(t)$ то же, но «зеленых». Тогда простейшая модель гонки вооружений может быть сформулирована в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1, \end{aligned},$$

где a и c – положительные константы. Эти уравнения описывают положительную связь. Это модель гонки вооружений Ланкастера. Она имеет очевидный недостаток: рост затрат на вооружение ничем не лимитируется. Естественно предположить, что чем больше текущий уровень затрат на оборону, тем меньше скорость его роста (отрицательная связь). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 - bx_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - dx_2 \end{aligned},$$

где a,b,c,d – положительные константы. Это модель гонки вооружений Ричардсона $[1]$.

Рассмотрим третий постулат, когда «желтые» имеют возможность управлять ситуацией. Получим следующую управляемую динамическую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = ux_2 - bx_1 \\ &\dot{x}_2 = cx_1 - dx_2 \qquad\qquad t \in [0;T], \\ &x_1(0) = x_{10},\; x_2(0) = x_{20} \end{aligned} \tag{1}$$

где a,b,c,d – положительные константы, управление $u \in [p_0; p_1]$; $0< p_0 < p_1$; $(x_{10}; x_{20})$ – начальное состояние системы.

Поставим задачу нахождения множества достижимости для (1) в момент времени *T*. Множеством достижимости $D(T)$ управляемой системы (1) называется совокупность концов $x(T)$ для всех траекторий $x(\cdot)$ этой системы, начинающихся в момент $t=0$ из начального состояния. Это фундаментальная характеристика системы. В своей совокупности множества достижимости, по существу, представляют эквивалентное описание динамики системы, но не в дифференциальной записи как дифференциальные уравнения с управлением в правой части, а в интегральной форме. Точное знание множества достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы, выбрать оптимальной управление. Так, задача минимизации терминального функционала на траекториях системы эквивалентна отысканию минимума функции на множестве достижимости представляет собой конечномерную экстремальную задачу $[2]$.

Сделаем в системе (1) замену переменной

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 e^{-bt} \\ x_2 &= \xi_2 e^{-dt} \end{aligned}.$$

Тогда первое уравнение в (1) примет вид

$$\dot{\xi}_1 e^{-bt} - b\xi_1 e^{-bt} = u\xi_2 e^{-dt} - b\xi_1 e^{-bt}.$$

Второе уравнение в (1) примет вид

$$\dot{\xi}_2 e^{-dt} - d\xi_2 e^{-dt} = c\xi_1 e^{-bt} - d\xi_2 e^{-dt}.$$

Получим систему

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = u\xi_2 e^{-\nu t} \\ &\dot{\xi}_2 = c\xi_1 e^{\nu t} \qquad t \in [0;T] \ , \\ &\xi_1(0) = x_{10};\ \xi_2(0) = x_{20} \end{aligned} \tag{2}$$

где $\nu = d - b.$

Гамильтониан $[3]$ для системы (2) имеет вид

$$H = \psi_1 u \xi_2 e^{-\nu t} + \psi_2 c \xi_1 e^{\nu t}.$$

Поскольку $\xi_2 > 0,$ будем иметь оптимальное уравнение $u = p_1,$ если $\psi_1 > 0,$ и $u = p_0,$ если $\psi_1 \le 0,$ т.е. оптимальное управление кусочно-постоянная функция.

Пусть $\nu = 0.$ Для (2) будем иметь следующую сопряженную систему:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -c\psi_2\\ \dot{\psi}_2 &= -u\psi_1\end{aligned},$$

из которой получаем $\ddot{\psi}_1 = uc\psi_1$.

Рассматриваем сопряженную переменную ψ_1 только при кусочно-постоянных управлениях u.

Лемма. *Переменная ψ_1 имеет не более одного корня.*

Нижняя граница множества достижимости $D(T)$ будет получаться, если $u = p_0$ при $t \in [0;t^*]$, $u = p_1$ при $t \in [t^*;T]$. Момент t^* – точка переключения. Далее t^* будет приниматься как параметр $t^* \in [0;T]$.

