Вятский государственный университет

Advanced science

Научный журнал

№ 3

Киров
2018

ББК 74.48я52
А22

Главный редактор
Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ, ORCID: 0000-0002-3490-2956
Заместитель главного редактора
Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, доцент, профессор, ВятГУ, ORCID: 0000-0002-3577-8838
Ответственный секретарь
Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ, ORCID: 0000-0001-5071-6208

Состав редакционной коллегии:
А. В. Алешкин, доктор технических наук, профессор, директор, ФГБНУ «ФАНЦ Северо-Востока» (г. Киров)
В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182
И. В. Губин, кандидат технических наук, доцент, директор, Политехнический институт, ВятГУ (г. Киров)
В. И. Джиган, доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник, Московский исследовательский центр ООО «Техкомпания Хуавэй» (г. Москва)
С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)
И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва)
Е. В. Котельников, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)
А. А. Красных, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)
А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий отделом, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург)
Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский)
В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар)
С. М. Окулов, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров)
Е. П. Петров, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-0336-1341
В. В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник, ВятГУ (г. Киров)
Д. А. Страбыкин, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)
И. В. Флегентов, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-6569-5654
А. Г. Хлебов, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)
А. В. Частиков, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-1998-7787
В. В. Черепанов, доктор технических наук, профессор, ВятГУ (г. Киров), ORCID: 0000-0002-5244-7061
В. В. Чермных, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, ВятГУ (г. Киров)
Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, ВятГУ (г. Киров)
А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, ВятГУ (г. Киров)

Научный журнал «Advanced science»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС 77-67556 от 31 октября 2016 г.)

Учредитель журнала ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя/редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **О. И. Коробкова**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Н. Петрова**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

© Вятский государственный университет (ВятГУ), 2018

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

ФИЗИКА

УДК 512.55 doi: 10.25730/VSU.0536.18.20

Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток*

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Теория упорядоченных множеств и решеток рассматривается в упражнениях и задачах. Определяются основные порядковые понятия, приводятся базовые примеры. Предлагаются циклы заданий по пяти темам: бинарные отношения, упорядоченные множества, решетки, дистрибутивные решетки, булевы алгебры.

Решение учебных и исследовательских задач – естественный путь овладения математикой. Особое значение имеют задачи, связанные с пониманием базовых структур математики и человеческого мышления, к которым относится порядковая структура. Наряду со структурным подходом в дидактике математики определяющую роль играет задачный подход, то есть обучение математике через анализ, решение и составление задач. Из приведенных 175 заданий можно выделить следующие группы задач: использование диаграмм Хассе при изучении конечных упорядоченных множеств; свойства линейно упорядоченных пространств; представления дистрибутивных решеток; взаимосвязи конечных упорядоченных множеств, конечных дистрибутивных решеток и конечных топологических пространств.

Ключевые слова: задача, обучение математике, бинарное отношение, порядковая структура, упорядоченное множество, решетка, дистрибутивность, булева алгебра.

1. Введение

При обучении математике принципиально важную роль играет *структурный подход*, при котором математика определяется как дедуктивная наука о *математических структурах* (то есть множествах с заданными на них наборами отношений). Французская группа математиков Бурбаки выделила три фундаментальных типа математических структур: алгебраический, порядковый, топологический. К ним добавляются структуры с мерой и инцидентностные структуры [см.: 20].

Порядковая структура (отношение порядка, упорядоченное множество, решетка) требует отдельного рассмотрения. Отношение порядка отражает и формализует сравнение вещей по той или иной величине (не обязательно числовой). Методике и методологии обучения порядковой структуре посвящены наши работы [6; 7; 11; 13; 14; 16; 19; 22]. В терминах отношения порядка можно выразить многие математические понятия и утверждения. Теория решеток позволяет видеть различные математические факты с единой точки зрения, унифицировать их. Порядковый и решеточный язык нагляден и адекватен, вызывает знакомые ассоциации с обычным порядком между действительными числами. Основополагающее значение порядковая структура имеет во многих разделах математики, например в функциональной алгебре [23; 24].

Решение учебных, учебно-исследовательских и исследовательских задач – естественный путь овладения математикой. Наряду со структурным подходом в дидактике математики главенствующую роль играет *задачный подход*, то есть обучение математике через задачи: через анализ, решение и составление задач. Особое значение имеют задачи, связанные с пониманием базовых структур математики и человеческого мышления, к которым относится порядковая структура.

Для магистрантов математических направлений подготовки нами разработана и ведется учебная дисциплина «Упорядоченные множества и решетки» [17]. Программа изучения дисциплины содержит пять глав: Бинарные отношения, Упорядоченные множества, Решетки, Дистрибутивные решетки, Булевы алгебры. По каждой из глав предусмотрены системы упражнений и задач.

Книги [1–5; 9; 20; 21; 25; 26; 28–39] содержат материал по упорядоченным множествам и решеткам. Необходимые сведения по теоретико-множественной топологии можно найти в трудах [1; 3; 20; 34; 40].

© Вечтомов Е. М., 2018

** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.*

2. Основные понятия и примеры

Напомним определения исходных порядковых понятий.

Бинарное отношение $\le$ на непустом множестве X называется *отношением порядка*, или просто *порядком*, если оно

рефлексивно: $\forall x \in X\ x \le x$,

транзитивно: $\forall x, y, z \in X\ (x \le y\ \&\ y \le z \Rightarrow x \le z)$,

антисимметрично: $\forall x, y \in X\ (x \le y\ \&\ y \le x \Rightarrow x = y)$.

При этом пара $\langle X, \le \rangle$ называется *упорядоченным множеством*. Отношение $\le$ читается «меньше или равно». Заметим, что во многих работах используются термины «частичный порядок» и «частично упорядоченное множество».

Пусть далее $\langle X, \le \rangle$ – произвольное упорядоченное множество, которое будем обозначать обычно как X. Заметим, что каждое непустое подмножество Y в X становится упорядоченным множеством $\langle Y, \le \rangle$ относительно исходного порядка $\le$.

Элементы $a, b \in X$ называются *сравнимыми*, если $a \le b$ ли $b \le a$. Если любые два элемента упорядоченного множества X сравнимы, то X называется *линейно упорядоченным множеством*, или просто *цепью*. Если различные элементы упорядоченного множества X попарно не сравнимы, то X называется *антицепью*. Элемент упорядоченного множества назовем *изолированным*, если он не сравним ни с каким другим элементом этого множества.

Естественным образом вводятся обозначения: $<$ (строго меньше), $\ge$ (больше или равно) и $>$ (строго больше).

Возьмем в X элементы $a \le b$. Множество $(a; b)=\{x \in X: a < x < b\}$ – это *интервал* в X с концами a и b, $[a; b]=\{x \in X: a \le x \le b\}$ – *отрезок*, $(a]=\{x \in X: x \le a\}$ – *начальный отрезок*, $[a)=\{x \in X: x \ge a\}$ – *финальный отрезок*. Аналогичным образом определяются: *полуинтервал*, *полуотрезок*, *начальный* и *финальный интервалы*. Если $a < b$ и интервал $(a; b)$ пустой, то говорят, что элементы $a < b$ образуют *покрытие*.

Элемент $a \in X$ называются:

наибольшим (*наименьшим*), если $\forall x \in X\ x \le a$ ($\forall x \in X\ x \ge a$);

максимальным (*минимальным*), если $\forall x \in X\ (x \ge a \Rightarrow x = a)$ ($\forall x \in X\ (x \le a \Rightarrow x = a)$);

верхней гранью (*нижней гранью*) множества $Y \subseteq X$, когда $\forall x \in Y\ x \le a$ ($\forall x \in Y\ x \ge a$);

точной верхней гранью (*точной нижней гранью*) множества $Y \subseteq X$, в обозначениях $\sup Y$ ($\inf Y$), когда a будет наименьшим элементом множества всех верхних граней множества Y (соответственно, наибольшим элементом множества всех нижних граней множества Y).

Говорят, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию минимальности* (*условию максимальности*), если каждое его непустое подмножество имеет минимальный (максимальный) элемент.

Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным множеством*, если любое его непустое подмножество обладает наименьшим элементом. Вполне упорядоченные множества суть цепи с условием минимальности.

Упорядоченное множество называется *решеткой*, если любое его двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани: $\sup\{a, b\}$ и $\inf\{a, b\}$. Ясно, что $\sup\{a\}=\inf\{a\}=a$. Это порядковый подход к определению решетки L.

На L вводятся бинарные операции сложения и умножения: $a+b=\sup\{a, b\}$ и $ab=a \cdot b=\{a, b\}$. Эти операции коммутативны, ассоциативны, идемпотентны и связаны законами (тождествами) поглощения $x+xy=x$, $x(x+y)=x$. Получаем алгебраическую структуру $\langle L, +, \cdot \rangle$ типа $\langle 2, 2 \rangle$, удовлетворяющую четырем парам взаимодвойственных аксиом (алгебраическое определение решетки). При этом на L задается порядок: $x \le y \Leftrightarrow x+y=y$, равносильно, $xy=x$.

Порядковое и алгебраическое определения решеток эквивалентны. Полезно рассматривать решетки как естественный симбиоз алгебраической и порядковой структур: алгебраические операции $+$, $\cdot$ и порядок $\le$ связаны следующими соотношениями:

$$x+y=\sup\{x, y\},\ xy=\inf\{x, y\},\ x \le y \Leftrightarrow x+y=y \Leftrightarrow xy=x,$$

$$(x \le y)\&(z \le u) \Rightarrow (x+z \le y+u)\&(xz \le yu).$$

Отображение f упорядоченного множества X в упорядоченное множество Y называется:

изотонным, если оно сохраняет отношение порядка:

$$\forall x, y \in X\ (x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y));$$

(*порядковым*) *изоморфизмом*, если f взаимно однозначно и обратное отображение f^{-1} также изотонное.

Упорядоченные множества называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Любой порядковый изоморфизм решеток сохраняет их алгебраические операции, то есть будет их (решеточным) изоморфизмом. Изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковые порядковые свойства, то есть свойства, выразимые в терминах отношения порядка. Так, упорядоченное множество, порядково изоморфное решетке, само будет решеткой.

Для решеток естественным образом определяются такие общеалгебраические понятия, как подрешетка, идеал, конгруэнция, фактор-решетка, гомоморфизм, прямое произведение семейства решеток.

Гомоморфизмы решеток – изотонные отображения, а изотонное отображение решетки на решетку может не сохранять операции, то есть не обязано быть решеточным гомоморфизмом.

Важнейшие классы решеток образуют модулярные решетки, дистрибутивные решетки и булевы решетки.

Решетка называется *дистрибутивной* (*модулярной*), если в ней выполняется тождество $x(y+z)=xy+xz$ (соответственно, тождество $x(xy+z)=xy+xz$). Дистрибутивные решетки модулярны. Классы всех решеток, модулярных решеток и дистрибутивных решеток являются многообразиями, то есть задаются (могут быть заданы) тождествами.

Наибольший элемент в решетке часто обозначается 1 (единица, единичный элемент), а наименьший элемент обозначается 0 (нуль, нулевой элемент). Решетка с 1 и 0 называется *ограниченной*. Конечные решетки – ограниченные.

Пятиэлементная решетка, полученная из трехэлементной антицепи (трехэлементного упорядоченного множества с одним изолированным элементом) добавлением элементов 0 и 1, называется *диамантом* (*пентагоном*).

Ограниченная дистрибутивная решетка L называется *булевой решеткой*, если $1\neq 0$ и $(\forall x\in L)(\exists y\in L)(x+y=1\ \&\ xy=0)$. Такие элементы x и y называют *дополнениями* друг друга. В булевой решетке дополнение y элемента x определено однозначно и обозначается через x'.

В решетке с нулем (с единицей) минимальные среди ненулевых (максимальные среди неединичных) элементы называются *атомами* (*коатомами*).

Упорядоченное множество X называется:

полным сверху (*полным снизу*), если любое его непустое подмножество имеет точную верхнюю грань (точную нижнюю грань);

полной решеткой, если X полно сверху и полно снизу; при этом $\sup X=1$ и $\inf X=0$. Полные решетки суть ограниченные решетки.

Если в упорядоченном множестве каждое ограниченное сверху подмножество имеет sup, то оно называется *условно полным сверху*. Двойственным образом определяется *условно полное снизу* упорядоченное множество. Условно полное сверху и снизу упорядоченное множество называется *условно полным*.

Цепь называется *плотной*, когда любой ее интервал $(a; b)$, $a < b$, непустой, стало быть, содержит бесконечно много элементов.

Приведем базовые (модельные) примеры упорядоченных множеств и решеток.

1. Цепь $\langle \mathbf{R}, \leq\rangle$ действительных чисел. При этом sup=max, inf=min. Цепь $\mathbf{R}$ условно полна, не имеет ни наибольшего элемента, ни наименьшего элемента.

2. *Булеан* $\langle \mathrm{B}(M), \subseteq\rangle$, где $\mathrm{B}(M)$ – множество всех подмножеств фиксированного множества M. Булеан $\mathrm{B}(M)$ для непустого множества M является полной атомной решеткой, причем $\sup=\cup$, $\inf=\cap$, $A'=M\setminus A$ – дополнение множества A до множества M. Для $\mathrm{B}(M)$ имеем: M – наибольший элемент, $\varnothing$ – наименьший элемент, одноэлементные подмножества – атомы, а их дополнения до M – коатомы.

3. Дистрибутивная решетка $\langle \mathbf{N}$, НОК, НОД, $|\rangle$ натуральных чисел с отношением делимости «делит» $|$, где $x|y$ означает $y=xz$ для некоторого натурального числа z. В $\mathbf{N}$ число 1 служит наименьшим элементом, а любое его непустое подмножество имеет inf. Если к $\mathbf{N}$ добавить число 0, то получим полную дистрибутивную решетку $\mathbf{N}_0$ неотрицательных целых чисел с наибольшим элементом – числом 0.

4. Булева решетка $\langle \mathrm{AF}; \vee, \&, \Rightarrow\rangle$ классов $[F]$ равносильных формул F логики высказываний (пропозициональных форм F), где $[F]\Rightarrow[G]$ означает, что формула $F\Rightarrow G$ является тавтологией.

5. Решетка $\mathbf{R}^X$ всевозможных числовых функций на непустом множестве X с поточечным порядком является дистрибутивной решеткой. Если X – топологическое пространство, то множество $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на X служит подрешеткой решетки $\mathbf{R}^X$.

6. Конечные упорядоченные множества с небольшим числом элементов удобно изображать диаграммами Хассе.

При построении *диаграммы Хассе* конечного упорядоченного множества X пары элементов a, $b\in X$, образующих покрытие $a < b$, соединяют стрелкой $a\to b$ или, нагляднее, «точки» a и b соединяют отрезком, идущим вверх на доске (или вперед в тетради). Получается ориентированный граф без петель и кратных ребер, по которому – с учетом рефлексивности и транзитивности – однозначно восстанавливается само упорядоченное множество X. Именно, $a < b$ в X тогда и только тогда, когда в X существует последовательность покрытий $a \to a_1$, $a_1 \to a_2$, …, $a_n \to b$ (для n=0 имеем покрытие $a \to b$ при $a=a_0$, $b=a_1$). Можно начать строить диаграмму Хассе для X с множества X_1 минимальных элементов, располагая их на первом, нижнем горизонтальном уровне. На втором уровне находятся элементы множества X_2 минимальных элементов упорядоченного множества $X \backslash X_1$. При этом каждый элемент множества X_2 будет соединен идущим вниз отрезком с подходящим элементом множества X_1. Аналогичным образом получаем множества X_3 (третий уровень), …, X_n (последний n-й уровень). Антицепи X_1, X_2, …, X_n разбивают на уровни все упорядоченное множество X. Любой элемент множества X_n, как легко видеть, служит началом убывающей n-элементной цепи с концом из множества X_1. Поэтому X имеет длину n–1. Можно строить диаграмму Хассе, начиная с максимальных элементов, располагая их на верхнем уровне, и постепенно двигаться вниз [см.: 14].

7. С точностью до изоморфизма существуют пять попарно не изоморфных пятиэлементных решеток. Среди них три решетки дистрибутивны, диамант – недистрибутивная модулярная решетка, пентагон – немодулярная решетка.

8. Всевозможные непустые подмножества в решетках примеров 1–5 суть упорядоченные множества с индуцированным порядком. Подрешетки булеанов называются *решетками множеств*, которые, как легко видеть, дистрибутивны.

3. Задания к главе «Бинарные отношения»

Под *бинарным отношением между множествами* A и B можно понимать произвольное подмножество ρ прямого произведения $A \times B$, то есть некоторое множество упорядоченных пар (a, b) элементов $a \in A$, $b \in B$. Вместо $(a, b) \in \rho$ пишут $a\rho b$ и иллюстрируют это стрелкой $a \to b$. В случае A=B говорят о *бинарном отношении* ρ *на множестве* A, которое задает на A ориентированный граф без кратных ребер, но, возможно, с петлями вида $a \to a$.

Отметим, что число элементов конечного множества A обозначается $|A|$ и называется его мощностью или порядком.

Изучению бинарных отношений посвящены статьи [1; 18], глава 1 учебного пособия [20], работа [39].

1. Что означает коммутативность объединения семейства множеств?

2. Докажите законы де Моргана для семейств множеств:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)' = \bigcap_{i\in I} A_i' \text{ и } \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)' = \bigcup_{i\in I} A_i'.$$

3. Докажите, что следующее утверждение (часто принимаемое в качестве аксиомы выбора) эквивалентно аксиоме выбора: для любого семейства $(A_i)_{i\in I}$ попарно непересекающихся непустых множеств ($A_i \neq \varnothing$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$) существует такое множество $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, что все множества $A \cap A_i$ – одноэлементные.

4. Докажите правила суммы и произведения для конечных множеств.

5. Для конечных множеств A, B, C докажите равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |A \cup C| + |B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B \cap C|.$$

6. Проверьте равенство $|B(A)| = 2^{|A|}$ для конечных множеств A.

7. Покажите, что число всех k-элементных подмножеств n-элементного множества ($k \le n$) равно числу сочетаний из n по k.

8. *Задача Льюиса Кэрролла.* В жаркой потасовке схватились 100 пиратов. Известно, что в схватке 70 пиратов потеряли ногу, 75 – руку, 80 – глаз и 85 – ухо. Сколько пиратов наверняка лишились и ноги, и руки, и глаза, и уха?

9. Покажите, что всякое универсальное множество бесконечно (в интуитивном смысле).

10. В рамках произвольного универсального множества U определите понятие натурального числа.

11. Для любых двух множеств A и B выполняется ровно одно из следующих пяти соотношений: $A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$, A и B не пустые и не пересекаются, A и B находятся в общем положении. Последнее означает, что множества $A \backslash B$, $B \backslash A$ и $A \cap B$ не пусты. Два множества в общем положении делят объемлющее их множество на четыре части. Сформулируйте понятие того, что n множеств находятся в общем положении.

12. На диаграмме Эйлера – Венна три множества A, B, C в общем положении делят плоскость на восемь частей. Докажите, что четыре окружности на плоскости не могут делить ее на 16 частей. (Известно, что пять перекрывающихся эллипсов могут делить плоскость на 32 части.)

13. Какое наибольшее число различных множеств можно получить из n произвольных множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, применяя только операции объединения и пересечения множеств? Покажите, что при n=3 получается 18 множеств. При n=4 имеется 166 множеств.

14. Докажите, что из n множеств, находящихся в общем положении, с помощью операций объединения, пересечения и дополнения получается 2^{2^n} множеств.

15. Чему равно наибольшее число множеств, получаемых из n множеств последовательным применением операций объединения, пересечения и разности?

16. Установите взаимно однозначное соответствие между булеаном $\mathbf{B}(A)$ и множеством всех отображений $f: A\to\{0, 1\}$, называемых *характеристическим функциями* множеств $f^{-1}(1)$.

17. Покажите, что бинарное отношение является всюду определенным тогда и только тогда, когда обратное к нему отношение сюръективно.

18. Докажите, что однозначность бинарного отношения ρ равносильна инъективности обратного отношения ρ^{-1}.

19. Проверьте, что любое отображение f является композицией сюръекции g и инъекции h. Что при этом означает биективность f, инъективность g, сюръективность h?

20. Пусть даны произвольные бинарные отношения ρ, σ между множествами A и B и δ, γ между множествами B и C. Докажите следующие соотношения:

$$\rho\subseteq \sigma \Leftrightarrow \rho^{-1}\subseteq \sigma^{-1} \Leftrightarrow \sigma'\subseteq \rho';\ 1_A\rho=\rho=\rho 1_B;$$
$$(\rho^{-1})^{-1}=\rho;\ (\rho\delta)^{-1}=\delta^{-1}\rho^{-1};$$
$$\rho\subseteq \rho\rho^{-1}\rho, \text{ причем, } \rho=\rho\rho^{-1}\rho \Leftrightarrow \rho \text{ инъективно};$$
$$(\rho\cup\sigma)\delta=\rho\delta\cup\sigma\delta;\ (\rho\cap\sigma)\delta\subseteq \rho\delta\cap\sigma\delta;$$
$$\rho(\delta\cup\gamma)=\rho\delta\cup\rho\gamma;\ \rho(\delta\cap\gamma)\subseteq \rho\delta\cap\rho\gamma.$$

21. Пусть ρ – бинарное отношение между множествами X, Y и $A, B\subseteq X$. Докажите следующие соотношения:

а) $\rho(A\cup B)=\rho(A)\cup\rho(B)$;

б) $\rho(A\cap B)\subseteq \rho(A)\cap\rho(B)$;

в) $(\forall C, D\subseteq X\ \rho(C\cap D)=\rho(C)\cap\rho(D)) \Leftrightarrow \rho$ инъективно.

22. Верны ли утверждения предыдущего упражнения для семейств подмножеств в X?

23. Докажите равенство $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ для любого отображения $f: X\to Y$ и произвольного семейства $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств множества Y.

24. *Дифункциональные соответствия.* Бинарное отношение ρ между множествами A и B называется *дифункциональным*, если для любых $a, c\in A$, $b, d\in B$ из $a\rho b$, $a\rho d$, $c\rho b$ следует $c\rho d$ (равносильно, $\rho\rho^{-1}\rho\subseteq \rho$). Опишите дифункциональные отношения между данными множествами.

25. *Задача Рамсея.* Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой людей.

26. В терминах разбиений опишите все симметричные транзитивные отношения на произвольном множестве.

27. Покажите, что отношение равночисленности ($A\sim B \Leftrightarrow |A|=|B|$) на множестве всех конечных подмножеств универсального множества является эквивалентностью. Что представляет собой соответствующее фактор-множество?

28. На множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел зададим бинарное отношение ρ формулой: $a\rho b$ означает, что $a-b\in \mathbf{Z}$ ($a, b\in \mathbf{R}$). Докажите, что ρ – эквивалентность на $\mathbf{R}$. Дайте геометрическую интерпретацию фактор-множества $\mathbf{R}/\rho$.

29. *Теорема о гомоморфизмах для множеств.* Для всякой сюръекции $f: A\to B$ существует единственная биекция g: $A/{\sim}\to B$, такая, что $f=\pi g$, где π: $A\to A/{\sim}$ – каноническое отображение на фактор-множество множества A по отношению равнообразности: $a\sim b \Leftrightarrow af=bf$.

30. Рассмотрим множество $S = \mathrm{B}(X)\backslash\{\varnothing\}$ всех непустых подмножеств непустого множества X. Для любых $A, B\in S$ положим: $A\rho B \Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$. Покажите, что отношение ρ является отношением *сходства* (рефлексивным и симметричным) на S. Заметим, что любое отношение сходства определенным образом сводится к описанному сходству ρ [39].

31. Составьте таблицу на совместимость следующих четырех свойств бинарного отношения между множествами: всюду определенности, однозначности, инъективности и сюръективности.

32. Составьте таблицу на совместимость следующих пяти свойств бинарного отношения на множестве: рефлексивности, симметричности, транзитивности, антирефлексивности и антисимметричности.

33. На пятиэлементном множестве задайте несюръективное транзитивное бинарное отношение. Какими свойствами еще оно обладает?

34. Когда композиция бинарного отношения и обратного к нему отношения является рефлексивным отношением? Симметричным отношением?

4. Задания к главе «Упорядоченные множества»

Введем важные понятия длины, ширины и размерности конечного упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$. Длиной n-элементной цепи считается число $n-1$. *Длиной* X называется наибольшая из длин цепей в X. *Шириной* X называется наибольшее число элементов антицепей в X. Наконец, *размерность* X – это наименьшее число линейных порядков на X, пересечением которых является исходный порядок $\leq$.

На произвольной цепи определяется *интервальная топология*, базой открытых множеств которой служат всевозможные интервалы, начальные и финальные интервалы. Цепь с интервальной топологией называется *линейно упорядоченным пространством* [см.: 20; 40]. Конечные цепи, цепи натуральных и целых чисел дискретны как линейно упорядоченные пространства.

Теория упорядоченных множеств затрагивается в работах [4–7; 8; 11; 13; 14; 16; 19; 20; 22; 30; 31; 37].

35. Отношение порядка на множестве $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ задано отношением покрытия: $a < b < e$, $b < f$, $d < c < e$, $c < f$. Найдите все линейные порядки на X, содержащие данный порядок $\leq$.

36. Сколько различных отношений порядка можно задать на n-элементном множестве при $n \leq 4$?

37. Покажите, что с точностью до порядкового изоморфизма существуют: 3 двухэлементных, 5 трехэлементных, 16 четырехэлементных, 63 пятиэлементных, 318 шестиэлементных упорядоченных множеств (нарисуйте их диаграммы Хассе).

38. Проверьте, что число упорядочений n-элементного множества равно: 3 при n=2, 19 при n=3, 219 при n=4.

39. Когда ширина конечного упорядоченного множества равна его мощности?

40. Докажите, что мощность любого конечного упорядоченного множества не превосходит произведения его длины, увеличенной на 1, и его ширины.

41. Решите следующую задачу XIII Московской математической олимпиады. Пусть натуральные числа 1, 2, 3, …, 101 выписаны в ряд в некотором порядке. Покажите, что из этого ряда можно вычеркнуть 90 чисел так, чтобы оставшиеся 11 чисел были расположены либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

42. Для натуральных чисел m и n постройте упорядоченное множество мощности $(m+1)n$ длины m и ширины n.

43. Постройте конечное связное упорядоченное множество наибольшей (и наименьшей) мощности длины 4, ширины 3 с двумя минимальными и с тремя максимальными элементами.

44. Докажите известную лемму Кенига: упорядоченное множество конечно, если конечны все его цепи и антицепи.

45. Докажите, что любой порядок на произвольном непустом множестве X можно *линейно доупорядочить*, то есть расширить до некоторого линейного порядка на X (Э. Шпильрайн).

46. Убедитесь в корректности определения размерности конечных упорядоченных множеств.

47. Покажите, что все упорядоченные множества мощности ≤ 5, не являющиеся цепями, имеют размерность 2.

48. Постройте шестиэлементное упорядоченное множество размерности 3.

49. Как определить размерность бесконечного упорядоченного множества?

50. Что такое линейный строгий порядок $<$ на множестве X? Докажите, что бинарное отношение на X, являющееся дополнением линейного строгого порядка $<$, будет линейным порядком на X.

51. Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – упорядоченное множество. Элементы $x, y \in X$ назовем $<$-несравнимыми, если $\rceil(x< y) \& \rceil(y< x)$. Покажите, что отношение $<$-несравнимости на X является эквивалентностью $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y, z \in X\ (x< z \Rightarrow (x< y) \vee (y< z)).$$

52. Докажите *принцип двойственности для упорядоченных множеств*: если некоторое предложение об упорядоченных множествах верно для всех упорядоченных множеств, то верно и двойственное предложение, получающееся из данного заменой отношения $\leq$ на отношение $\geq$, и обратно. Приведите примеры двойственных понятий и двойственных теорем.

53. Если на множестве A задано отношение порядка $\leq$, то бинарное отношение $<$, определяемое как пересечение отношений $\leq$ и $\neq$, есть *строгий порядок* (антирефлексивное и транзитивное) на множестве A. Обратно, если $<$ – произвольный строгий порядок на множестве A, то бинарное отношение $\leq$, определяемое как объединение отношений $<$ и $=$, является отношением порядка на множестве A. Тем самым, между порядками и строгими порядками на любом множестве A устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие. Докажите эти утверждения.

54. Пусть ρ – отношение *квазипорядка* (рефлексивное и транзитивное) на множестве A. Для произвольных элементов $a, b\in A$ положим $a\sim b$, если $a\rho b$ и $b\rho a$. Покажите, что отношение $\sim$ является эквивалентностью на A. На фактор-множестве $A/\sim$ задается отношение порядка $\leq$ по формуле

$$\widetilde{a} \leq \widetilde{b} \Leftrightarrow a\rho b \text{ для любых } a, b\in A.$$

Проверьте корректность этих утверждений.

55. Докажите, что для любого натурального числа n существует конечное упорядоченное множество размерности n. Например, можно взять булеан n-элементного множества.

56. Докажите, что отношение порядка $\leq$ на множестве X есть пересечение двух линейных порядков $\Leftrightarrow$ отношение $<$-несравнимости на X является отношением сравнимости для некоторого порядка на X.

57. Найдите на **N** неполный линейный порядок и новый полный порядок.

58. Докажите, что произвольная цепь полна тогда и только тогда, когда она полна сверху и имеет наименьший элемент. Сформулируйте двойственное утверждение.

59. Докажите, что понятия условно полной сверху цепи, условно полной снизу цепи и условно полной цепи равносильны.

60. Убедитесь, что изотонная биекция одной цепи на другую есть (порядковый) изоморфизм данных цепей.

61. Проверьте, что всякое вполне упорядоченное множество есть цепь.

62. Докажите, что упорядоченное множество удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда в нем нет бесконечных (строго) убывающих последовательностей.

63. Известно, что рассуждения по трансфинитной индукции проводятся на вполне упорядоченных множествах, в частности обычная математическая индукция – на **N**. Нетерова индукция ведется по упорядоченным множествам с условием минимальности. Выясните, что такое нетерова индукция.

64. Покажите, что изотонное инъективное отображение конечного упорядоченного множества в себя является изоморфизмом.

65. Верно ли данное утверждение для бесконечных упорядоченных множеств?

66. Как можно обобщить упражнение 64?

67. Докажите, что в классе конечных упорядоченных множеств теорема о неподвижной точке неверна. Приведите соответствующий контрпример.

68. Докажите, что бесконечное вполне упорядоченное множество, имеющее единственный предельный элемент (наименьший элемент), изоморфно цепи **N**.

69. Какие вполне упорядоченные множества имеют два предельных элемента? $n> 2$ предельных элементов?

70. Докажите хаусдорфовость и нормальность линейно упорядоченных пространств.

71. Покажите, что для дискретности линейно упорядоченного пространства X необходимо и достаточно, чтобы каждый ненаименьший элемент цепи X имел предыдущий элемент, а каждый ненаибольший ее элемент имел последующий элемент.

72. Сепарабельность линейно упорядоченного пространства X эквивалентна существованию в цепи X счетного плотного в X подмножества. Докажите это.

73. Докажите, что топология подпространства Y линейно упорядоченного пространства, вообще говоря, сильнее интервальной топологии цепи Y. Приведите соответствующий пример.

74. Убедитесь в том, что цепь изоморфна **Z** тогда и только тогда, когда все ее финальные интервалы изоморфны **N**, а все начальные интервалы антиизоморфны **N**.

75. Почему каждый интервал цепи **Q** изоморфен **Q**?

76. Докажите, что цепь X без наименьшего и наибольшего элементов изоморфна **R** тогда и только тогда, когда X плотна, сепарабельна, и любая последовательность вложенных отрезков в X имеет непустое пересечение.

77. Докажите, что линейно упорядоченное поле P изоморфно полю **R** с обычным порядком тогда и только тогда, когда P архимедово и все фундаментальные последовательности в нем являются сходящимися.

78. Пусть $Y=X\cup\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ – упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества X добавлением «новых» наименьшего $\boldsymbol{0}$ и наибольшего $\boldsymbol{1}$ элементов. Могут ли упорядоченные множества X и Y быть изоморфными?

79. Докажите, что любое конечное упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству (с индуцированным порядком) упорядоченного множества $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ с сохранением имеющихся точных верхних граней.

5. Задания к главе «Решетки»

Собственный идеал P решетки L называется *простым*, если для любых элементов $a, b \in L$ из $ab \in P$ следует $a \in P$ или $b \in P$. Положим Spec L – множество всех простых идеалов решетки L. Через $\mathrm{D}(a)$ обозначается множество всех тех простых идеалов в L, которые не содержат элемент $a \in L$: $\mathrm{D}(a)=\{P \in \mathrm{Spec}\, L\colon\ a \notin P\}$. Множества вида $\mathrm{D}(a)$ образуют базу топологии (открытых множеств) на Spec L – *стоуновской топологии* на Spec L. Ее открытыми множествами служат множества

$$\mathrm{D}(I)=\{P\in\mathrm{Spec}\, L\colon I \text{ не содержится в } P\}$$

по всем подмножествам I в L. В результате получаем топологическое пространство Spec L (при условии Spec $L\neq\varnothing$), называемое *простым спектром* решетки L.

Теории решеток посвящены книги [5; 9; 28; 29; 35; 37], глава V справочника [32].

80. Выведите законы идемпотентности в решетках из остальных решеточных аксиом.

81. Докажите, что в любой решетке L наибольший элемент 1 определяется каждым из условий: $\forall x\in L\ x+1=1$; $\forall x\in L\ x\cdot 1=x$.

82. Докажите, что в решетках L наименьший элемент 0 определяется каждым из условий: $\forall x\in L\ x+0=x$; $\forall x\in L\ x\cdot 0=0$.

83. Покажите, что любая $(n+2)$-элементная решетка получается из единственного (с точностью до изоморфизма) n-элементного упорядоченного множества.

84. Всякое ли n-элементное упорядоченное множество получается из $(n+2)$-элементной решетки отбрасыванием наибольшего и наименьшего элементов?

85. Постройте диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток.

86. Докажите, что в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать:

$$a \le b \text{ и } c \le d \text{ влекут } a+c \le b+d \text{ и } ac \le bd.$$

87. Докажите, что в любой решетке выполняется тождество

$$(xy+xz)(xy+yz)=xy.$$

88. Покажите, что если в решетке $a+b+c=abc$, то $a=b=c$.

89. Во всякой ли решетке выполняется тождество

$$xy+xz+yz=(x+y)(x+z)(y+z)?$$

90. Покажите, что в произвольной решетке верны неравенства

$$ab+ac \le a(ab+c) \le a(b+c).$$

91. Найдите все подрешетки шестиэлементных решеток.

92. Найдите все подрешетки и идеалы пятиэлементной цепи.

93. Наименьший элемент решетки обычно называется *нулем* и обозначается 0, а наибольший элемент решетки часто называется *единицей* и обозначается 1. Докажите, что нулевой элемент 0 (единичный элемент 1) произвольной решетки, если он существует, определяется любым из тождеств $0a = 0$, $0+a = a$ (соответственно: $1a = a$, $1+a = 1$).

94. Верна ли теорема о неподвижной точке в классе решеток?

95. Приведите пример изотонного биективного отображения решеток, не являющегося гомоморфизмом.

96. Покажите, что пересечение двух главных идеалов решетки – главный идеал.

97. Когда пересечение всех идеалов решетки непусто? Является ее идеалом?

98. Обязана ли сумма двух идеалов решетки снова быть ее идеалом?

99. Проверьте, что в конечной решетке все идеалы главные.

100. Верно ли обратное утверждение?

101. Верно ли следующее утверждение: если решетка удовлетворяет условию максимальности (минимальности), то все ее идеалы – главные?

102. Отыщите все самодвойственные шестиэлементные решетки.

103. Найдите все подрешетки, идеалы и конгруэнции следующих конечных решеток: пятиэлементных решеток; цепей; прямого произведения двух цепей.

104. Докажите, что модулярность произвольной решетки равносильна отсутствию в ней подрешеток, изоморфных пентагону.

105. В решетках понятия фильтра и простого фильтра двойственны понятиям идеала и простого идеала. Дайте определения фильтра и простого фильтра в решетках.

106. Докажите, что для любого подмножества I произвольной решетки L равносильны следующие свойства:

1) I – простой идеал решетки L;
2) I – идеал, а $L\backslash I$ – фильтр решетки L;
3) $L\backslash I$ – простой фильтр в L;
4) I есть прообраз нуля 0 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}=\{0, 1\}$;
5) $L\backslash I$ – прообраз 1 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}$.

107. Дайте пример ограниченной модулярной решетки, в которой существует элемент с бесконечным множеством дополнений.

108. Пусть p – ненулевой элемент решетки L с 0. Докажите, что p есть атом $L \Leftrightarrow pa=0$ или $pa=p$ для всех $a\in L$.

109. Убедитесь, что для любой решетки L отображение D: $L \to \{\mathrm{D}(a)\colon a\in L\}$ является гомоморфизмом решетки L на решетку множеств $\{\mathrm{D}(a)\colon a\in L\}$.

6. Задания к главе «Дистрибутивные решетки»

При изучении дистрибутивных решеток в качестве центральных результатов выступают теоремы о представлении абстрактных дистрибутивных решеток в дистрибутивных решетках из примеров 1–3, 5.

Метод М. Стоуна дает представление любой дистрибутивной решетки как решетки некоторых множеств ее простых идеалов. При этом реализуется функциональный подход:

Теорема Стоуна:

*Произвольная неодноэлементная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $C_{00}(\mathrm{Spec}\ L, \mathbf{D})$ всех непрерывных **D**-значных функций с компактным носителем, определенных на простом спектре Spec L решетки L.*

Здесь $\mathbf{D}=\{0, 1\}$ – топологическая двухэлементная цепь с топологией несвязного двоеточия с замкнутой точкой 0. При этом Spec L будет локально компактным T_0-пространством.

Элемент a решетки L называется: *простым* (неразложимым в произведение), если $a=bc$ влечет $a=b$ или $a=c$; *неразложимым* (в сумму), если $a=b+c$ влечет $a=b$ или $a=c$ ($\forall b, c \in L$).

Обозначим через $X(L)$ упорядоченное множество (с индуцированным порядком) всех неразложимых элементов конечной дистрибутивной решетки L.

Порядковым идеалом упорядоченного множества X называется любое подмножество в X, содержащее вместе с каждым своим элементом и все меньшие его элементы. Порядковые идеалы упорядоченного множества X задают на нем T_0-топологию $J(X)$. Топологическое пространство называется *T_0-пространством*, если открытые множества разделяют его точки.

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решетках гласит (Г. Биркгоф):

Всякая конечная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $J(X(L)$.

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решетках позволяет установить взаимосвязь между категориями конечных дистрибутивных решеток, конечных упорядоченных множеств и конечных T_0-пространств.

Пусть L – неодноэлементная дистрибутивная решетка. Для каждого простого идеала P решетки L ($P\in\mathrm{Spec}\ L$) имеем гомоморфизм $f_P\colon L\to\mathbf{D}$, для которого $f_P(a)=0 \Leftrightarrow a\in P$ для всех $a\in L$. Рассмотрим отображение

$$\alpha\colon L\to\mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\,L},\ \alpha(a)(P)=f_P(a) \text{ для любых } a\in L \text{ и } P\in\mathrm{Spec}\ L.$$

Отображение α будет изоморфным вложением (инъективным гомоморфизмом) решетки L в прямое произведение $\mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\,L}$, при этом образ $\alpha(a)=(f_P(a))_{P\in\mathrm{Spec}\,L}$ элемента $a\in L$ есть «строка» с P-ми координатами 0 или 1. Кроме того, $\alpha(a)\colon \mathrm{Spec}\ L\to\mathbf{D}$ служит характеристической функцией подмножества $\mathrm{D}(a)$ множества Spec L.

Исследованию дистрибутивных решеток посвящены статьи [8; 10]. Дистрибутивные решетки образуют, наряду с ассоциативными кольцами, важный класс полуколец [12; 26; 27].

110. Проверьте, что любая цепь является дистрибутивной решеткой.

111. Покажите, что дистрибутивность решетки эквивалентна выполнению в ней двойственного дистрибутивного закона

$$(x+y)(x+z)=x+yz.$$

112. Докажите, что решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a, b и c имеем: $a+b=a+c$ и $ab=ac$ влекут $b=c$.

113.Убедитесь, что в любой дистрибутивной решетке верно тождество
$(x+y)(x+z)(y+z)=xy+xz+yz$.

114. Будет ли произвольная решетка с тождеством $x(xy+z)=x(y+z)$ дистрибутивной?

115. В дистрибутивной решетке множество $A+B$ является идеалом для любых ее идеалов A и B. Докажите это.

116. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

117. Покажите, что если A и B – главные идеалы в дистрибутивной решетке, то и A+B будет главным идеалом.

118. Докажите, что дистрибутивность решетки эквивалентна дистрибутивности решетки всех ее идеалов.

119. Проверьте, что любая дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке решетки всех ее идеалов.

120. Докажите, что решетка L дистрибутивна $\Leftrightarrow$ простые идеалы в L разделяют ее элементы.

121. Выведите отсюда следующий критерий дистрибутивности решетки: решетка L дистрибутивна $\Leftrightarrow$ отображение D: $L \to \{\mathrm{D}(a)\colon a \in L\}$ – решеточный изоморфизм.

122. Докажите, что дистрибутивность произвольной решетки эквивалентна отсутствию в ней подрешеток, изоморфных пентагону и диаманту.

123. Всякая конечнопорожденная дистрибутивная решетка конечна. Докажите.

124. Могут ли все идеалы бесконечной ограниченной дистрибутивной решетки быть главными?

125. Докажите, что идеалы A и B дистрибутивной решетки являются главными, если идеалы $A \cap B$ и A+B – главные.

126. Докажите, что максимальные идеалы дистрибутивных решеток являются простыми.