При $u = p_0$ из (2) имеем линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= p_0\xi_2\\ \dot{\xi}_2 &= c\xi_1 \qquad t \in [0;t^*]\end{aligned},$$

решение $[4]$ которой

$$\begin{pmatrix}\xi_1 & (t^*)\\ \xi_2 & (t^*)\end{pmatrix} = e^{t^*A}\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где A — матрица системы $\begin{pmatrix}0 & p_0\\ c & 0\end{pmatrix}$ с собственными значениями

$$\lambda_1 = \sqrt{p_0c}, \ \ \lambda_2 = -\sqrt{p_0c}.$$

Формула для нахождения экспоненциала матрицы А известна $[4]$.

$$e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right)I + \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)A\right],$$

по которой находим для (3)

$$e^{tA}=\frac{1}{2\sqrt{p_0c}}\left[\left(\sqrt{p_0c}\,e^{-\sqrt{p_0c}\,t}+\sqrt{p_0c}\,e^{\sqrt{p_0c}\,t}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]+\left(e^{\sqrt{p_0c}\,t}-e^{-\sqrt{p_0c}\,t}\right)\begin{pmatrix}0&p_0\\c&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}ch\sqrt{p_0c}\,t&0\\0&ch\sqrt{p_0ct}\,p_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{p_0c}}\,p_0sh\sqrt{p_0ct}\\\frac{1}{\sqrt{p_0c}}\,csh\sqrt{p_0ct}&0\end{pmatrix}$$

Получаем $e^{t^*A}=\begin{pmatrix}ch\sqrt{p_0c}\,t^*&\sqrt{\frac{p_0}{c}}sh\sqrt{p_0c}\,t^*\\\sqrt{\frac{c}{p_0}}sh\sqrt{p_0c}\,t^*&ch\sqrt{p_0c}\,t^*\end{pmatrix}.$

Таким образом, для системы (3) имеем решение

$$\begin{aligned}&\xi_1=\xi_1\left(t^*\right)=ch\left(\sqrt{p_0c}\,t^*\right)x_{10}+\sqrt{\frac{p_0}{c}}\,sh\left(\sqrt{p_0c}\,t^*\right)x_{20}\\&\xi_2=\xi_2\left(t^*\right)=\sqrt{\frac{c}{p_0}}sh\left(\sqrt{p_0c}\,t^*\right)x_{10}+ch\left(\sqrt{p_0c}\,t^*\right)x_{20}\end{aligned}. \quad (4)$$

После момента переключения t^* $u=p_1$, т.е. из (2) будем иметь линейную систему

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_1=p_1\xi_2\\&\dot{\xi}_2=c\xi_1,\end{aligned}\qquad t\in\left[t^*;T\right]$$

$$\xi_1\left(t^*\right)=\xi_1;\;\;\xi_2\left(t^*\right)=\xi_2,$$

решение которой получаем аналогично описанному выше способу

$$\begin{aligned}&\xi_1\left(T\right)=ch\left(\sqrt{p_1c}\left(T-t^*\right)\right)\xi_1+\sqrt{\frac{p_1}{c}}sh\left(\sqrt{p_1c}\left(T-t^*\right)\right)\xi_2\\&\xi_2\left(T\right)=\sqrt{\frac{c}{p_1}}sh\left(\sqrt{p_1c}\left(T-t^*\right)\right)\xi_1+ch\left(\sqrt{p_1c}\left(T-t^*\right)\right)\xi_2\end{aligned}\quad (5)$$

Уравнения (4), (5) описывают нижнюю границу множества достижимости D(T) для (2).

Верхняя граница множества достижимости D(T) для (2) получается, если $u=p_1$ при $t\in\left[0;t^*\right]$, $u=p_0$ при $t\in\left[t^*;T\right]$. Уравнения выводятся аналогично.

Теорема. *Граница множества достижимости D(T) для* (1) *при* $b=d$ *описывается параметрическими уравнениями*

$$\xi_1 = ch\left(\sqrt{p_i c}\,t\right)x_{10} + \sqrt{\frac{p_i}{c}}sh\left(\sqrt{p_i c}\,t\right)x_{20}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{c}{p_i}}sh\left(\sqrt{p_i c}\,t\right)x_{10} + ch\left(\sqrt{p_i c}\,t\right)x_{20}$$

$$x_1(T) = \left[ch\left(\sqrt{p_j c}\,(T-t)\right)\xi_1 + \sqrt{\frac{p_j}{c}}sh\left(\sqrt{p_j c}\,(T-t)\right)\xi_2 \right]e^{-bT},$$

$$x_2(T) = \left[\sqrt{\frac{c}{p_j}}sh\left(\sqrt{p_j c}\,(T-t)\right)\xi_1 + ch\left(\sqrt{p_j c}\,(T-t)\right)\xi_2 \right]e^{-dT}$$

где параметр $t \in [0;T]$. *При* $i=0,\ j=1$ *описывается нижняя граница D(T), при* $i=1,\ j=0$ *описывается верхняя граница D(T).*

Благодарю профессора М. С. Никольского за постановку задачи.

Список литературы

1. *Плотинский Ю. М.* Модели социальных процессов. М.: Наука, 2001. 182 с.

2. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.

3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Т., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

4. *Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление Линейная теория и приложения. М.: Макс-Пресс, 2007. 270 с.

РУРЕНКО Елена Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: rurenko@bk.ru