127. Найдите простые и максимальные идеалы в дистрибутивных решетках, имеющих не более семи элементов.

128. Может ли дистрибутивная решетка не иметь максимальных идеалов?

129. Обязана ли дистрибутивная решетка содержать 1, если каждый ее собственный идеал лежит в некотором максимальном идеале?

130. Покажите, что главный идеал $(a]$ дистрибутивной решетки L является простым идеалом $\Leftrightarrow$ a – простой элемент в L.

131. Докажите, что для любой дистрибутивной решетки L множества $\mathrm{D}(I)$ по всем идеалам I в L исчерпывают все открытые множества стоуновской топологии на Spec L.

132. Множество $\mathrm{D}(I)$ пусто для некоторого идеала I дистрибутивной решетки L $\Leftrightarrow$ L имеет 0 (при этом $I=\{0\}$). Почему?

133. Докажите, что $\mathrm{D}(a)=\mathrm{Spec}\ L$ для некоторого элемента a дистрибутивной решетки L $\Leftrightarrow$ L имеет 1 (при этом a=1).

134. Докажите, что компактность простого спектра дистрибутивной решетки равносильна существованию 1 в ней.

135. Приведите пример ограниченной дистрибутивной решетки, не имеющей атомов.

136. Докажите фундаментальную теорему о конечных дистрибутивных решетках.

137. Проверьте, что для любой неодноэлементной решетки L отображение $\alpha\colon L \to \mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\,L}$ является изоморфным вложением решеток, причем L будет подпрямым произведением семейства решеток $\mathbf{D}$, индексированного множеством Spec L, другими словами, подпрямым произведением $|\mathrm{Spec}\ L|$ экземпляров двухэлементной цепи {0, 1}.

138. Докажите теорему Стоуна о функциональном представлении дистрибутивных решеток.

139. Докажите, что многообразие дистрибутивных решеток является наименьшим нетривиальным многообразием решеток. *Тривиальное многообразие* решеток задается тождеством x=y; оно совпадает с классом всех одноэлементных решеток.

140. Всякое конечное упорядоченное множество X порядково изоморфно упорядоченному множеству $X(J(X))$. Убедитесь в этом.

141. Любое конечное T_0-пространство $\langle X, \tau\rangle$ гомеоморфно $\langle X(\tau), J(X(\tau))\rangle$. Проверьте.

142. Обозначим через C_n n-элементную цепь. Почему $J(C_n) \cong C_{n+1}$?

143. Пусть упорядоченное множество $X=C_m \cup C_n$ есть несвязное объединение цепей. Что представляет собой решетка $J(X)$?

144. Покажите, что для несвязного объединения U двух конечных упорядоченных множеств X и Y выполняется равенство $J(U)=J(X)\times J(Y)$, то есть решетка $J(U)$ разложима. Верно ли обратное утверждение?

145. Какие решетки $J(X)$ имеют: антицепи X; булеаны X; произвольные цепи X?

146. Как связаны решетки $J(X)$ и $J(Y)$ двойственных друг другу упорядоченных множеств X и Y?

147. Укажите все топологии на данном n-элементном множестве при $n \leq 4$.

148. Найдите все четырехэлементные T_0-пространства.

149. Докажите, что любая конечная дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке решетки $\langle \mathbf{N}, |\rangle$.

150. Покажите, что главные идеалы решетки $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ исчерпывают, с точностью до изоморфизма, прямые произведения конечного числа конечных цепей.

7. Задания к главе «Булевы алгебры»

Теорема Стоуна дает функциональное представление булевых решеток:

Произвольная булева решетка L изоморфна решетке C(Spec L, $\mathbf{D}$*) всех непрерывных* $\mathbf{D}$*-значных на ее максимальном спектре Max L со значениями в дискретной двухэлементной цепи* $\mathbf{D}$.

Заметим, что Max L=Spec L – нульмерный компакт, то есть компактное хаусдорфово пространство с базой из открыто-замкнутых множеств.

Булевой алгеброй называется алгебраическая структура $\langle L, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$, такая, что $\langle L, +, \cdot, 0, 1\rangle$ – дистрибутивная решетка, в которой выполняются тождества $x+1=1$, $x+0=x$, $x+x'=1$ и $xx'=0$ (обычно предполагается, что $1\neq 0$). Тем самым, булевы алгебры в указанной сигнатуре задаются 13 тождествами, образуя многообразие. Как класс булевы алгебры совпадают с булевыми решетками. Но булевы решетки в решеточной сигнатуре не образуют многообразие.

Булево кольцо – это ассоциативное кольцо с тождеством $xx=x$.

Отметим, что булевы решетки и булевы кольца рассматриваются в работах [5; 8; 26; 28; 34; 36; 37].

151. Докажите следующие свойства булевых решеток L ($\forall\ a, b\in L$):

(1) $0'=1$, $1'=0$.

(2) $a''=a$.

(3) $a\leq b \Leftrightarrow b'\leq a' \Leftrightarrow a'+b=1 \Leftrightarrow ab'=0$.

(4) $(a+b)'=a'b'$, $(ab)'=a'+b'$ (законы де Моргана).

(5) $a+a'=1$, $aa'=0$.

152. Покажите, что в любом булевом кольце выполняется тождество $x+x=0$.

153. Докажите коммутативность булевых колец.

154. Проверьте, что всякое конечное булево кольцо имеет единицу.

155. Докажите, что классы булевых решеток и булевых колец с единицей совпадают.

156. Выведите отсюда совпадение классов обобщенных булевых решеток и булевых колец. Решетка называется *обобщенно булевой*, если каждый ее отрезок $[a, b]$, $a< b$, – булева решетка.

157. Докажите, что булевость ассоциативного кольца равносильна тому, что различные элементы кольца имеют различные левые аннуляторы.

158. Найдите неразложимые и простые элементы восьмиэлементной булевой решетки.

159. Докажите, что булеан $\mathrm{B}(M)$ и упорядоченное множество $\mathbf{D}^M$ изоморфны, более того, при каноническом соответствии сохраняются все булевы операции.

160. Дайте прямое доказательство теоремы о строении конечных булевых решеток: любая конечная булева решетка изоморфна булеану множества всех своих атомов.

161. Докажите теорему о функциональном представлении булевых решеток.

162. Выведите из нее теорему о строении конечных булевых решеток.

163. Как формулируется теорема о функциональном представлении булевых колец? Докажите сформулированную теорему.

164. Убедитесь в том, что множество всех дополняемых элементов ограниченной дистрибутивной решетки образует в ней булеву подрешетку.

165. Как коатомы булевой решетки связаны с ее атомами?

166. Если каждый идеал булевой решетки главный, то она конечна. Докажите.

167. Докажите, что булевы решетки с условием максимальности (минимальности) конечны.

168. Установите, что в любой бесконечной булевой решетке существует бесконечная антицепь.

169. Докажите, что в любой бесконечной булевой решетке существует счетное дизъюнктное множество ненулевых элементов.

170. Приведите пример неполной атомной булевой решетки.

171. Приведите пример безатомной булевой решетки.

172. Покажите, что в булевых решетках простые идеалы максимальны.

173. Будет ли всякая неодноэлементная дистрибутивная решетка L, в которой Spec L=Max L, булевой решеткой? Обобщенно булевой решеткой?

174. Докажите, что в любой полной булевой решетке L верны равенства

$$a\cdot\sup B=\sup(aB) \text{ и } a+\inf B=\inf(a+B)$$

для всех $a\in L$ и $B\subseteq L$.

175. Опираясь на это, докажите, что всякая полная атомная булева решетка изоморфна булеану множества всех ее атомов.

8. Заключение

Циклы задач по теории упорядоченных множеств и решеток хорошо подходят в качестве основы выпускных квалификационных работ для студентов математических направлений подготовки. В настоящее время два магистранта кафедры фундаментальной математики ВятГУ выполняют ВКР на темы «Конечные дистрибутивные решетки и их представления» и «Построение конечных топологических пространств», используя задачный материал раздела 6.

В курсе «Упорядоченные множества и решетки» большое внимание уделяется анализу конкретных порядковых объектов, выяснению их специфических, уникальных и общих, универсальных свойств. Например, булеаны выступают и как уникальные решетки со своей абстрактной характеризацией, и как универсальные объекты в многообразии дистрибутивных решеток.

Отметим, что многие задания хорошо известны и взяты из источников, указанных в списке литературы. Некоторые задачи являются авторскими, например задания 31, 32, 41, 64, 69, 78, 79, 114, 120, 143–146, 149, 157.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.
2. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М. : Изд-во МГУ, 1988. 112 с.
3. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М. : Наука, 1974. 424 с.
4. *Беран Л.* Упорядоченные множества. М. : Наука, 1981. 64 с.
5. *Биркгоф Г.* Теория решеток / пер. с англ. М. : Наука, 1984. 568 с.
6. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Линейно упорядоченные множества // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. Вып. 4. С. 16–27.
7. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Задачи в курсе «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Материалы II Междунар. науч.-практ. конф. «Задачи в обучении математике, физике, информатике: теория, опыт, инновации», посвященной 125-летию П. А. Ларичева. Вологда : ВоГУ, 2017. С. 72–74.
8. *Вечтомов Е. М.* Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Математические заметки. 1993. Т. 53. Вып. 2. С. 15–24.
9. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток : учеб.-метод. разработка спецкурса. Киров : Киров. гос. пед. ин-т, 1995. 40 с.
10. *Вечтомов Е. М.* Дистрибутивные решетки, функционально представимые цепями // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. Вып. 1. С. 93–102.
11. *Вечтомов Е. М.* Прямой способ введения отношения порядка в системе Пеано // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. С. 6–14.
12. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца: пособие для студентов и аспирантов. Киров : ВятГПУ, 2000. 44 с.
13. *Вечтомов Е. М.* Упорядоченные структуры в курсе математики // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» (Дубна) : сб. материалов Всерос. конф. М. : МЦНМО, 2000. С. 351–354.
14. *Вечтомов Е. М.* Упорядоченные множества с диаграммой Хассе // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2002. № 6. С. 13–15.
15. *Вечтомов Е. М.* Бинарные отношения // Математика в образовании. 2007. Вып. 3. С. 41–51.
16. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2(1). С. 111–120.
17. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.
18. *Вечтомов Е. М.* О бинарных отношениях для математиков и информатиков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. 1(3). С. 51–58.
19. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.
20. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учеб. пособие для академ. бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
21. *Вечтомов Е. М.* Философия математики : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 317 с.
22. *Вечтомов Е. М., Варанкина В. И.* Упорядоченные множества с конечным условием минимальности // Вестник Вятского государственного педагогического университета. 2000. № 3–4. С. 11–12.
23. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1. Киров : «Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. 384 с.
24. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2. Киров : «Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.
25. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец: монография. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

26. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.

27. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Полукольца, близкие к дистрибутивным решеткам // Международная конференция «Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца» : тез. докл. СПб. : РГГИ, 1995. С.90–91.

28. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 456 с.

29. *Коробков С. С.* Введение в теорию решеток : учеб. пособие по спецкурсу. Екатеринбург : Урал. гос. пед. ун-т, 1996. 64 с.

30. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. 2-е изд. М. : Наука, 1973. 400 с.

31. *Общая алгебра. Т. 1* / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М. : Наука, 1990. 592 с.

32. *Общая алгебра. Т. 2* / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М. : Наука, 1991. 480 с.

33. *Оре О.* Теория графов / пер. с англ. 2-е изд. М. : Наука, 1980. 336 с.

34. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики / пер. с англ. М. : Наука, 1972. 592 с.

35. *Салий В. Н.* Решетки с единственными дополнениями. М. : Наука, 1984. 128 с.

36. *Сикорский Р.* Булевы алгебры / пер. с англ. М. : Мир, 1969. 376 с.

37. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. 2-е изд., доп. М. : Наука, 1982. 160 с.

38. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. М. : Мир, 1990. 440 с.

39. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. М. : Наука, 1971. 256 с.

40. *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

Practical training on Ordered Sets and Lattices

E. M. Vechtomov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The theory of ordered sets and lattices is considered through a number of exercises and tasks. Basic ordered concepts are defined and important examples are shown. Series of tasks on five topics are given: binary relations, ordered sets, lattices, distributive lattices, and Boolean algebras.

The solving of educational and research tasks is a natural way of mastering math. Of particular importance are the tasks associated with the understanding of the basic structures of mathematics and human thinking, which include the ordinal structure. In the didactics of mathematics, along with the structural approach, the decisive role belongs to the approach through the tasks, that is, the teaching of mathematics through analysis, solving, and formulating of problems. From the 175 assignments given, the following groups of tasks can be distinguished: the use of Hasse diagrams in studying finite ordered sets; properties of linearly ordered spaces; representations of distributive lattices; interconnections of finite ordered sets, finite distributive lattices and finite topological spaces.

Keywords: task, mathematics training, binary relation, order structure, ordered set, lattice, distributivity, Boolean algebra.

References

1. *Aleksandrov P. S. Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to set theory and general topology]. M. Nauka. 1977. 368 p.

2. *Arhangel'skij A. V. Kantorovskaya teoriya mnozhestv* [Kantor set theory]. M. Moscow State University Publ. 1988. 112 p.

3. *Arhangel'skij A. V., Ponomarev V. I. Osnovy obshchej topologii v zadachah i uprazhneniyah* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. M. Nauka. 1974. 424 p.

4. *Beran L. Uporyadochennye mnozhestva* [Ordered sets]. M. Nauka. 1981. 64 p.

5. *Birkgof G. Teoriya reshetok* [Theory of gratings] / transl. from English. M. Nauka. 1984. 568 p.

6. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Linejno uporyadochennye mnozhestva* [Linearly ordered sets] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities of the Volga-Vyatka region. 2002, iss. 4, pp. 16–27.

7. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Zadachi v kurse «Uporyadochennye mnozhestva i reshetki» dlya magistrantov-matematikov* [Tasks in the course of "Ordered sets and lattices" for master students-mathematicians] // *Materialy II Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. «Zadachi v obuchenii matematike, fizike, informatike: teoriya, opyt, innovacii», posvyashchennoj 125-letiyu P. A. Laricheva* – Proceedings of II Intern. scientific – pract. conf. «Problems in teaching mathematics, physics, computer science: theory, experience, innovation», dedicated to the 125th anniversary of P. A. Larichev. Vologda. VoSU. 2017. Pp. 72–74.

8. *Vechtomov E. M. Annulyatornye harakterizacii bulevyh kolec i bulevyh reshetok* [Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1993, vol. 53, iss. 2, pp. 15–24.

9. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok: ucheb.-metod. razrabotka speckursa* [Theory of lattices: educational-method. development of a special course]. Kirov State Ped. In-t. 1995. 40 p.

10. *Vechtomov E. M. Distributivnye reshetki, funkcional'no predstavimye cepyami* [Distributive lattices functionally representable by chains]. // Fundamental and applied mathematics. 1996, vol.2, iss. 1, pp. 93–102.

11. *Vechtomov E. M. Pryamoj sposob vvedeniya otnosheniya poryadka v sisteme Peano* [Direct way of introducing the order relation in the Peano system] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes of the Volga-Vyatka region. 1998, iss. 1, pp. 6–14.

12. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca: posobie dlya studentov i aspirantov* [Introduction to semiring: a manual for students and postgraduates]. Kirov. VyatSU. 2000. 44 p.

13. *Vechtomov E. M. Uporyadochennye struktury v kurse matematiki* [Ordered structures in the course of mathematics] // *Matematika i obshchestvo. Matematicheskoe obrazovanie na rubezhe vekov» (Dubna) : sb. materialov Vseros. konf.* – Mathematics and society. Mathematical education at the turn of the century" (Dubna): materials of all-Russia conf. M. Moscow Center of Continuous Mathematical Education. 2000. Pp. 351–354.

14. *Vechtomov E. M. Uporyadochennye mnozhestva s diagrammoj Hasse* [The poset with the Hasse diagram] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2002, No. 6, pp. 13–15.

15. *Vechtomov E. M. Binarnye otnosheniya* [Binary relations] // *Matematika v obrazovanii* – Math education. 2007, iss. 3, pp. 41–51.

16. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [Study of sequence structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2010, No. 2 (1), pp. 111–120.

17. *Vechtomov E. M. Kurs «Uporyadochennye mnozhestva i reshetki» dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for undergraduates-mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. 2011, iss. 13, pp. 169–186.

18. *Vechtomov E. M. O binarnyh otnosheniyah dlya matematikov i informatikov* [Binary relations to mathematicians and computer science students] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2012, No. 1 (3), pp. 51–58.

19. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012, No. 10, pp. 15–34.

20. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : ucheb. posobie dlya akadem. bakalavriata* [Mathematics: basic mathematical structures: educational manual for academ. baccalaureate's]. 2nd publ. M. Yurayt. 2018. 296 p.

21. *Vechtomov E. M. Filosofiya matematiki : ucheb. posobie dlya bakalavriata i magistratury* [Philosophy of mathematics: educational manual for undergraduate and graduate]. 2nd publ. M. Yurayt. 2018. 317 p.

22. *Vechtomov E. M., Varankina V. I. Uporyadochennye mnozhestva s konechnym usloviem minimal'nosti* [Ordered sets with a finite minimality condition] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – Herald of Vyatka State Pedagogical University. 2000, No 3–4, pp. 11–12.

23. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., CHuprakov D. V. EHlementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 1* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol. Vol. 1]. Kirov, Russia. «Publ. "Raduga-PRESS LLC». 2016. 384 p.

24. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., CHuprakov D. V. EHlementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 2* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol. Vol. 2]. Kirov, Russia. «Publ. "Raduga-PRESS LLC». 2016. 316 p.

25. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., CHermnyh V. V. EHlementy teorii polukolec: monografiya* [Elements of the theory of semirings: monograph]. Kirov. Publishing house «Raduga-PRESS LLC». 2012. 228 p.

26. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication: monograph]. Kirov. Publishing house «Raduga-PRESS LLC». 2015. 144 p.

27. *Vechtomov E. M., CHermnyh V. V. Polukol'ca, blizkie k distributivnym reshetkam* [Semi-rings close to distributive lattices] // *Mezhdunarodnaya konferenciya «Polugruppy i ih prilozheniya, vklyuchaya polugruppovye kol'ca» : tez. dokl.* – International conference «Semigroups and their applications, including semigroup rings» : abstr. of reports. SPb. RSHU. 1995. Pp. 90–91.

28. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok* [General theory of lattices] / transl. from Eng. M. Mir. 1982. 456 p.

29. *Korobkov S. S. Vvedenie v teoriyu reshetok : ucheb. posobie po speckursu* [Introduction to the theory of lattices : educational manual for spec. course]. Yekaterinburg. Ural State Ped. University. 1996. 64 p.

30. *Kurosh A. G. Lekcii po obshchej algebre* [Lectures on general algebra]. 2nd publ. M. Nauka. 1973. 400 p.

31. *Obshchaya algebra* – General algebra. Vol. 1 / under the general editorship of L. A. Skornyakova. M. Nauka. 1990. 592 p.

32. *Obshchaya algebra* – General algebra. Vol. 2 / under the general editorship of L. A. Skornyakova. M. Nauka. 1991. 480 p.

33. *Ore O. Teoriya grafov* [Theory of graphs] / transl. from English. 2nd publ. M. Nauka. 1980. 336 p.

34. *Raseva E., Sikorskij R. Matematika metamatematiki* [Mathematics of metamathematics] / transl. from English. M. Nauka. 1972. 592 p.

35. *Salij V. N. Reshetki s edinstvennymi dopolneniyami* [Lattices with singular additions]. M. Nauka. 1984. 128 p.

36. *Sikorskij R. Bulevy algebry* [Boolean algebras] / transl. from English. M. Mir. 1969. 376 p.

37. *Skornyakov L. A. EHlementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. 2nd publ. M. Nauka, 1982. 160 p.

38. *Stenli R. Perechislitel'naya kombinatorika* [Enumerative combinatorics] / transl. from English. M. Mir. 1990. 440 p.

39. *SHrejder YU. A. Ravenstvo, skhodstvo, poryadok* [Equality, similarity, order]. M. Nauka. 1971. 256 p.

40. *Engelking R. Obshchaya topologiya* [General topology] / translated from English. M. Mir. 1986. 752 p.

УДК 512.556 doi: 10.25730/VSU.0536.18.21

Частичные кольца непрерывных [–1, 1]-значных функций

О. В. Кузнецова[1], Е. Н. Лубягина[2]
[1]магистрант, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
E-mail: olga83kuz@gmail.com
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г Киров.
ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена теории колец непрерывных функций на топологических пространствах. В качестве множества значений функций выбран числовой отрезок $E = [-1,1]$ с обычной операцией умножения ·, частичной (не всюду определенной) операцией сложения $+$ и со стандартной топологией. Частичные кольца $C(X,E)$ всех непрерывных *E*-значных функций на топологических пространствах по своим свойствам схожи с кольцами $C(X) = C(X,R)$ непрерывных действительнозначных функций на X.

В статье рассмотрены некоторые свойства частичных колец $C(X,E)$, показано, что максимальными идеалами частичного кольца $C(X,E)$ являются в точности идеалы M_x по всевозможным точкам x компакта X, выявлена двойственность категории частичных колец $C(X,[-1,1])$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1, и категории всех компактов X с их непрерывными отображениями.

Тематика, рассмотренная в статье, допускает дальнейшее исследование.

Ключевые слова: частичное полукольцо непрерывных функций, компакт, максимальный идеал, гомоморфизм.

Через $C(X,S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, со значениями в топологическом полукольце S с определенными поточечно операциями над функциями.

В качестве множества значений функций возьмем числовой отрезок $E = [-1,1]$ с обычной операцией умножения·, частичной (не всюду определенной) операцией сложения $+$ и со стандартной топологией. Получим частичные кольца $C(X,E)$, которые по своим свойствам схожи с кольцами $C(X) = C(X,R)$ непрерывных действительнозначных функций на топологических пространствах X. С классической теорией колец $C(X)$ можно познакомится в работах [1; 4]. О частичных кольцах говорится в [3].

Заметим, что в отличие от колец $C(X)$ обратимыми элементами в частичных кольцах $C(X,E)$ являются только константы ± 1.

Зададим в частичном кольце $C(X,E)$ отношение $\le$ и отношение $\vdots$:

$$f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \text{ для любых } x \in X;$$

$$f \vdots g \Leftrightarrow \text{найдется такая функция } h \in C(X,E)\text{, что } f=gh.$$

Предложение 1. *Пусть* X *– произвольное топологическое пространство, а* f,g *– любые функции из* $C(X,E)$*. Тогда* $|f| \le g^2$ *влечет* $f \vdots g$.

Доказательство. Действительно, пусть $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in Z(g); \\ f(x)/g(x), \text{ если } x \in coz\ g. \end{cases}$

Множество $coz\ g$ является открытым, и на нем функция h непрерывна. Возьмем $x_0 \in Z(g)$. Рассмотрим окрестность $U = \{x \in X : g(x) < \varepsilon\}$ точки x_0 для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$. Так как $|f| \le g^2$, то $h(x) = f(x)/g(x) \le g(x) < \varepsilon$ для любого $x \in U$. Значит, функция h непрерывна и в любой точке из $Z(g)$. Получили, что $h \in C(X,E)$ и $f = gh$.

© Кузнецова О. В., Лубягина Е. Н., 2018

Известно, что любому топологическому пространству Z соответствует компакт X (то есть компактное хаусдорфово пространство), такой, что полукольца $C(Z,S)$ и $C(X,S)$ канонически изоморфны. Действительно, построим фактор-множество $\tau Z = Z/\sim$ по следующему отношению эквивалентности $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ для любой функции } f \in C(Z,S).$$

На τZ зададим наименьшую топологию, относительно которой будут непрерывны все функции $\bar{f}:\tau Z \to S$, где $f \in C(Z,S)$ и $\bar{f}\left(\tilde{x}\right) = f(x)$ для всех $x \in Z$. Тогда $C(Z,E) \cong C(\tau Z,E)$.

Построенное пространство τZ тихоновское (то есть вполне регулярное хаусдорфово). Значит, для τZ существует стоун-чеховская компактификация $\beta\tau Z = X$, такая, что $C(X,E) \cong C(\tau Z,E) \cong C(Z,E)$.

Далее при изучении частичных колец $C(X,E)$ мы можем ограничиться компактами X.

По теореме Вейерштрасса непрерывные на компакте действительнозначные функции ограничены и принимают свои наибольшие и наименьшие значения. Тогда любой функции $f \in C(X,E)$, не обращающейся в 0 на X, можно сопоставить натуральные числа $n_f = \inf\left\{n_i \in \mathrm{N} : |f| \geq \frac{1}{n_i}\right\}$, такие, что

$$f^* = \frac{1}{n_f} f^{-1} \in C(X,E) \text{ и } f \cdot f^* = \frac{1}{n_f}.$$

Предложение 2. *Если идеал J частичного кольца $C(X,E)$ содержит функцию, не обращающуюся в* 0 *на X, то $J = C(X,E)$.*

Доказательство. Пусть $f \in J$ и $f \neq 0$ на X. Тогда $f\left(\frac{1}{n_f} f^{-1}\right) = \frac{1}{n_f} \in J$ и $\sum_{1}^{n_f} \frac{1}{n_f} = 1 \in J$.

Следовательно, $J = C(X,E)$.

Лемма 1. *Если идеал J частичного кольца $C(X,E)$ содержит функцию g, $g(x) \neq 0$ в некоторой точке x компакта X, то J содержит неотрицательную функцию $h, h(x) \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим $g(x) = a \neq 0$. Поскольку вместе с g в J лежит и функция $-g$, для которой $-g(x) = -a$, то можем считать, что $1 \geq a > 0$. Тогда $1 \geq g > 0$ на некоторой окрестности U точки x. Так как пространство X тихоновское, то существует функция $f \in C(X,[0,1])$, для которой $f(x) = 1$ и $f(X \setminus U) = 0$. Получаем: $fg(x) \neq 0$, $0 \leq fg(U) \leq 1$, $fg(X \setminus U) = 0$ и $fg \in J$.

Рассмотрим идеалы $M_x = \{f \in C(X,E) : f(x) = 0\}$ частичного полукольца $C(X,E)$, определяемые произвольными точками $x \in X$. Как в кольцах $C(X)$ и в полукольцах $C^+(X)$, так и в частичных кольцах $C(X,E)$ верно следующее утверждение:

Теорема 1. *Максимальными идеалами частичного кольца $C(X,E)$ являются в точности идеалы M_x по всевозможным точкам x компакта X.*

Доказательство. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим идеал M_x частичного кольца $C(X,E)$.

Пусть найдется такой идеал J в частичном кольце $C(X,E)$, что $M_x \subset J$. Покажем, что $J = C(X,E)$. Для функции $g \in J \setminus M_x$ обозначим $g(x) = a \neq 0$. По лемме 1 можем считать, что

$g \ge 0$ и $1 \ge a > 0$. Тогда $1 \ge g > 0$ на некоторой окрестности U точки x. Так как пространство X тихоновское, то существует функция $f \in C(X,[0,1])$, для которой $f(x)=0$ и $f(X\setminus U)=1$. Для функций $f_1 = \frac{1}{2}f$ и $g_1 = \frac{1}{2}g$ получаем: $f_1 \in M_x \subset J$, $g_1 \in J$, $0 \le f_1 \le \frac{1}{2}$, $0 \le g_1 \le \frac{1}{2}$, $f_1(X\setminus U) = \frac{1}{2}$, $0 < g_1(U) \le \frac{1}{2}$. Получаем $0<(f_1+g_1)(U)\le 1$, $\frac{1}{2} \le (f_1+g_1)(X\setminus U) \le 1$ и $f_1+g_1 \in J$. По предложению 2 $J = C(X,E)$.

Покажем, что любой собственный идеал J содержится в M_x для некоторой точки $x \in X$. Пусть это не так. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется функция $f_x \in J$, $f_x(x) > 0$. По лемме 1 можем считать функцию $f_x \in J$ неотрицательной. Получаем, что $f_x(x) > 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Из открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X выберем конечное подпокрытие U_{x_1}, U_{x_2}, …, U_{x_k}. Получаем, что $\frac{1}{k}\left(f_{x_1}+f_{x_2}+\ldots+f_{x_k}\right) = f \in J$, причем $f > 0$ на X. Значит, $J = C(X,E)$, противоречие. Значит, $J \subseteq M_x$.

Итак, M_x исчерпывают все максимальные идеалы частичного кольца $C(X,E)$.

Получаем, что единственным собственным идеалом частичного кольца $[-1,1]$ будет нулевой идеал.

Каждому идеалу J частичного кольца $C(X,E)$ соответствует *идеальная конгруэнция* $\rho(J)$:

$$f\rho(J)g \Leftrightarrow f-g \in J \text{ для любых } f,g \in C(X,E).$$

Обратно, любой конгруэнции ρ на $C(X,E)$ соответствует идеал

$$J(\rho) = \{f-g \in C(X,I) : f,g \in C(X,E), f\rho g\}.$$

Предложение 3. *В $C(X,E)$ все конгруэнции являются идеальными. Для любой конгруэнции σ имеем $\sigma = \rho(J(\sigma))$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную конгруэнцию σ на $C(X,E)$. Включение $\sigma \subseteq \rho(J(\sigma))$ очевидно. Покажем, что $\sigma \supseteq \rho(J(\sigma))$. Пусть для функций $f,g \in C(X,E)$ выполняется $f\rho(J(\sigma))g$. Тогда $f-g \in J(\sigma)$ и $f-g = h-q$, $h,q \in C(X,E)$, $h\sigma q$. Получаем, что $f+q = h+g$ и $\left(\frac{f+q}{3}+\frac{h}{3}\right)\sigma\left(\frac{h+g}{3}+\frac{q}{3}\right)$. Значит, $\frac{f}{3}+\frac{f}{3}+\frac{f}{3}\sigma\frac{g}{3}+\frac{g}{3}+\frac{g}{3} \Rightarrow f\sigma g$.

Для произвольного отображения $\varphi : Y \to X$ рассмотрим отображение α_φ: $C(X,E) \to C(Y,E)$, такое, что $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ – композиция отображений φ и f для любой функции $f \in C(X,E)$:

$$\alpha_\varphi(f)(y) = f(\varphi(y)) \text{ для любых } f \in C(X,E) \text{ и } y \in Y.$$

Предложение 4. *Любой гомоморфизм $\alpha : C(X,E) \to C(Y,E)$ частичных колец, сохраняющий* 1 ($\alpha(1)=1$), *имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$. Если α – изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть дан гомоморфизм $\alpha : C(X,E) \to C(Y,E)$, $\alpha(1)=1$. Для произвольной неотрицательной функции $f \in C(X,E)$ имеем $\alpha(f) = \alpha(\sqrt{f})\alpha(\sqrt{f}) \ge 0$. Обратно, если α – изоморфизм, то для произвольной неотрицательной функции $g \in C(Y,E)$, $g = \sqrt{g}\sqrt{g}$, найдется такая функция $h \in C(X,E)$, что $\alpha(h) = \sqrt{g}$ и $\alpha(h^2) = \alpha(h)\alpha(h) = g \ge 0$.

Рассмотрим гомоморфизм частичных полуколец $\alpha|_I : C(X,[0,1]) \to C(Y,[0,1])$, такой, что $\alpha|_I(f) = \alpha(f)$ для произвольной функции $f \in C(X,[0,1])$. Если α – изоморфизм, то и $\alpha|_I$ – изоморфизм. В [2, предложение 23] показано, что любой такой гомоморфизм α, $\alpha(1) = 1$, имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$. Если α – изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.

Получаем, что $\alpha|_I(f)(y) = f(\varphi(y))$ для любых $f \in C(X,[0,1])$, $y \in Y$. В частности, $\alpha(c)(y) = \alpha|_I(c)(y) = c$ для любой неотрицательной константы $c \in C(X,E)$. Тогда для любой функции $g \in C(X,E)$ получаем $\frac{1}{2}\alpha(g) + \frac{1}{2} = \alpha\left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(y) = \alpha|_I\left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(y) = \left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(\varphi(y)) = \frac{g(\varphi(y))}{2} + \frac{1}{2}$. Значит, $\alpha(g)(y) = g(\varphi(y))$ и $\alpha = \alpha_\varphi$.

Отображение $\pi_x : C(X,E) \to E$, такое, что $\pi_x(f) = f(x)$ для любой функции $f \in C(X,E)$, называется *вычислением в точке* $x \in X$. Получаем, что для $Y = \{y\}$, $\alpha : C(X,E) \to E$ является вычислением в точке $y \in X$.

Обозначим через K категорию всех компактов X и их непрерывных отображений φ, а через C – категорию всех частичных колец $C(X,E)$ и их гомоморфизмов α, сохраняющих единицу. Для любых непрерывных отображений $\psi : Z \to Y$ и $\varphi : Y \to X$ имеем, что $\alpha_{\varphi\circ\psi} = \alpha_\psi \circ \alpha_\varphi$. Поэтому соответствие F, такое, что $F(X) = C(X,E)$ и $F(\varphi) = \alpha_\varphi$ для любых компактов X и непрерывных отображений $\varphi : Y \to X$, является контравариантным функтором из категории K в категорию C. По предложению 3 функтор F устанавливает антиэквивалентность между категориями K и C; говорят также, что эти категории двойственны друг другу.

Теорема 2. *Категория частичных колец* $C(X,[-1,1])$ *и их гомоморфизмов, сохраняющих 1, двойственна категории всех компактов* X *и их непрерывных отображений*.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы : учеб. пособие. М. : МПГУ, 1992.
2. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Полукольца непрерывных [0,1] – значных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 4. С. 53–82.
3. Лубягина Е. Н. Частичные кольца непрерывных функций // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 3. С. 44–46.
4. *Jerison M., Gilman L.* Rings of Continuous Functions. Princeton : Van Nostrand, 1976.

Partial rings of continuous [–1, 1] – valued functions

O. V. Kuznetsova[1], E. N. Lubyagina[2]

[1]master student, Vyatka State University. Russia, Kirov.
E-mail: olga83kuz@gmail.com
[2]PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article is devoted to the theory of rings of continuous functions on topological spaces. As a set of function values, a numerical segment $E = [-1,1]$ with the usual multiplication operation, a partial (not everywhere defined) addition operation and a standard topology is chosen. Partial rings $C(X,E)$ of all continuous E-valued functions on topological spaces are similar in their properties to rings $C(X) = C(X,R)$ of continuous real valued functions on X.

In the article, we consider some properties of partial rings $C(X, E)$, it is shown that the maximal ideals of a partial ring $C(X, E)$ are exactly ideals M_x over all possible points x of the compact X, the duality of the category of partial rings $C(X, [-1,1])$ and their homomorphisms preserving 1, and the category of all compacts X with their continuous maps is revealed.

The subject considered in the article allows further research.

Keywords: partial semiring of continuous functions, compact, maximal ideal, homomorphism.

References

1. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah. Izbrannye temy : ucheb. posobie* [Rings of continuous functions on topological spaces. Selected topics: tutorial]. M. Moscow State Pedagogical University. 1992.

2. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Polukol'ca nepreryvnyh [0,1]- znachnyh funkcij* [Half-ring of the continuous [0,1]- valued functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2012, vol. 17, No. 4, pp. 53–82.

3. *Lubyagina E. N. CHastichnye kol'ca nepreryvnyh funkcij* [Partial rings of continuous functions] // *Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya* – Scientific-technical herald of the Volga region. 2015, No. 3, pp. 44–46.

4. *Jerison M., Gilman L.* Rings of Continuous Functions. Princeton: Van Nostrand, 1976.

УДК 372.851 doi: 10.25730/VSU.0536.18.22

К вопросу о возможности использования систем компьютерной математики в учебном процессе

Е. Н. Лубягина[1], Л. В. Тимшина[2], Е. С. Трефилова[3]

[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

[2]старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

[3]старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. В настоящее время растет интерес к использованию информационных технологий в учебном процессе, что предполагает овладение выпускниками педагогических вузов соответствующими компетенциями, одной из которых является представление учебной информации в различных видах и работа с ней.

В данной статье рассматривается возможность использования систем компьютерной математики GeoGebra, Maxima, Sage в решении задач по некоторым темам алгебры и геометрии в рамках подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Приведены некоторые примеры.

При таком подходе формируются общеучебные, междисциплинарные и надпредметные умения и навыки, связанные с применением знаний по математике и информатике. Считаем, что такое использование систем компьютерной математики способствует повышению мотивации к научно-исследовательской работе студентов.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, GeoGebra, Maxima, Sage, геометрические преобразования.

Системы компьютерной математики позволяют создавать качественные иллюстрации (в том числе динамические), оперативно выполнять преобразования математических объектов (например, чертежей), автоматически реализовывать трудоемкие алгоритмы, экспериментировать с данными задачи с целью поиска их решения. Продемонстрируем возможность использования систем компьютерной математики в рамках подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

Компьютерные программы в учебном процессе могут применяться при разработке демонстрационных материалов, при выполнении студентами задач, вынесенных на самостоятельное решение, в научно-исследовательской работе студентов, при организации спецкурсов математических дисциплин. С опытом организации спецкурса по геометрии с использованием информационных технологий можно ознакомиться в [4].

Считаем, что такое использование систем компьютерной математики способствует повышению мотивации к учебе, а также к научно-исследовательской работе студентов.

Отметим, что проблема, рассмотренная с разных сторон, может обрести дополнительный смысл. Порой решение задачи интуитивно понятно, а осознается именно с помощью картинки (графического образа) – ее модели. Поэтому использование зрительных образов преобразований объектов способствует формированию общеучебных, междисциплинарных и надпредметных умений и навыков.

В качестве первого примера рассмотрим задачу (из [2]), в которой параметр можно понимать как некий фактор, изменяющий данный объект. Для иллюстрации решения задач с параметрами хорошо подходит система динамических чертежей GeoGebra.

Задача 1. *Найти все значения параметра, при которых следующее уравнение будет иметь ровно одно решение:*

$$1 - p = \sqrt{4 - p^2 - 2px - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2}.$$

Для решения данной задачи преобразуем уравнение.

© Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В., Трефилова Е. С., 2018

$$1-p=\sqrt{4-p^2-2px-x^2}-\sqrt{3-2x-x^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{4-(1+x)^2}+1=\sqrt{4-(p+x)^2}+p.$$

Заметим, что левой части полученного уравнения соответствует верхняя полуокружность радиуса 2 с центром в точке (–1, 1). Правая часть уравнения задает окружности того же радиуса, но с переменным центром – он движется по прямой $y=-x$. Значит, $p\in[-1,1)\cup(1,3]$.

На полотне GeoGebra достаточно построить график функции $f(x)=\sqrt{4-(1+x)^2}+1$ (рис. 1), задать с помощью ползунка параметр p со значениями от –3 до 5 и указать функцию $g(x)=\sqrt{4-(p+x)^2}+p$. Меняя значения параметра, мы зададим движение графика второй функции и получим динамическую иллюстрацию. Для создания статической картинки процесса можно воспользоваться возможностью объектов в GeoGebra оставлять след.

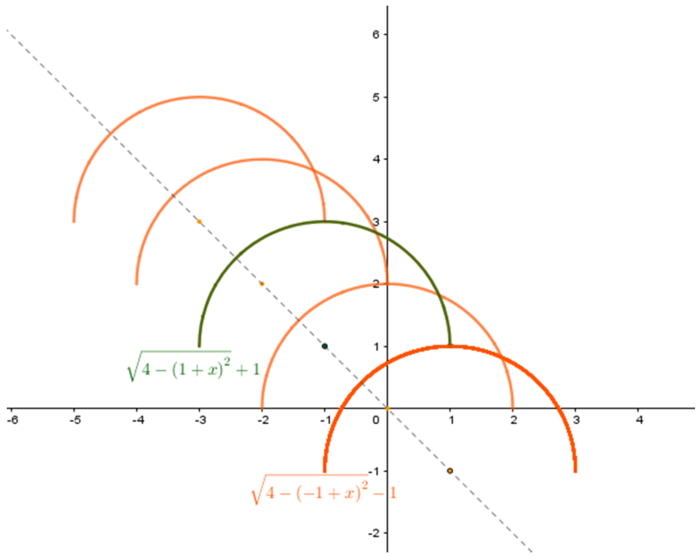


Рис. 1

Следующий пример иллюстрирует применение инверсии к решению геометрической задачи. Примечательно, что данное преобразование позволяет переводить окружности в прямые, и наоборот. Это свойство инверсии позволяет строить примеры конфигураций, различных внешне, но одинаковых по сути. Реализация преобразования инверсии в системе GeoGebra осуществляется в один клик – достаточно с помощью инструмента «Отражение относительно окружности» выделить отражаемую конфигурацию и указать окружность инверсии.

Задача 2. *Даны четыре окружности, каждая из которых касается двух других* (*рис.* 2). *Доказать, что точки их касания расположены на одной окружности.*

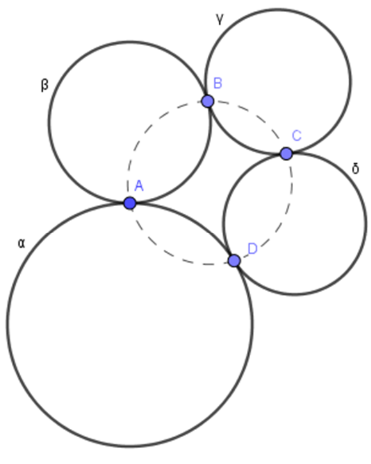


Рис. 2

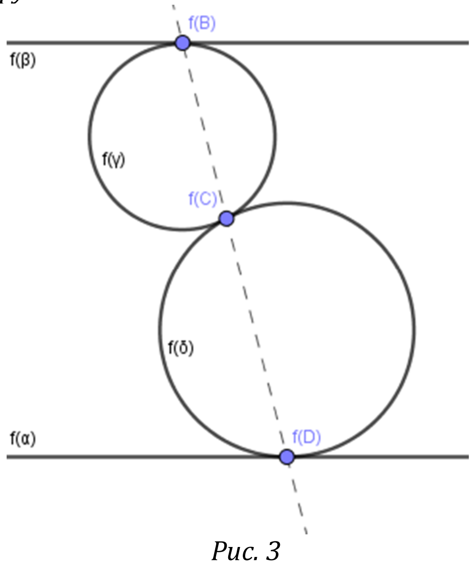


Рис. 3

При инверсии данной в задаче конфигурации относительно окружности с центром в одной из точек касания A две окружности, касающиеся в этой точке, перейдут в пару параллельных прямых, а две другие перейдут в окружности, касающиеся друг с другом и с полученными прямыми, как показано на рис. 3. Для решения будет достаточно доказать, что точки $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ лежат на одной прямой. Это можно сделать, проведя, например, общую касательную окружностей $f(\gamma)$, $f(\delta)$, и рассмотреть получившиеся при этом углы (рис. 4).

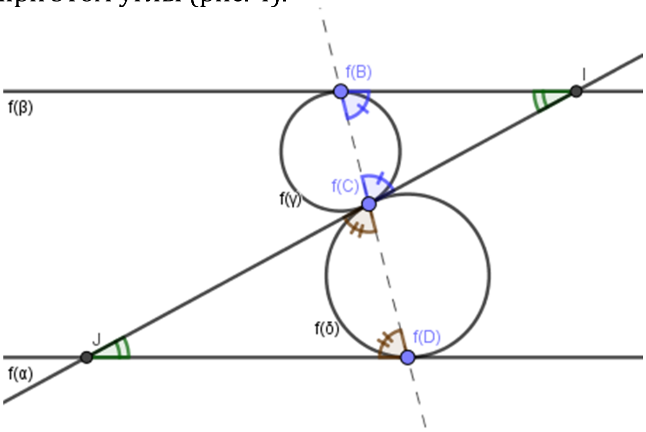


Рис. 4

Отдельный интерес представляет визуализация отображений на комплексной плоскости. Решению этой задачи в системе GeoGebra посвящена глава пособия [3]. Вопрос об иллюстрации отображений комплексной плоскости в системах Maple и Mathcad затрагивается также и в пособии [5].

Задача 3. *Изобразить на комплексной плоскости образ множества точек* $|z|=1$, z∈C, *при отображении* $f(z)=z^2+z+1$.

Для построения чертежа к данной задаче в GeoGebra достаточно задать окружность $|z|=1$ радиуса 1 с центром в начале координат, ввести на ней точку A и ее образ A'((x(A)^2 – y(A)^2 + x(A) + 1, 2y(A) x(A) + y(A))) при отображении f. Получится кривая, похожая на улитку Паскаля.

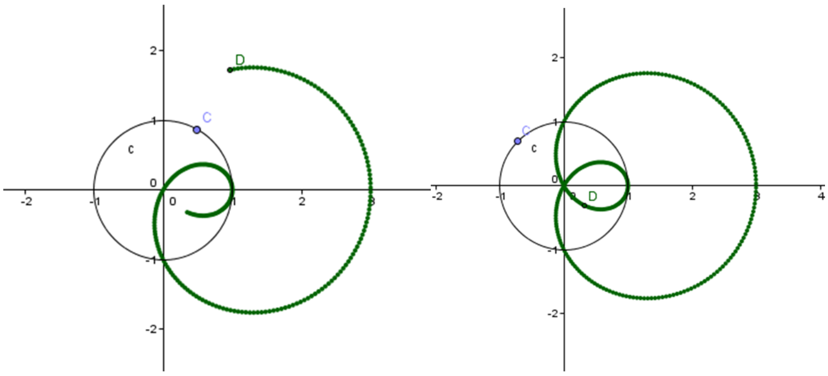


Рис. 5

Среда GeoGebra позволяет выдвинуть гипотезу о виде полученной кривой. Студентам предлагается аналитически доказать, что это не улитка Паскаля.

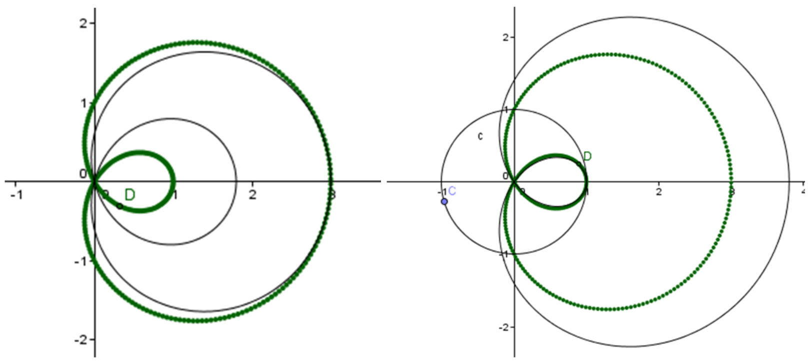


Рис. 6

Эффектной иллюстрацией применения комплексных чисел являются фракталы. Для построения изображений, требующих выполнения трудоемких вычислений, целесообразно использовать системы компьютерной алгебры. Для быстрого построения фрактальных множеств в системе компьютерной алгебры Maxima имеются такие пакеты, как fractals и dynamics.

Так, например, чтобы получить изображение множества Жюлиа с параметром ${}^1/_2 + {}^1/_2\, i$ (см. рис. 2), достаточно ввести в Maxima следующий код:

```
load(dynamics)$
julia(0.5,0.5, [iterations, 77], [x,–1.5, 1.5], [y, –1.5, 1.5], [grid, 500, 500], [color_bar_tics, 0, 6, 36]);
```

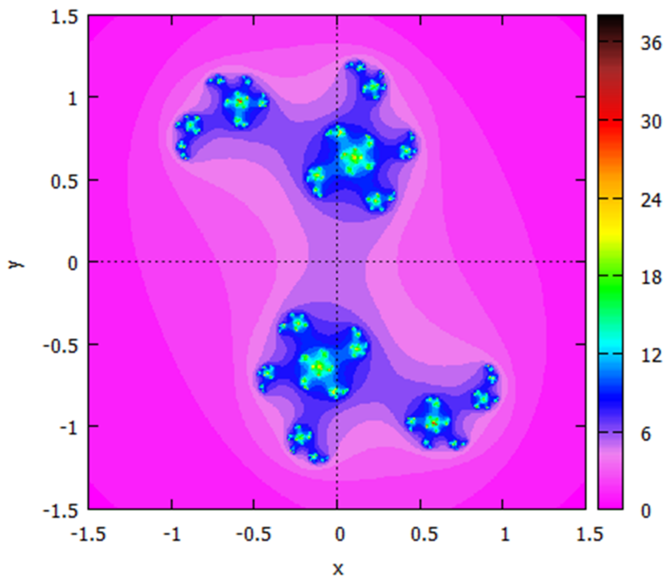


Рис. 7

Подробнее о моделировании фракталов в системе Maxima можно узнать в [1].

Важную роль преобразования играют в алгебраической геометрии. Когда мы работаем с группами геометрических преобразований, мы этим иллюстрируем общее понятие группы. Для алгебраического анализа групп преобразований можно эффективно использовать такие системы компьютерной алгебры, как GAP и Sage.

Например, для того чтобы убедиться, что диэдральная группа симметрий квадрата имеет порядок 8, является подгруппой группы перестановок четвертой степени, нециклической, некоммутативной и ненормальной, в Sage достаточно ввести следующие команды:

```
D4=DihedralGroup(4); D4;
D4.order();
spD4=D4.list(); spD4;
S4=SymmetricGroup(4);
D4.is_subgroup(S4);
D4.is_cyclic();
D4.is_abelian();
D4.is_normal(S4);
```

```
Dihedral group of order 8 as a permutation group
8
[(), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,2,3,4), (2,4), (1,3), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)]
True
False
False
False
```

В заключение отметим, что использование систем компьютерной математики при создании иллюстраций, для поиска решения и выполнения трудоемких вычислений на отдельных этапах решения задачи способствует повышению эффективности обучения, обеспечивает развитие профессионально значимых качеств личности. При этом занятие проходит динамично, вызывает у студентов интерес и стремление к умственной деятельности, способствует более прочному закреплению знаний.

Список литературы

1. *Букушева А. В.* Дифференциальная геометрия в Maxima : учеб. пособие. Саратов, 2015. 50 с.
2. *Крачковский С. М.* Дивергентные задачи по математике и их визуальные образы : учеб.-метод. пособие. М. : Прометей, 2016. 166 с.
3. *Ларин С. В.* Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики : учеб. пособие. Ростов н/Д : Легион, 2015. 192 с.
4. *Матвеев С. Н., Антропова Г. Р.* Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров) // Мир науки : интернет-журнал. 2017. Т. 5. № 2. URL: http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf
5. *Титов К. В.* Компьютерная математика : учеб. пособие. М. : РИОР : ИНФРА-М, 2016. 261 с.
6. *Трошин П. И.* Моделирование фракталов в среде Maxima. Ч. I. Казань : Казан. федер. ун-т, 2012.
7. *Яцкин Н. И.* Алгебраические вычисления в системе Sage. Иваново, 2014.

On the possibility of using systems of computer mathematics in the educational process

E. N. Lubyagina[1], L. V. Timshina[2], E. S. Trefilova[3]

[1]PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

[2] senior lecturer of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259.E-mail: larisatimshina@rambler.ru

[3] senior lecturer of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137.E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. Currently, there is a growing interest in the use of information technology in the educational process. This implies mastering graduates of pedagogical universities with relevant competencies, including the presentation of educational information in various forms and working with it.

In this article, we consider the possibility of using computer mathematics systems GeoGebra, Maxima, Sage in solving problems in some topics of algebra and geometry as part of the preparation of bachelors in the direction of 44.03.05 Pedagogical education (with two training profiles). The article gives some examples.

It helps to develop general educational, interdisciplinary and above-subject skills associated with the use of knowledge in mathematics and computer science. We believe that such use of computer math systems contributes to increasing the motivation for students' research work.

Keywords: Computer math systems, GeoGebra, Maxima, Sage, geometric transformations.

References

1. *Bukusheva A. V. Differencial'naya geometriya v Maxima : ucheb. posobie* [Differential geometry in Maxima: tutorial]. Saratov. 2015. 50 p.
2. *Krachkovskij S. M. Divergentnye zadachi po matematike i ih vizual'nye obrazy: ucheb.-metod. posobie* [Divergent problems in mathematics and their visual images: educational and methodical manual]. M. Prometheus. 2016. 166 p.
3. *Larin S. V. Komp'yuternaya animaciya v srede GeoGebra na urokah matematiki: ucheb. posobie* [Computer animation in the environment of GeoGebra in mathematics lessons: educational manual]. Rostov-on-Don. Legion. 2015. 192 p.
4. *Matveev S. N., Antropova G. R. Organizaciya speckursa po geometrii sredstvami informacionnyh tekhnologij (v podgotovke bakalavrov)* [Organization of a special course on geometry by means of information technologies (in preparation of bachelors)] // *Mir nauki : internet-zhurnal* – World of science: Internet magazine. 2017, vol. 5, No. 2. Available at: http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf
5. *Titov K. V. Komp'yuternaya matematika : ucheb. posobie* [Computer mathematics: educational manual]. M. RIOR: INFRA-M. 2016. 261 p.
6. *Troshin P. I. Modelirovanie fraktalov v srede Maxima* [Simulation of fractals in the environment of Maxima. Part I]. Kazan. Kazan. Feder. University. 2012.
7. *YAckin N. I. Algebraicheskie vychisleniya v sisteme Sage* [Algebraic calculations in the Sage system]. Ivanovo. 2014.

УДК 372.851 doi: 10.25730/VSU.0536.18.23

Организация самостоятельной работы студентов-педагогов при изучении учебной дисциплины «Элементарная геометрия»

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Статья имеет практический характер. Обсуждается опыт организации самостоятельной работы будущих педагогов при повторении материала школьного предмета «Геометрия». Целью повторения материала школьной планиметрии является как воспроизведение изученного материала для его дальнейшего использования, так и его новая организация в форме опорных задач. Содержание повторения составляют основные планиметрические теоремы, свойства некоторых понятий, известные приемы решения задач. Основной метод повторения ранее изученного – самостоятельное решение предложенных математических задач и обсуждение результатов решения в малых группах. Представлены примеры учебных заданий для самостоятельной познавательной деятельности студентов.

Ключевые слова: самостоятельная работа студентов, элементарная геометрия, опорная задача.

Концепция модернизации российского образования требует усиления роли деятельностного подхода к обучению и оптимального использования его возможностей в практике вузовского обучения. Поэтому актуальными являются вопросы совершенствования самостоятельной учебной деятельности студентов.

Самостоятельная работа имеет решающее значение при организации различных видов повторения. В рамках изучения учебной дисциплины «Элементарная геометрия», которая играет важную роль в формировании профессионально-предметных знаний будущих педагогов и напрямую связана со школьным предметом «Геометрия», целесообразна организация повторения материала школьной планиметрии.

За основу примем методическую систему обогащающего повторения [1], для которого характерно не только повторение с последующим применением изученного, но и интеллектуальное развитие, обогащение памяти, расширение кругозора учащихся.

Для этого вся учебная группа делится на несколько рабочих групп. Каждой группе выдается определенный набор задач, в который включается опорная задача и задачи, элементом решения которых является опорная задача. Кроме того, группе предлагается контрольная задача. После обсуждения группа должна представить для всех студентов вместе с опорной задачей решение контрольной задачи. Контроль результатов повторения осуществляется в форме самоконтроля, взаимоконтроля участников одной рабочей группы и внешнего контроля преподавателем.

Таким образом, в основе повторения теоретического и практического материала по геометрии лежат опорные задачи. Данный подход имеет для студентов определенную новизну в актуализации математических знаний, эти задачи являются своеобразными ориентирами для решения других задач, у студентов накапливается определенный набор опорных задач, на основе которых можно выстраивать серии взаимосвязанных задач, тем самым создавая определенный методический багаж для будущей педагогической деятельности.

В статье приведены такие опорные задачи, содержание которых составляют следующие геометрические факты и приемы решения: равенство отрезков касательных, проведенных к окружности, описанный четырехугольник; взаимное расположение окружностей; свойства выпуклого четырехугольника; медианы и площадь, метод площадей; переход к другой фигуре.

Подбор задач осуществлялся исходя из трех уровней усвоения материала: первый состоит в осознании информации, ее обосновании и запоминании; второй представляет усвоение способов применения знаний по образцу, включая легко опознаваемые вариации этого образца, применение знаний в знакомой ситуации; третий заключается в готовности обучающегося творчески применить усвоенную информацию в новой ситуации [3].

Приведем примеры серий таких задач.

В задачах 1–5 основным фактом является равенство отрезков касательных. Для некоторых задач приведено решение.

© *Тимшина Л. В., 2018*

Задача 1. *К окружности проведены две касательные, проходящие через точку, лежащую вне окружности (рис. 1). Доказать, что AB = AC и угол BAO равен углу CAO (AO – биссектриса угла), где B и C точки касания, а O – центр окружности.*

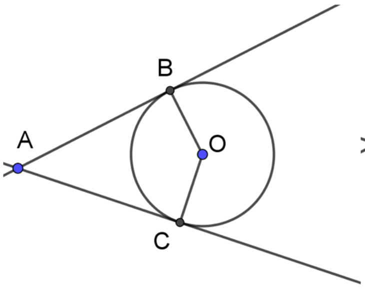


Рис. 1

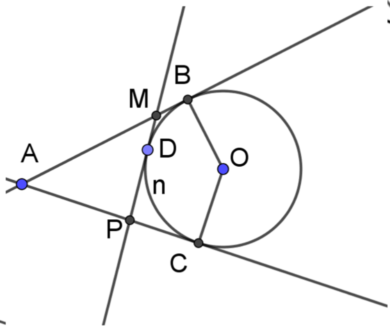


Рис. 2

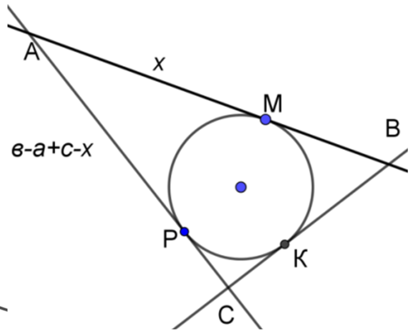


Рис. 3

Задача 2. *Добавим к окружности третью касательную (рис. 2), пересекающую касательные AB и CA в точках M и P и проходящую через точку D, принадлежащую дуге BnC окружности. Доказать, что периметр треугольника MAP и величина угла MOP не зависят от выбора точки D.*

Задача 3. *В треугольник ABC со сторонами a, в, c вписана окружность (рис. 3). Выразить расстояние от вершины A треугольника до точек M и P касания сторон, выходящих из этой вершины, с окружностью.*

Решение. Пусть длина отрезка *AM* равна *x*. Выражая последовательно отрезки *MB, BK, KC, CP* и *PA* через стороны треугольника и длину *x* отрезка *AM,* получим, что $AP = в - a + c - x$. Поскольку *AM* = *AP*, то приравнивая полученные выражения для длин отрезков *AM* и *AP,* выразим $x = \dfrac{в + c - a}{2}$. Аналогичные выражения можно получить для длин других отрезков.

Естественным продолжением рассмотренных задач являются задачи, связанные со свойствами описанного четырехугольника, однако при ограниченном времени эти задачи можно исключить из данной серии задач.

Задача 4. *Если четырехугольник ABCD описан около окружности, то равны суммы длин его противоположных сторон, а центром окружности является точка пересечения биссектрис его углов. Доказать.*

Задача 5. *Около круга описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 80, а острый угол 30º. Найти площадь трапеции и доказать, что боковые стороны трапеции видны из центра вписанной окружности под прямым углом.*

Контрольная задача. *В треугольнике ABC AB=9, BC=5, AC=8. Точка D лежит на стороне BC так, что* $BD : DC = 3 : 7$. *Окружности, вписанные в каждый из треугольников ACD и ABD, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.*

Для следующей серии задач 6–7 опорной является геометрическая конфигурация задачи 6 и свойства этой конфигурации.

Задача 6. *Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом в точке A (рис. 4). BC – их общая касательная. Доказать, что угол BAC прямой и* $BC = 2\sqrt{Rr}$.

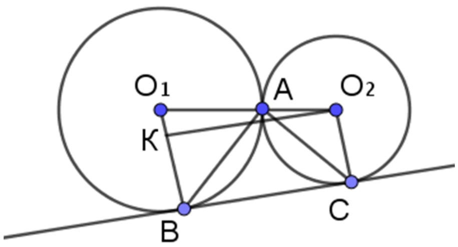


Рис. 4

Решение. Данная конфигурация имеет много полезных с точки зрения решения задач свойств. Отметим, прежде всего, что точки O_1, *A* и O_2 лежат на одной прямой. Радиусы O_1B и O_2C параллельны, т. к. перпендикулярны общей касательной *BC*. Докажем, что угол *BAC* прямой. Пусть $\angle BO_1A = \alpha$, тогда $\angle AO_2C = 180° - \alpha$. По свойству равнобедренных треугольников AO_1B и AO_2C

$\angle O_1AB = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle O_2AC = \dfrac{\alpha}{2}$, а сумма углов равна $90°$. Эта сумма вместе с $\angle BAC$ составляет развернутый угол, следовательно $\angle BAC = 90°$. Для вычисления *BC* выполним дополнительное построение. Через центр O_2 окружности с меньшим радиусом r проведем $O_2K \parallel BC$. Получим прямоугольный треугольник O_1O_2K, в котором $O_1O_2 = R + r, O_1K = R - r, KO_2 = BC$. По теореме Пифагора выразим KO_2. Получим $KO_2 = 2\sqrt{Rr}$, и значит $BC = 2\sqrt{Rr}$.

Задача 7. *Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.*

Замечание. В задаче 7 кроме внешней общей касательной существует общая внутренняя касательная.

Контрольная задача. *Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C. Докажите, что прямые AD и BC параллельны. Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 25.*

Для задач 8–9 опорной является задача 8.

Задача 8. *Пусть M, N, P и Q – середины сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рис. 5). Тогда MNPQ параллелограмм и площадь четырехугольника ABCD равна удвоенной площади параллелограмма MNPQ.*

Решение. *MN* – средняя линия треугольника *ABC*. Значит $MN = \dfrac{1}{2}AC$ и $MN \parallel AC$. Аналогично $PQ = \dfrac{1}{2}AC$ и $PQ \parallel AC$. Получили $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$. Следовательно, *MNPQ* – параллелограмм. Стороны *MQ* и *NP* параллелограмма параллельны диагонали *BD*. В силу параллельности получаем равенство углов *QMN* и *DOC*, где *O* – точка пересечения диагоналей данного четырехугольника. Используя связь между сторонами параллелограмма и диагоналями данного четырехугольника, несложно установить связь между площадями данных фигур. Вспомните соответствующие формулы.

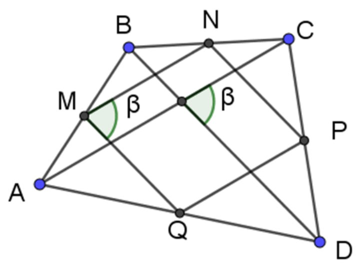


Рис. 5

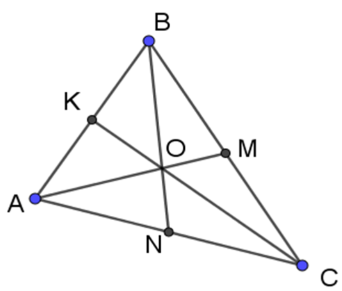


Рис. 6

Задача 9. *При каких свойствах диагоналей данного выпуклого четырехугольника ABCD параллелограмм MNPQ будет ромбом, прямоугольником, квадратом (рис. 5)?*

Контрольная задача. *В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.*

Дополним рассмотренные серии задач тремя опорными задачами (задачи 10–12), каждая из них позволяет в дальнейшем в нестандартных ситуациях видеть уже известные нам конструкции.

Задача 10 (медианы и площадь). *Исследовать, как площади треугольников, на которые медианы разбивают данный треугольник, связаны с площадью данного треугольника.*

Решение. В задаче необходимо исследовать площади треугольников трех типов. Если *AM, BN* и *CK* медианы треугольника *ABC* (рис. 6), то а) равны площади треугольников *ABN* и *CBN* (общая высота, проведенная из вершины *B*, и равные основания). Аналогично б) равны площади треугольников *AON* и *CON*. Кроме того, в) $S_{ABO} = S_{ABN} - S_{AON} = S_{CBN} - S_{CON} = S_{COB}$. Итак, каждая медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, все медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников и $S_{ABO} = S_{BCO} = S_{CAO} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

Задача 11 (переход к другой фигуре**)**. *Медианы треугольника равны 3, 4 и 5. Найти площадь треугольника.*

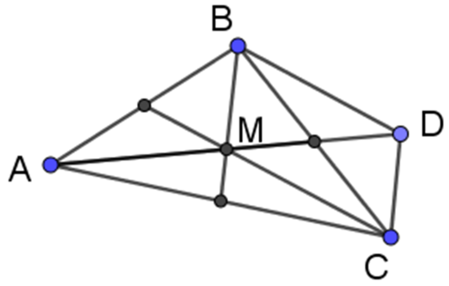


Рис. 7

Решение. Пусть *M* – точка пересечения медиан данного треугольника (рис. 7). $S_{ABC} = 3S_{BMC}$ (задача 10). Для нахождения площади треугольника *BMC* достроим его до параллелограмма *BMCD*. Продолжение медианы *AM* содержит диагональ *MD* параллелограмма. $S_{BMC} = S_{BMD}$, т. к. каждая из указанных площадей равна половине площади параллелограмма *BMCD*. Площадь треугольника *BMD* вычисляем по формуле Герона, т. к. известны его стороны как части соответствующих медиан. Тогда $S_{ABC} = 3S_{BMC} = 3S_{BMD} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$.

Задача 12 (метод площадей). *Площадь треугольника ABC равна 16. AM и BP – медианы,* $AM = 6, BP = 4$. *Доказать, что угол AOB прямой, где O точка пересечения медиан.*

В целом такая форма организации самостоятельной работы способствует повышению ее эффективности, обеспечивает развитие профессионально значимых качеств личности. При этом занятие проходит динамично, вызывает интерес и желание у студентов к умственной деятельности, способствуют более прочному закреплению знаний.

Список литературы

1. *Зильберберг Н. И.* Урок математики: Подготовка и проведение : кн. для учителя. М. : Просвещение : АО «Учеб. лит.», 1995. 178 с.

2. *Малых А. Е.* Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники : учеб. пособие. Пермь : Перм. гос. пед. ун-т, 2010. 100 с.

3. *Саранцев Г. И.* Общая методика преподавания математики : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. Саранск : Тип. «Красный Окт.», 1999. 208 с.

4. *Шебанова Л. П.* Повышение качества подготовки учителя математики в педвузе на основе системы обогащающего повторения элементарной математики и методики обучения математике : автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск : ОмГПУ, 2004. 22 с.

Organization of independent work of students-teachers during the study of the discipline «Elementary geometry»

L. V. Timshina
senior lecturer, Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article is of practical nature. The experience of the organization of independent work of future teachers in the repetition of the material of the school subject "Geometry" is discussed. The purpose of repetition of the school planimetry material is both reproduction of the studied material for its further use and its new organization in the form of supporting tasks. The content of the repetition are the key planimetric theorem, properties of some notions, well-known techniques for solving problems. The main method of repetition of the previously studied is an independent solution of the proposed mathematical problems and discussion of the results of the solution in small groups. Examples of educational tasks for independent cognitive activity of students are presented.

Keywords: independent work of students, elementary geometry, basic problem.

References

1. *Zilberberg N. I. Urok matematiki: Podgotovka i provedenie: kn. dlya uchitelya* [Math lesson: Preparing and carrying out: the book for a teacher]. M. Prosveshchenie: JSC «Ucheb. lit.». 1995. 178 p.

2. *Malyh A. E. Opornye planimetricheskie zadachi. Treugol'niki i mnogougol'niki: ucheb. posobie* [Suport planimetric problems. Triangles and polygons: educational manual]. Perm. Perm State Ped. University. 2010. 100 p.

3. *Sarancev G. I. Obshchaya metodika prepodavaniya matematiki : ucheb. posobie dlya studentov mat. spec. ped. vuzov i un-tov* [General methods of teaching mathematics: educational manual for students of the math. spec. of ped. high schools and universities]. Saransk. Printing house «Krasny Oct.». 1999. 208 p.

4. *SHebanova L. P. Povyshenie kachestva podgotovki uchitelya matematiki v pedvuze na osnove sistemy obogashchayushchego povtoreniya ehlementarnoj matematiki i metodiki obucheniya matematike :avtoref. dis. … kand. ped. nauk* [Improving the quality of training teachers of mathematics in the pedagogical university on the basis of the system of enriching repetition of elementary mathematics and methods of teaching mathematics: abstr. dis. ... PhD. ped. sciences]. Omsk. OmSPU. 2004. 22 p.

УДК 378.016 doi: 10.25730/VSU.0536.18.24

Изучение темы «Интегральное исчисление» в курсе высшей математики

Е. С. Трефилова
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена одному из разделов математического анализа – интегральному исчислению функции одной и нескольких переменных. В статье проанализированы два подхода к введению понятия определенного интеграла. Приведены некоторые достоинства и недостатки каждого способа введения. Предложен один из возможных способов обобщения определенного интеграла до криволинейных и поверхностных интегралов, а также кратных интегралов. Показана связь криволинейных, поверхностных и кратных интегралов с определенным интегралом, а также физический и механический смыслы различных видов интеграла. Приведено несколько примеров вычисления различных видов интегралов. В статье также названы основные ошибки и затруднения, возникающие при вычислении интегралов у студентов, и предложены некоторые способы их предотвращения.

Ключевые слова: определенный интеграл, формула Ньютона – Лейбница, криволинейные и кратные интегралы.

Тема интегральное исчисление функции включает в себя несколько разделов: первообразная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и различные их приложения. В полном объеме данная тема изучается на инженерных направлениях, для гуманитарных направлений – до кратных интегралов.

До введения определенного интеграла в изложении теории первообразной и неопределенного интеграла в учебниках и учебных пособиях по математике для вузов различия отсутствуют.

Однако понятие определенного интеграла и соответственно теоремы Ньютона – Лейбница можно ввести по-разному. Существует два подхода к введению понятия: один из них основан на понятии интегральной суммы и принят в большинстве учебников [1; 2; 4], второй – на формуле Ньютона – Лейбница [3]. Приведем эти определения и теоремы.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на [*a; b*] называется $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка [*a; b*] и выбора точек τ_k [1].

Теорема Ньютона-Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте [*a; b*] и $F(x)$ – первообразная функции на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на [*a; b*] называется соответствующее приращение ее первообразной, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ [3].

Производная площади переменной криволинейной трапеции для любого значения аргумента *X=x* равна ее концевой ординате $y = f(x)$

Определение, приведенное авторами учебника [3], позволяет сразу вычислять определенный интеграл, используя его связь с неопределенным интегралом. Кроме этого из понятия приращения, изучаемого в разделе дифференциального исчисления, становится ясно, что это число, а не функция. Поэтому в таком подходе обучающиеся меньше видят сложностей при нахождении интеграла. Но при этом возникает ряд сложностей: какую из первообразных взять, как понять, в чем заключаются геометрический и механический смыслы интеграла… Поэтому авторам учебника приходится доказывать ряд теорем, например теорему о независимости определенного интеграла от выбора первообразной функции.

Если изучение интегрального исчисления заканчивается изучением определенного интеграла, то предложенный Б. П. Демидовичем, В. А. Кудрявцевым подход можно использовать, например,

© Трефилова Е. С., 2018

в курсе математики для некоторых гуманитарных направлений – психологии, социологии и некоторых других.

Для направлений, особенно инженерных, где интегралы вычисляют не только в курсе математики, но и в других дисциплинах, например физике, такой подход лучше не применять, поскольку при введении других видов интегралов приходится вводить интегральные суммы.

Напомним, как вводится понятие определенного интеграла непрерывной функции $y = f(x)$ на основе интегральных сумм.

В задачах на нахождение работы переменной силы или о площади криволинейной трапеции промежуток, на котором определена функция, сначала делится на несколько частей, затем на каждом таком отрезке выбирается точка, в которой вычисляется значение функции, и составляется сумма произведений функции на величину частичного сегмента. Используя предельный переход при стремлении самого большого частичного сегмента к нулю, получаем определенный интеграл. Достоинства такого подхода в его универсальности для любых промежутков и областей.

Обычно при изучении других видов интегралов связь с определенным интегралом появляется позже, при их вычислении. Можно показать ее раньше, например, следующим образом.

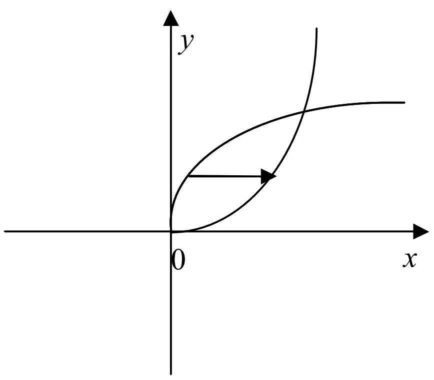
Представим, что теперь интеграл ищем не на отрезке, а в некой области плоскости или пространства либо на некой кривой – получаем переход к кратным и криволинейным интегралам. При этом введение понятия происходит аналогично введению понятия определенного интеграла, только делится на сегменты не отрезок, а область или кривая. При этом свойства аналогичны свойствам определенного интеграла, и они также имеют свой геометрический и физический смысл.

Если мы в качестве области интегрирования рассмотрим некую плоскую область и составим для нее по тому же алгоритму, что и в определенном интеграле, двумерную интегральную сумму, то получим двойной интеграл, который находится путем сведения его к повторному интегралу, т. е. двум определенным интегралам.

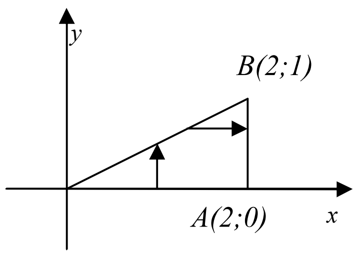
Самая большая сложность возникает у студентов как раз в сведении двойного интеграла к повторному интегралу, поэтому рекомендуем при изучении двойных интегралов выполнять задания типа:

Пример 1. Поменять порядок интегрирования в интеграле $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x;y)dy$.

Решение. 1) Построим область. Для этого определим уравнения линий, которые ее задают.



Так как переменная *x* изменяется пределах от 0 до 1, а переменная *y* изменяется от x^2 до $\sqrt{x}$, то линии, ограничивающие область, задаются уравнениями $x=1$ и $x=0$, $y=\sqrt{x}$; $y=x^2$; 2) Выразим переменную *x* через *y*: $x=y^2$ и $x=\sqrt{y}$; 3) Найдем пределы изменения переменной *y*, для этого спроектируем фигуру на ось *Oy*. Получаем пределы изменения *y* – от 0 до 1; 4) Используя рисунок, найдем, как изменяется переменная *x*. Для этого выберем на оси *Oy* в пределах изменения переменной точку и проведем прямую, перпендикулярную оси *Oy*, – получаем точки «входа» и «выхода». 5) Запишем повторный интеграл с новыми пределами $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$.



Пример 2. Сведите интеграл к повторному (расставьте пределы интегрирования) $\iint_S f(x;y)dxdy$, если область *S* – это треугольник с вершинами *O*(0: 0); *A*(2; 0) и *B*(2; 1).

Решение. 1) Построим область по заданным точкам. 2) Найдем уравнения линий, ограничивающие область: $y=0$; $x=1$; $y=0{,}5x$ или $x=2y$. 3) Запишем повторный интеграл двумя способами: $\iint_S f(x;y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{2y}^{2} f(x;y)dx$; $\iint_S f(x;y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{0{,}5x} f(x;y)dy$.

Пример 3. Вычислить интегралы: а) $\iint\limits_S x\sqrt{y}dxdy$, если *S* – это квадрат: $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$; б) $\iint\limits_S x^2 ydxdy$, если *S* – это треугольник с вершинами *O*(0: 0); *A*(2; 0) и *B*(2; 1).

Решение. а) Сведем интеграл к повторному интегралу, т. к. область прямоугольная, то ее можно не строить и сразу расставить пределы интегрирования. Имеем $\iint\limits_S x\sqrt{y}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x\sqrt{y}dy =$ $\int\limits_0^1 x\left(\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)\Bigg|_0^1 dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 xdx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$.

б) Используя рисунок из предыдущего примера, сведем интеграл к повторному: $\iint\limits_S x^2 ydxdy =$ $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^2 x^2 ydx = \int\limits_0^1 y(\frac{x^3}{3})\Bigg|_{2y}^2 dy = \int\limits_0^1 \frac{y}{3}(8-8y^3)dy = \frac{8}{3}\int\limits_0^1 (y-y^4)dy =$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

После рассмотрения предложенных типов задач можно переходить к более сложным интегралам, при вычислении которых используются метод подстановки или метод интегрирования по частям. В дальнейшем необходимо решить примеры на использование физического и геометрического смысла двойного интеграла.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение сводится к вычислению интеграла $\iint\limits_s dxdy$ по области, ограниченной данными линиями.

Пример 5. Найти центр тяжести однородного полукруга, ограниченного осью *Ox* и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Такой порядок задач способствует лучшему усвоению материала студентами.

Изучение криволинейных интегралов начинают с рассмотрения физического примера и построения соответствующей интегральной суммы. Можно поступить и по-другому. Напомним учащимся, что определенный интеграл вычисляется по отрезку прямой, и зададим им вопрос, можно ли заменить отрезок дугой некоторой кривой. Отвечая положительно на данный вопрос, мы получаем криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Отличие их друг от друга – в подынтегральной функции, у криволинейного интеграла первого рода это скалярная функция, поэтому он не зависит от выбора точки, которую будем считать начальной, и имеет соответствующий физический смысл – вычисление массы материальной линии. Интеграл второго рода вычисляется для векторной функции, записанной в координатной форме, и поэтому зависит от выбора начальной точки кривой. Его физический смысл – вычисление работы силы.

Криволинейные интегралы сводятся к определенным интегралам, для этого используется уравнение связи между координатами – уравнение кривой.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_l x^2 dl$, где *l* – это кривая, заданная уравнением $y = \ln x$, если $1 \le x \le e$ [5].

Решение. 1) Вычислим дифференциал кривой по формуле $dl = \sqrt{1+(y^/)^2}dx$. Имеем $dl = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$. 2) Подставляем найденное значение дифференциала в интеграл, получаем $\int\limits_l x^2 dl = \int\limits_1^e x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int\limits_1^e \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}\Bigg|_1^e =$

$\frac{1}{3}\left((1+e^2)^3 - 2\sqrt{2}\right)$.

При вычислении криволинейных интегралов построение области чаще всего не требуется, если только интеграл вычисляется не по замкнутому контуру.

Пример 7. Вычислить работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении точки *М* из положения *А* (2; 0) в положение *В* (–1; 3) вдоль прямой *АВ*.

Решение. Согласно физическому смыслу необходимо вычислить интеграл криволинейный второго рода. Уравнение линии, по которой идет перемещение точки, имеет вид $y = 2 - x$. Имеем

$$\int_{AB} 2xydx + xdy = \int_2^{-1} 2x(2-x)dx + x(-1)dx = \int_2^{-1} (4x - 2x^2 - x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_2^{-1} = 1{,}5.$$

В статье рассмотрены только некоторые аспекты изучения интегрального исчисления. Предложенный подход к введению различных типов интегралов был использован при изучении математики студентами инженерных направлений ВятГУ и дал положительный результат.

Список литературы

1. *Баврин И. И.* Высшая математика : учебник для студ. естественнонауч. спец. пед. вузов. 6-е изд., испр. М. : Изд. центр «Академия», 2007.

2. Высшая математика для экономистов : учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / [Н. Ш. Кремер и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. 3-е изд. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

3. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. М. : ООО «Изд-во Астрель» ; ООО «Изд-во АСТ», 2001. 656 с. : ил.

4. *Шипачев В. С.* Высшая математика : учебник для вузов. 4-е изд., стер. М. : Высш. шк., 1998.

5. *Шипачев В. С.* Задачник по высшей математике : учеб. пособие для вузов. 6-е изд., стер. М. : Высш. шк., 2006.

Study of the topic «Integral calculus» in the course of higher mathematics

E. S. Trefilova

senior lecturer, Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.

ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. The Article is devoted to one of the sections of mathematical analysis– integral calculus of the function of one and several variables. The article analyzes two approaches to the introduction of the concept of a certain integral. Some advantages and disadvantages of each method of administration are given. One of possible ways of generalization of a certain integral to curvilinear and surface integrals, and also multiple integrals is offered. The connection of curvilinear, surface and multiple integrals with a certain integral is shown, as well as the physical and mechanical meanings of different types of integral are indicated. Several examples of calculation of different types of integrals are given. The article also identifies the main errors and difficulties encountered in calculating the integrals of students, and offers some ways to prevent them.

Keywords: definite integral, Newton-Leibniz formula, curvilinear and multiple integrals.

References

1. *Bavrin I. I. Vysshaya matematika: uchebnik dlya stud. estestvennonauch. spec. ped. vuzov* [Higher mathematics: textbook for students of natural science specializations of ped. higher schools]. 6th publ., corr. M. Publ. center «Academiya». 2007.

2. *Vysshaya matematika dlya ehkonomistov: uchebnik dlya stud. vuzov, obuchayushchihsya po ehkonom. spec.* – Higher mathematics for economists: textbook for students studying in economics specializations / [N. Sh. Kremer et al.]; ed. N. Sh. Kremer. 3d publ. M. YUNITI-DANA. 2010.

3. *Kratkij kurs vysshej matematiki : ucheb. posobie dlya vuzov* – Short course of higher mathematics: educational manual for high schools / B. P. Demidovich, V. A. Kudryavtsev. M. LLC «Publishing house Astrel»; LLC «Publishing house AST». 2001. 656 p.: Il.

4. *SHipachev V. S. Vysshaya matematika : uchebnik dlya vuzov* [Higher mathematics: textbook for universities]. 4th publ., ster. M. Vyssh. shk. 1998.

5. *SHipachev V. S. Zadachnik po vysshej matematike : ucheb. posobie dlya vuzov* [Higher mathematics problems book: educational manual for high schools]. 6th publ., ster. M. Vyssh. shk. 2006.

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК: 004.02 doi: 10.25730/VSU.0536.18.25

Об алгоритме нахождения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Д. В. Чупраков
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr10381@vyatsu.ru

Аннотация. В работе исследуются конечные циклические полукольца с полурешеточным сложением, лежащие в основе теории конечных циклических полуколец с некоммутативным идемпотентным сложением. Для исследования применены методы теории чисел, абстрактной алгебры и компьютерного моделирования. Центральным результатом статьи является оптимизированный алгоритм построения всех конечных циклических полуколец с полурешеточным умножением. Как пример работы алгоритма найдены все девятиэлементные циклические полукольца с полурешеточным сложением. Вычислено количество конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением вплоть до 50-го порядка. Выявлена экспоненциальная зависимость роста количества полуколец в зависимости от числа элементов.

Работа разделена на три параграфа. В параграфе «Введение и основные понятия» обозначена актуальность исследования, выполнен краткий обзор литературы, приведены базовые определения.

Параграф «Математические основания алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением» посвящен теоретическим свойствам конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, лежащим в основе алгоритма. Наконец, параграф «Алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением и результаты его применения» содержит основные результаты работы.

Ключевые слова: циклическое полукольцо, алгоритмическая теория чисел, SageMath.

Введение и основные понятия

Полукольцом называется алгебраическая структура S с ассоциативными операциями сложения «+» и умножения «$-$» и аксиомами дистрибутивности умножения относительно сложения с обеих сторон:

$$x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$$

Полукольцо S называется *полукольцом с полурешеточным сложением*, если операция сложения коммутативна и идемпотентна (т. е. $s+s=s$ для любого элемента $s \in S$). Полукольцо с единицей 1 называется *циклическим*, если все его (ненулевые) элементы являются целыми неотрицательными степенями некоторого элемента $\alpha \in S$, называемого образующим полукольца S, при этом $1 = \alpha^0$.

Важность исследования циклических полуколец определяется прикладной значимостью циклических структур (вспомним, например, классическую теорему о представлении конечных абелевых групп и теорию конечных полей), кроме того, Е. М. Вечтомовым и И. А. Лубягиной исследование конечных циклических полуколец с некоммутативным сложением сведено именно к конечным циклическим полукольцам с полурешеточным сложением и конечным циклическим полуполям.

Общая задача описания конечных циклических полуколец с коммутативным сложением сформулирована Е. М. Вечтомовым [3] в 2000 г. А. С. Бестужевым в статье [1] начато исследование конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением. В этой работе применен метод перебора по ширине полурешетки, определяющей операцию сложения, и описаны все конечные

© *Чупраков Д. В., 2018*

циклические полукольца, в которых операция сложения задана полурешеткой с шириной, не превосходящей 3. Отметим, что в работе А. С. Бестужева не выявлено общего свойства, позволяющего автоматизировать поиск конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением. Решение этой задачи впервые получено в работе А. В. Ведерниковой и Д. В. Чупракова [2] путем представления конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением через идеалы целых неотрицательных чисел. В докладе [7] изложен алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, основанный на переборе всевозможных базисов идеалов полукольца целых неотрицательных чисел с последующим восстановлением по ним конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, вычислено количество КИЦП с числом элементов, не превосходящим 16. Однако алгоритм, предложенный в этом докладе, является крайне неэффективным, так как сводится к сплошной проверке всех подмножеств отрезка целых неотрицательных чисел $\{0,1,\dots,n\}$.

Свойства, позволяющие эффективно отсеивать неподходящие подмножества, изложены в работе Д. В. Чупракова и А. В. Ведерниковой [2] и докладах Д. В. Чупракова [5; 7], в частности вычислено количество элементов конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, заданных двухпорожденными идеалами полукольца целых неотрицательных чисел. Д. В. Чупраковым также получен общий вид таких полуколец.

В настоящей статье описан алгоритм, нахождения всех конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, основанный на результатах работ [5; 6; 7].

Математические основания алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Операция умножения в циклическом полукольце $S=\{1,\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^n\}$ однозначно определена циклическим свойством. Поэтому (n+1)-элементное циклическое полукольцо определяется своей аддитивной операцией.

Так, конечное (n+1)-элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением и образующим α однозначно задается (n+1)-элементным кортежем

$$(p_0,p_1,\dots,p_n)\in\{0,1,\dots,n\}^{n+1},\ где\ 1+\alpha^i=\alpha^{p_i}. \qquad (*)$$

При этом для любого $i\in\{0,1,\dots,n\}$ справедливо неравенство $p_i\geq i$ (см. [2]). Отметим также, что α^n – поглощающий элемент полукольца S. По кортежу (*) восстанавливается таблица Кэли аддитивной операции полукольца S следующим образом:

$$\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{max\,\{i+p_{j-i},n\}}\ \text{для любых}\ i\leq j\leq n.$$

Множество элементов $I=\{p_0,p_1,\dots,p_n\}$ кортежа (*) является идеалом [2] полукольца $\langle\{0,1,\dots,n\},\oplus,\otimes\rangle$ с аддитивной операцией

$$b\oplus c=\min\{b+c,n\},\ b,c\in\{0,1,\dots,n\}$$

и мультипликативной операцией

$$b\otimes c=\min\{bc,n\},\ b,c\in\{0,1,\dots,n\}.$$

Идеал I конечен и, значит, имеет *базис,* т. е. множество $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}\subseteq I$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) любой элемент $b\in I$ выражается через элементы $g_1,g_2,\dots,g_l$:

$$b=(k_1\otimes g_1)\oplus(k_2\otimes g_2)\oplus\dots\oplus(k_l\otimes g_l),\ \ k_1,k_2,\dots,k_l\in\{0,1,\dots,n\};$$

2) никакой элемент базиса G нельзя представить в виде комбинации остальных элементов системы с коэффициентами из множества $\{0,1,\dots,n\}$.

Ясно, что идеалу I однозначно соответствует идеал $J=\langle g_1,g_2,\dots,g_l\rangle$ целых неотрицательных чисел с базисом $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$. Будем говорить, что аддитивная операция полукольца S задана *идеалом G.*

Сказанное позволяет использовать кортеж (*) как представление конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, а для удобства поиска полуколец оперировать базисом $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$.

Известно [6], что для фиксированного количества элементов $N=n+1$ множеству $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$ соответствует не более одного (n+1)-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением, однако каждому базису $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ некоторого идеала полукольца целых неотрицательных чисел может соответствовать несколько циклических полуколец с полурешеточным сложением, имеющих общие свойства и различимых только числом элементов.

Отсюда могут быть выделены две задачи построения конечных полуколец с полурешеточным сложением:

1. По заданному базису G идеала I полукольца целых неотрицательных чисел найти число элементов N полуколец с полурешеточным сложением, заданным этим идеалом I.
2. По известному числу элементов N и идеалу I полукольца целых неотрицательных чисел, задающему аддитивную операцию N-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением, восстановить кортеж (*).
3. По заданному числу элементов N найти всевозможные базисы идеалов полукольца целых неотрицательных чисел, задающих аддитивную операцию хотя бы одного N-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением.

Решение первой задачи для произвольного идеала I полукольца целых неотрицательных чисел опирается на следующее утверждение:

Утверждение 1. ([2]). *Пусть I – идеал полукольца целых неотрицательных чисел с базисом* $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$. ($n$+1)-элементное циклического полукольца с полурешеточным сложением существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\min G < n \le \min \bigcup_{k=1}^{m-1} (I \cap I_k) \setminus I_{\min(I \cap I_k)}.$$

В случае, когда идеал I полукольца целых неотрицательных чисел порожден базисом $G = \{g_1, g_2\}$, число элементов полукольца может быть найдено явно:

Утверждение 2 ([6,7]). *Пусть $I = \langle g_1, g_2 \rangle$ – идеал полукольца целых неотрицательных чисел, $g_1 < g_2$ и $d = (g_1, g_2)$. Для каждого натурального числа k, удовлетворяющего неравенству*

$$g_2 < k \le \frac{g_1 g_2}{d} + \min\{t^-_{g_1,g_2} : t = dt' < g_1, t' \in \mathbb{N}\}, \qquad (**)$$

где $t = t^+_{g_1,g_2} + t^-_{g_1,g_2}$, $-\frac{g_1 g_2}{2} \le t^-_{g_1,g_2} \le 0 \le t^+_{g_1,g_2} \le \frac{g_1 g_2}{2}$ существует единственное циклическое (k+1)-элементное полукольцо с полурешеточным сложением, заданным с идеалом I.

Метод решения второй задачи опирается на следующее утверждение:

Утверждение 3. Если $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_l \rangle$ *– идеал полукольца целых неотрицательных чисел, определяющий аддитивную операцию (n+1)-элементного полукольца S с полурешеточным сложением и $d = (g_1, g_2, \dots, g_l)$, то полукольцо S представимо кортежем (*), для которого справедливы следующие свойства:*

1) $p_k = \min(I \cap I_k)$ *для каждого* $k \in \{0,1, \dots, n\}$, *где* $I_k = I + k = \{i \oplus k : i \in I\}$ [5];

2) $p_k = k$ *для каждого* $k \in I \cap \{0,1, \dots, n\}$ [2];

3) $p_k = n$, *если k не делится на d* [6];

4) если $p_k \ne n$, *то* p_k *делится на d* [6].

Здесь свойство 1 определяет общий алгоритм восстановления кортежа (*), а свойства 2)–4) позволяют в частных случаях сократить вычисления.

Наконец, для сокращения перебора возможных базисов $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ используются следующие факты:

Утверждение 4 ([7]). *Пусть $(n+1)$-элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением задано кортежем $(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \{0,1, \dots, n\}^{n+1}$. Тогда кортеж $(q_0, q_1, \dots, q_{dn}) \in \{0,1, \dots, dn\}^{dn+1}$, где $q_k = dn$ для всех индексов $k \in \{0,1, \dots, dn\}$, не кратных d, и $q_{dt} = dp_t$ для всех $t \in \{0,1, \dots, n\}$, определяет $(dn+1)$ -элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением.*

Утверждение 5 ([7]). Пусть I' *– идеал полукольца целых неотрицательных чисел и S – циклическое полукольцо с полурешеточным сложением, заданным идеалом $J = dJ' = \{dj : j \in J'\}$, тогда S содержит подполукольцо, изоморфное S' с полурешеточным сложением, заданным J.*

Утверждение 6 ([6]). *Если идеал I полукольца целых неотрицательных чисел задает полурешеточную операцию сложения конечного циклического полукольца, то все попарные разности его базисных элементов различны.*

Алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением и результаты его применения.

Опишем структуру алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением.

Вход: число N – количество элементов конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением.

Выход: Список всех групп циклических полуколец, число элементов которых не превосходит $N+1$ в виде упорядоченных троек (G, L, C), где G – базис полукольца, задающего аддитивную операцию, L – кортеж (*), определяющий полукольцо с полурешеточной операцией, заданной идеалом полукольца целых неотрицательных чисел, порожденным базисом G с числом элементов, не превосходящим $N+1$, количество таких полуколец.

Шаг 1. Построение кортежей (*), соответствующих главным идеалам полукольца целых неотрицательных чисел.

Шаг 2. Нахождение всех допустимых базисов: таких подмножеств $G=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ множества $\{2,3, \dots, n-1\}$, элементы которых удовлетворяют всем следующим свойствам:

1) $l \geq 2$;
2) числа $g_1, g_2, \dots, g_l$ линейно независимы;
3) $(g_1, g_2, \dots, g_l) = 1$;
4) все попарные разности чисел $g_1, g_2, \dots, g_l$ различны.

Шаг 3. Для каждого найденного допустимого базиса $G=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ вычисление максимального числа элементов конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, заданным идеалом $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_l \rangle$, и проверка неравенства (**).

Шаг 4. Восстановление по базисам $G=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ кортежей (*) опираясь на свойства 1), 2) утверждения 3.

Шаг 5. Построение кортежей (*), соответствующих идеалам с базисами $G_d = \{dg_1, dg_2, \dots, dg_l\}$, по кортежам, соответствующим базисам $G=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$, опираясь на свойства 3), 4) утверждения 3.

Конец алгоритма

Описанный алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры SageMath.

В качестве демонстрации работы алгоритма в табл. 1 приведены все кортежи (*), задающие полурешеточную операцию 9-элементных полуколец. Отметим, что это полукольца наименьшей мощности, среди которых встречаются циклические полукольца, полурешеточное сложение которых задано трехпорожденным идеалом.

Таблица 1

Строение 9-элементных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Базис	Кортеж показателей p_i, удовлетворяющий равенству $1+\alpha^i=\alpha^{p_i}$	Базис	Кортеж показателей p_i, удовлетворяющий равенству $1+\alpha^i=\alpha^{p_i}$
(1)	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	(3, 5)	(0, 6, 5, 3, 8, 5, 6, 8, 8)
(2)	(0, 8, 2, 8, 4, 8, 6, 8, 8)	(3, 7)	(0, 7, 8, 3, 7, 8, 6, 7, 8)
(3)	(0, 8, 8, 3, 8, 8, 6, 8, 8)	(4, 5)	(0, 5, 8, 8, 4, 5, 8, 8, 8)
(4)	(0, 8, 8, 8, 4, 8, 8, 8, 8)	(4, 6)	(0, 8, 6, 8, 4, 8, 6, 8, 8)
(5)	(0, 8, 8, 8, 8, 5, 8, 8, 8)	(4, 7)	(0, 8, 8, 7, 4, 8, 8, 7, 8)
(6)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 6, 8, 8)	(5, 6)	(0, 6, 8, 8, 8, 5, 6, 8, 8)
(7)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 7, 8)	(5, 7)	(0, 8, 7, 8, 8, 5, 8, 7, 8)
(8)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)	(6, 7)	(0, 7, 8, 8, 8, 8, 6, 7, 8)
(2, 7)	(0, 7, 2, 7, 4, 7, 6, 7, 8)	(4, 5, 7)	(0, 5, 7, 7, 4, 5, 8, 7, 8)
(3, 4)	(0, 4, 6, 3, 4, 8, 6, 7, 8)	(4, 6, 7)	(0, 7, 6, 7, 4, 8, 6, 7, 8)

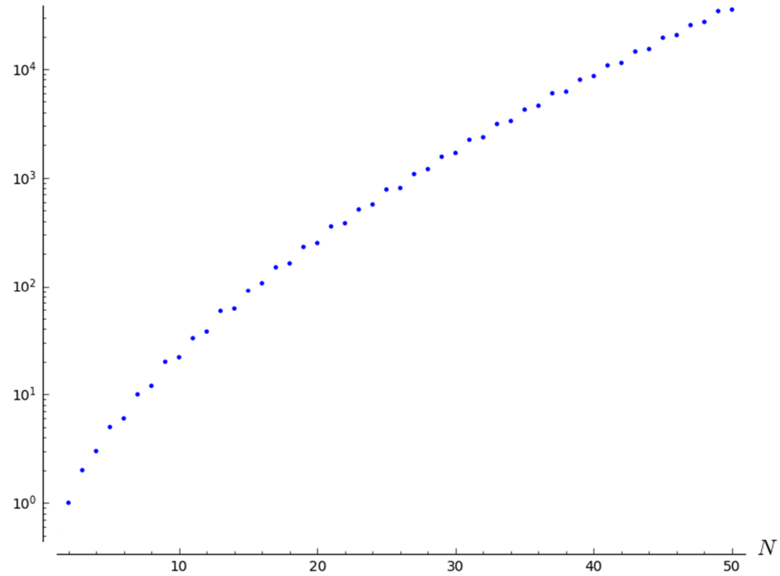
В табл. 2 приведено количество конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением в зависимости от числа элементов N и мощности базиса $G=\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ идеала целых неотрицательных чисел, задающего операцию сложения.

Таблица 2

Количество циклических полуколец с полурешеточным сложением

Число элементов	**Мощность базиса идеала *G***						**Количество полуколец**
	1	2	3	4	5	6	
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	1
3	2	0	0	0	0	0	2
4	3	0	0	0	0	0	3
5	4	1	0	0	0	0	5
6	5	1	0	0	0	0	6
7	6	4	0	0	0	0	10
8	7	5	0	0	0	0	12
9	8	10	2	0	0	0	20
10	9	11	2	0	0	0	22
11	10	17	6	0	0	0	33
12	11	21	6	0	0	0	38
13	12	30	17	0	0	0	59
14	13	32	17	0	0	0	62
15	14	43	32	2	0	0	91
16	15	51	39	2	0	0	107
17	16	62	62	10	0	0	150
18	17	67	69	10	0	0	163
19	18	82	105	26	0	0	231
20	19	91	115	26	0	0	251
21	20	108	169	60	0	0	357
22	21	116	182	63	0	0	382
23	22	132	241	116	0	0	511
24	23	148	275	122	0	0	568
25	24	169	369	214	4	0	780
26	25	175	379	222	4	0	805
27	26	197	482	355	22	0	1082
28	27	217	540	395	22	0	1201
29	28	239	662	565	68	0	1562
30	29	255	726	614	68	0	1692
31	30	282	890	879	156	0	2237
32	31	300	934	937	157	0	2359
33	32	329	1134	1311	320	0	3126
34	33	345	1212	1419	320	0	3329
35	34	373	1419	1821	592	0	4239
36	35	401	1557	2005	602	0	4600
37	36	432	1808	2672	1036	8	5992
38	37	448	1884	2771	1049	8	6197
39	38	483	2187	3574	1680	24	7986
40	39	515	2386	3915	1746	24	8625
41	40	549	2703	4760	2675	80	10807
42	41	568	2819	5109	2782	80	11399
43	42	607	3216	6361	4074	206	14506
44	43	634	3385	6746	4254	206	15268
45	44	675	3839	8303	6069	504	19434
46	45	706	4082	8845	6355	504	20537
47	46	745	4508	10401	8668	1004	25372
48	47	785	4847	11291	9161	1004	27135
49	48	830	5415	13582	12372	1913	34160
50	49	850	5562	14006	12884	1915	35266

Следующий график (рисунок), демонстрирующий рост числа полуколец с увеличением количества элементов в них, позволяет сформулировать гипотезу о экспоненциальной скорости роста числа полуколец.



Зависимость числа циклических полуколец с полурешеточным сложением от количества элементов в них

Список литературы

1. *Бестужев А. С.* Конечные идемпотентные циклические полукольца // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 71–78.
2. *Ведерникова А. В., Чупраков Д. В.* О представлении конечных идемпотентных циклических полуколец кортежами целых чисел // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19. С. 70–76.
3. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца. Киров : ВГПУ, 2000. 44 с.
4. *Вечтомов Е. М., Лубягина (Орлова) И. В.* Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. № 6. С. 17–41.
5. *Вечтомов Е. М., Орлова И. В., Чупраков Д. В.* К теории мультипликативно циклических полуколец // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, 29 мая 2018 г. Тула : ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018 С. 136–138.
6. *Чупраков Д. В., Ведерникова А. В.* О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика, механика, информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 92–107.
7. *Чупраков Д. В.* Конечные циклические полукольца с коммутативным идемпотентным сложением, ассоциированные с двухпорожденными идеалами полукольца натуральных чисел // Математическое моделирование и информационные технологии : сб. ст. Междунар. науч. конф. (10–11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар). Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. С. 148–152.
8. *Chuprakov D. V.* Algorithm for constructing finite idempotent cyclic semirings with commutative addition // Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4'2017. June 28 – July 2. Chisinau, 2017. Pp. 59–62.

On the algorithm for finding finite cyclic semirings with semi-lattice addition

D. V. Chuprakov

PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr10381@vyatsu.ru

Abstract. In the article we study finite cyclic semirings with semi-lattice addition, which are the basis of the theory of finite cyclic semirings with noncommutative idempotent addition. Methods of number theory, abstract algebra and computer modeling are applied for the research. The central result of the paper is an optimized algorithm for constructing all finite cyclic semirings with semi-lattice multiplication. As an example of the algorithm, all nine-element cyclic semirings with semi-lattice addition are found. The number of finite cyclic semirings with semi-lattice addition up to the 50th order is calculated. The exponential dependence of the growth of the number of half-rings depending on the number of elements is revealed.

The work is divided into three paragraphs. The paragraph «Introduction and basic concepts» indicates the relevance of the study, a brief review of the literature, the basic definitions.

The section «Mathematical foundations of the algorithm for constructing finite cyclic semirings with semi-lattice addition» is devoted to the theoretical properties of finite cyclic semirings with semi-lattice addition underlying the algorithm. Finally, the paragraph «Algorithm for constructing finite cyclic semirings with semi-lattice addition and the results of its application» contains the main results of the work.

Keywords: cyclic semicircle, algorithmic number theory, SageMath.

References

1. *Bestuzhev A. S. Konechnye idempotentnye ciklicheskie polukol'ca* [Finite cyclic idempotent semirings] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2011, iss. 13, pp. 71–78.

2. *Vedernikova A. V., CHuprakov D. V. O predstavlenii konechnyh idempotentnyh ciklicheskih polukolec kortezhami celyh chisel* [On representation of a finite idempotent semirings of cyclic tuples of integers] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2017, iss. 19, pp. 70–76.

3. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca* [Introduction to semiring]. Kirov. VSPU. 2000. 44 p.

4. *Vechtomov E. M., Lubyagina (Orlova) I. V. Ciklicheskie polukol'ca s idempotentnym nekommutativnym* [Cyclic semiring with the idempotent noncommutative] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2015, vol. 20, No. 6, pp. 17–41.

5. *Vechtomov E. M., Orlova I. V., CHuprakov D. V. K teorii mul'tiplikativno ciklicheskih polukolec* [On the theory of multiplicative cyclic semirings] // *XV Mezhdunarodnaya konferenciya «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya», posvyashchennaya stoletiyu so dnya rozhdeniya professora Nikolaya Mihajlovicha Korobova, 29 maya 2018 g. Tula : TGPU im. L. N. Tolstogo* – XV international conference «Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications», dedicated to the centenary of the birth of professor Nikolai Mikhailovich Korobov, May 29, 2018. Tula. TSPU n.a. L. N. Tolstoy. 2018. Pp. 136–138.

6. *CHuprakov D. V., Vedernikova A. V. O strukture konechnyh ciklicheskih polukolec s idempotentnym kommutativnym slozheniem* [The structure of a finite cyclic semirings with idempotent commutative addition] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika, mekhanika, informatika* – Herald of Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics, mechanics, computer science. 2017, iss. 2 (23), pp. 92–107.

7. *CHuprakov D. V. Konechnye ciklicheskie polukol'ca s kommutativnym idempotentnym slozheniem, associirovannye s dvuxporozhdennymi idealami polukol'ca natural'nyh chisel* [Finite cyclic semirings with commutative idempotent addition associated with two-generated ideals of the semirings of natural numbers] // *Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tekhnologii: sb. st. Mezhdunar. nauch. konf. (10–11 noyabrya 2017 g., g. Syktyvkar)* – Mathematical modeling and information technologies: coll. art. of scientific conf. (10-11 November 2017, Syktyvkar). Syktyvkar. Publishing house of SSU n.a. Pitirim Sorokin. 2017. Pp. 148–152.

8. *Chuprakov D. V. Algorithm for constructing finite idempotent cyclic semirings with commutative addition* [Algorithm for constructing cyclic finite idempotent semirings with commutative addition] // *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4'2017. June 28 – July 2-* Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4 in 2017. June 28-July 2. Chisinau. 2017. Pp. 59–62.

УДК 004.912 doi: 10.25730/VSU.0536.18.26

Извлечение аргументации из текстов и проблема отсутствия русскоязычных текстовых корпусов*

Е. В. Котельников
кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: ev_kotelnikov@vyatsu.ru

Аннотация. В статье рассматривается одно из перспективных направлений в современной компьютерной лингвистике – извлечение аргументации из текстов (Argumentation Mining). Перечисляются задачи, решаемые в системах извлечения аргументации, указываются области применения таких систем. Приводятся схема представления аргументации на основе теории Фримена и пример разметки текста с использованием данной схемы. Рассматриваются существующие текстовые корпуса, снабженные разметкой в соответствии с некоторой схемой аргументации. Отсутствие подобных русскоязычных корпусов является существенным препятствием для развития области Argumentation Mining в России. Два способа получения таких корпусов – на основе разметки новых текстов и с помощью профессионального перевода существующих корпусов на русский язык – оказываются весьма трудоемкими. Предлагается для формирования корпусов использовать машинный перевод и обозначается план дальнейшего исследования этой проблемы.

Ключевые слова: аргументация, извлечение аргументации из текстов, текстовые корпуса, машинный перевод.

1. Введение

В современной компьютерной лингвистике одним из наиболее интересных и перспективных направлений является *извлечение аргументации из текстов* (Argumentation Mining) [5–7]. Под *аргументацией* понимается вербальная, социальная и рациональная активность, направленная на убеждение разумного критика в приемлемости определенной точки зрения за счет выдвижения группы высказываний, подтверждающих или опровергающих данную точку зрения [15]. Предметом области Argumentation Mining является автоматическое обнаружение аргументов, представленных в тексте, связей между ними и структуры каждого отдельного аргумента [8].

Модули автоматического извлечения аргументации могут применяться для расширения возможностей систем анализа мнений в контексте выявления причин возникновения тех или иных мнений; для идентификации обоснования решений в юридических документах при поиске прецедентов; для раскрытия структуры аргументации в учебных работах с целью предоставления обратной связи студентам [1; 10].

При разработке модуля автоматического извлечения аргументации из текстов необходимо решить следующие задачи [9; 10]:

1) выявить фрагменты текста, содержащие аргументацию;
2) осуществить сегментацию найденных фрагментов на отдельные элементы, называемые аргументативными дискурсивными единицами (argumentative discourse units, ADU);
3) классифицировать ADU в соответствии с используемой схемой представления аргументации;
4) установить наличие и вид связей между всеми парами ADU.

Важную роль при решении указанных задач играет выбор схемы представления аргументации (или аргументационной схемы), в основу которой положена некоторая теория аргументации. Одна из наиболее влиятельных теорий была разработана С. Тулмином [14]. Он ввел шесть аргументационных ролей высказываний: «утверждение» (conclusion), «данные» (data), «основания» (warrant), «поддержка» (backing), «опровержение» (rebuttal), «определитель» (qualifier). Теория С. Тулмина была пересмотрена Дж. Фрименом, который ввел макроструктуру аргументов, позволяющую объединять высказывания, играющие различные роли, в аргументационную схему, отражающую процесс аргументации [4].

А. Пельдцусом и М. Штеде была предложена схема представления аргументации на основе теории Фримена [10]. В этой схеме *аргументом* называется совокупность посылок (premises), под-

© Котельников Е. В., 2018

** Работа выполнена при поддержке Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания Минобрнауки РФ № 2.12728.2018/12.2 по теме «Проведение научно-исследовательских работ в рамках международного научно-образовательного сотрудничества по программе "Михаил Ломоносов" по теме: "Разработка и исследование аннотированного русскоязычного текстового корпуса для анализа аргументации"».*

держивающих некоторый вывод или заключение (claim, conclusion). Посылки и заключения являются ADU. Для представления компонентов аргументов и связей между ними используется ряд графических обозначений, основные из которых представлены на рис. 1.

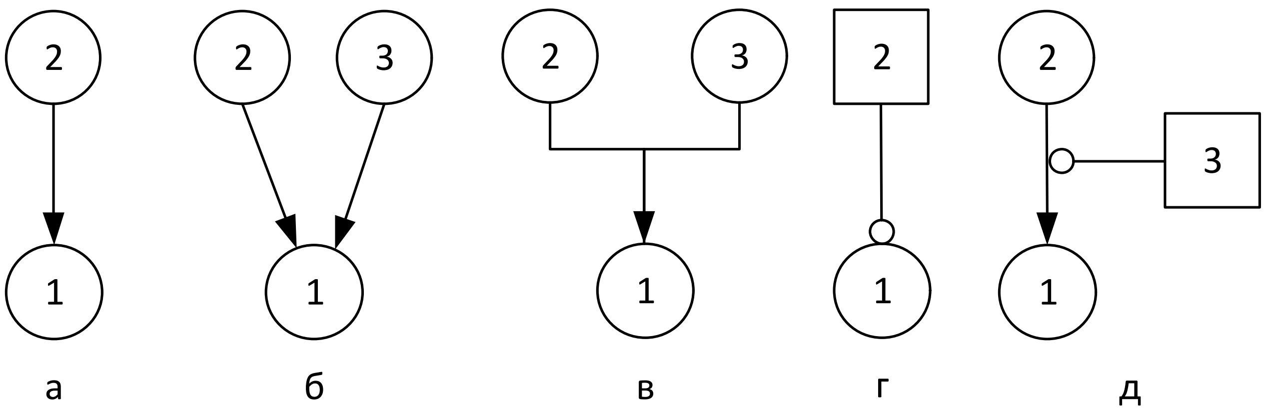


Рис. 1. Графические обозначения, используемые для представления аргументов

На рис. 1а обозначено заключение (1), поддерживаемое посылкой (2), – это простейший случай связи двух ADU (basic argument). Две независимые посылки (2) и (3), поддерживающие одно и то же заключение (1), показаны на рис. 1б (multiple support). Каждая из них может использоваться отдельно от другой – они никак не связаны, в отличие от случая на рис. 1в, где представлены связанные посылки (2) и (3) – одна дополняет другую (linked support).

На рис. 1г показано ADU (2), атакующее заключение (1) (rebut a conclusion). Другой вариант контраргумента представлен на рис. 1д, где ADU (3) атакует не само заключение (1), а связь между заключением (1) и посылкой (2) (undercut an argument).

Рассмотрим пример. Пусть дан следующий текст: «Пенсионный возраст должен быть повышен. Из-за низкой рождаемости доля пожилого населения и расходы на пенсионную систему возрастают. Да, рабочая нагрузка увеличивается во многих профессиях, но люди, становясь старше, остаются здоровыми благодаря современной медицине».

Данный текст можно представить в виде аргументационной схемы, показанной на рис. 2.

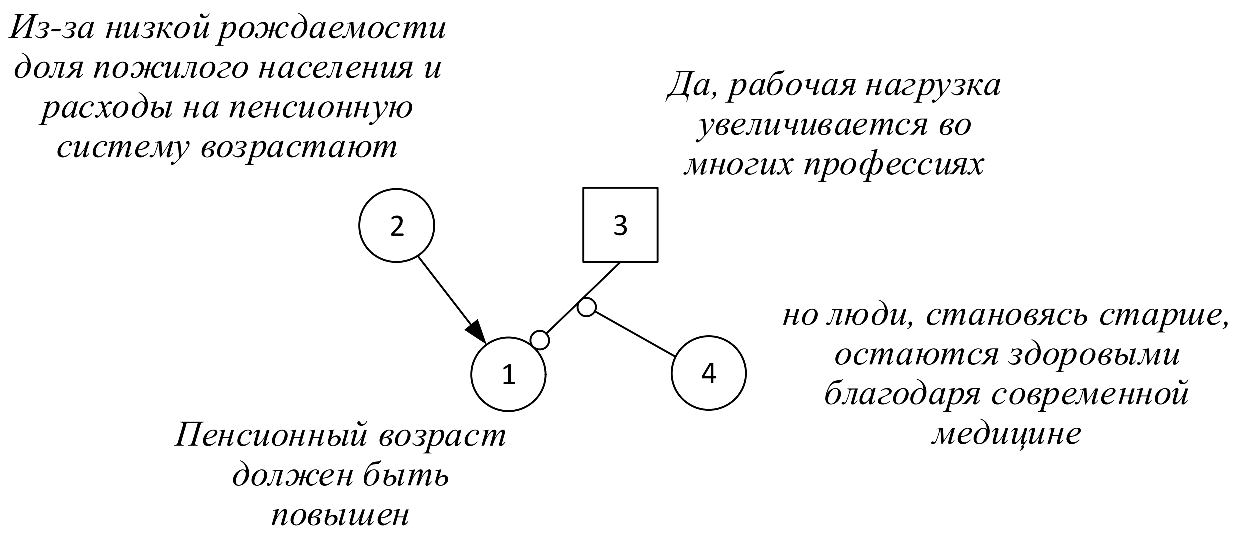


Рис. 2. Пример аргументационной схемы

На рис. 2 показаны заключение (1), посылка (2) в поддержку заключения, посылка (3), направленная против заключения, и посылка (4), атакующая связь посылки (3) и заключения (1).

Для построения систем извлечения аргументации из текстов необходимы текстовые корпуса, снабженные разметкой в соответствии с некоторой аргументационной схемой, например представленной на рис. 1 и 2. Для английского языка существует несколько подобных корпусов (схемы разметки для них отличаются); в качестве примеров можно привести следующие:

1) корпус аргументационных микротекстов[1] (Argumentative Microtext Corpus) [9] – это 112 коротких текстов (пять-шесть предложений) на разные тематики (повышение пенсионного возраста, медицинское страхование, школьная форма и т. п.) на английском и немецком языках, размеченные в соответствии со схемой, предложенной в [10];

2) корпус убеждающих эссе[2] (Persuasive Essays) [12] – это 402 эссе на английском языке (в среднем 17 предложений на эссе), обосновывающих определенные точки зрения по широкому спектру тематик – миграция, образование, бюджетная политика и т. д.

На веб-сайте AIFdb Corpora[3], поддерживаемом университетом Данди (Шотландия), собрано более 150 текстовых корпусов разного объема с разметкой аргументации. При этом в настоящее время не существует русскоязычных корпусов, размеченных в соответствии с какой-либо аргументационной схемой. Этот факт является существенным препятствием для развития области Argumentation Mining в России.

Есть два возможных способа формирования таких корпусов:

1) поиск текстов, содержащих аргументацию, и их разметка в соответствии с выбранной схемой;
2) перевод существующих корпусов на русский язык.

Оба способа являются весьма трудоемкими. В первом сначала необходимо найти тексты с аргументами. Возможными источниками могут служить научные статьи, политические дискурсы, судебные решения, редакционные статьи, студенческие эссе. Далее следует разметить (аннотировать) найденные тексты в соответствии с выбранной схемой аргументации. Для этого необходимо задействовать нескольких аннотаторов, тщательно объяснить им правила разметки, предоставить удобный инструмент разметки (для этого можно использовать GraPAT [11] или Brat [13]). По окончании процесса разметки следует проверить согласие между аннотаторами, например, на основе метрики каппы Флейса [3]. В случае высокой степени несогласия желательно согласовать мнения аннотаторов, возможно, повторив процедуру разметки для некоторых текстов.

Другой способ подразумевает качественный перевод существующих корпусов на русский язык (как правило, с английского). Трудоемкость этого способа также высока: в работе [2] указано, что перевод корпуса убеждающих эссе (7 141 предложение) [12] с английского языка на немецкий с сохранением аргументационной разметки занял 270 часов и стоил 3 000 долларов.

Поэтому предлагается исследовать вариант автоматического перевода размеченных корпусов. С этой целью для корпуса аргументационных микротекстов [9] было получено три варианта машинного перевода: с помощью систем Google Translate[4], Яндекс.Переводчик[5] и Promt[6], а также перевод профессионального переводчика.

В дальнейших исследованиях предполагается проанализировать качество машинного перевода на основе сравнения результатов извлечения аргументации для вариантов русскоязычных корпусов, созданных автоматически и профессиональным переводчиком.

Список литературы

1. *Afantenos S., Peldszus A., Stede M.* Comparing decoding mechanisms for parsing argumentative structures // Argument & Computation. 2018. Preprint, pp. 1–16.

2. *Eger S., Daxenberger J., Stab C., Gurevych I.* Cross-lingual Argumentation Mining: Machine Translation (and a bit of Projection) is All You Need! // Proceedings of the 27th International Conference on Computational Linguistics. Santa Fe, New Mexico, USA, August 20-26, 2018, pp. 831–844.

3. *Fleiss J.L.* Measuring nominal scale agreement among many raters // Psychological Bulletin. 1971. Vol. 76(5), pp. 378–382.

4. *Freeman J. B.* Argument Structure: Representation and Theory // Argumentation Library. 2011. Vol. 18. Springer.

5. *Habernal I., Gurevych I.* Argumentation Mining in User-Generated Web Discourse // Computational Linguistics. 2017. Vol. 43(1), pp. 125–179.

6. *Lippi M., Torroni P.* Argumentation Mining: State of the Art and Emerging Trends // ACM Transactions on Internet Technology. 2016. Vol. 16(2), pp. 1–25.

7. *Moens M.-F.* Argumentation mining: How can a machine acquire common sense and world knowledge? // Argument & Computation. 2018. Vol. 9, pp. 1–14.

8. *Palau R. M., Moens M.-F.* Argumentation mining: the detection, classification and structure of arguments in text // Proceedings of the 12th international conference on artificial intelligence and law. ACM. 2009, pp. 98–107.

9. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts // Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation, Lisbon 2015. Vol. 2. London. College Publications, 2015, pp. 801–816.

---

[1] *http://angcl.ling.uni-potsdam.de/resources/argmicro.html.*
[2] *https://www.informatik.tu-darmstadt.de/ukp/research_6/data/index.en.jsp*
[3] *http://corpora.aifdb.org*
[4] *https://translate.google.com.*
[5] *https://translate.yandex.ru.*
[6] *https://www.translate.ru.*

10. *Peldszus A., Stede M.* From Argument Diagrams to Argumentation Mining in Texts: A Survey // International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence (IJCINI). 2013. Vol. 7(1), pp. 1–31.

11. *Sonntag J., Stede M.* GraPAT: a tool for graph annotations // Proceedings of the Ninth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'14). 2014. Reykjavik, Iceland.

12. *Stab C., Gurevych I.* Parsing Argumentation Structure in Persuasive Essays // Computational Linguistics. 2017. Vol. 43(3), pp. 619–659.

13. *Stenetorp P., Pyysalo S., Topić G., Ohta T., Ananiadou S., Tsujii J.* Brat: a Web-based Tool for NLP-Assisted Text Annotation // Proceedings of the Demonstrations Session at EACL. 2012.

14. *Toulmin S.* The Uses of Argument. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

15. *Van Eemeren F.H., Grootendorst R., Johnson R.H., Plantin C., Willard Ch.A.* Fundamentals of argumentation theory: Handbook of historical background and contemporary developments. Routledge, 1996.

Extraction of argumentation from texts and the problem of the lack of Russian-language text corpora

E. V. Kotelnikov

PhD of technical sciences, associate professor of the Department of applied mathematics and informatics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: ev_kotelnikov@vyatsu.ru

Abstract. One of the most promising directions in modern computational linguistics – text argumentation mining – is considered in the article. The tasks of argumentation mining systems are enumerated. The fields of application of such systems are indicated. An argumentation scheme based on Freeman's theory and an example of text annotation with the use of this scheme are given. Existing text corpora annotated in accordance with certain scheme are considered. The lack of Russian annotated text corpora is an essential obstacle for the development of argumentation mining in Russia. There are two ways of creating of such corpora – based on the annotation of new texts and with the help of professional translation of existing corpora. But both of them turn out to be very laborious. The use of machine translation for this task is proposed. Also the plan of further research in this direction is suggested.

Keywords: argumentation, text argumentation mining, text corpora, machine translation.

References

1. *Afantenos S., Peldszus A., Stede M.* Comparing decoding mechanisms for parsing argumentative structures // Argument & Computation. 2018. Preprint, pp. 1–16.

2. *Eger S., Daxenberger J., Stab C., Gurevych I.* Cross-lingual Argumentation Mining: Machine Translation (and a bit of Projection) is All You Need! // Proceedings of the 27th International Conference on Computational Linguistics. Santa Fe, New Mexico, USA, August 20-26, 2018, pp. 831–844.

3. *Fleiss J.L.* Measuring nominal scale agreement among many raters // Psychological Bulletin. 1971. Vol. 76(5), pp. 378–382.

4. *Freeman J. B.* Argument Structure: Representation and Theory // Argumentation Library. 2011. Vol. 18. Springer.

5. *Habernal I., Gurevych I.* Argumentation Mining in User-Generated Web Discourse // Computational Linguistics. 2017. Vol. 43(1), pp. 125–179.

6. *Lippi M., Torroni P.* Argumentation Mining: State of the Art and Emerging Trends // ACM Transactions on Internet Technology. 2016. Vol. 16(2), pp. 1–25.

7. *Moens M.-F.* Argumentation mining: How can a machine acquire common sense and world knowledge? // Argument & Computation. 2018. Vol. 9, pp. 1–14.

8. *Palau R. M., Moens M.-F.* Argumentation mining: the detection, classification and structure of arguments in text // Proceedings of the 12th international conference on artificial intelligence and law. ACM. 2009, pp. 98–107.

9. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts // Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation, Lisbon 2015. Vol. 2. London. College Publications, 2015, pp. 801–816.

10. *Peldszus A., Stede M.* From Argument Diagrams to Argumentation Mining in Texts: A Survey // International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence (IJCINI). 2013. Vol. 7(1), pp. 1–31.

11. *Sonntag J., Stede M.* GraPAT: a tool for graph annotations // Proceedings of the Ninth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'14). 2014. Reykjavik, Iceland.

12. *Stab C., Gurevych I.* Parsing Argumentation Structure in Persuasive Essays // Computational Linguistics. 2017. Vol. 43(3), pp. 619–659.

13. *Stenetorp P., Pyysalo S., Topić G., Ohta T., Ananiadou S., Tsujii J.* Brat: a Web-based Tool for NLP-Assisted Text Annotation // Proceedings of the Demonstrations Session at EACL. 2012.

14. *Toulmin S.* The Uses of Argument. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

15. *Van Eemeren F.H., Grootendorst R., Johnson R.H., Plantin C., Willard Ch.A.* Fundamentals of argumentation theory: Handbook of historical background and contemporary developments. Routledge, 1996.

УДК 537.1; 537.9; 517.958 doi: 10.25730/VSU.0536.18.27

Новый метод измерения поверхностной проводимости тонких круглых образцов, альтернативный методу Ван дер Пау*

А. Э. Рассадин[1], Л. А. Фомин[2]

[1]член Правления, Нижегородское математическое общество, Россия, г. Нижний Новгород. ORCID: 0000-0002-7396-0112. E-mail: brat_ras@list.ru

[2]кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН. Россия, Московская область, г. Черноголовка. E-mail: fomin@iptm.ru

Аннотация. В настоящее время четырехточечная схема электрических измерений имеет широкий спектр применений, включая характеризацию металлических и полупроводниковых наноструктур. Для характеризации электрических свойств пленок принято использовать метод Ван Дер Пау. В работе предложена альтернатива этому методу для измерения поверхностной проводимости образцов в форме тонких круговых дисков. В основу нового метода положено новое точное решение задачи о распределении потенциала в таком образце.

Ключевые слова: метод Ван Дер Пау, микроэлектроника, электрические свойства наноструктур, зондовая микроскопия, разделение переменных, ряд Фурье, задача Неймана.

Введение

В связи с миниатюризацией элементов электронных схем в современной микроэлектронике остро встает проблема определения их свойств с необходимой точностью. Электрические свойства микро- и наноструктур, такие как вольт-амперная характеристика, поведение сопротивления в магнитном поле, коэффициент Холла, в настоящее время в основном измеряются по четырехточечной схеме. В отличие от классических двухконтактных измерений, этот метод устраняет паразитные сопротивления подводящих проводов, а также сопротивления контактов, и, тем самым, позволяет измерять сопротивления с высокой точностью. Первоначально предложенная Винером для применения в геофизике [10], сегодня четырехточечная схема измерений имеет широкий спектр применений, включая характеризацию металлических и полупроводниковых наноструктур.

Однако при измерениях тонких эффектов, в частности при низких температурах при изучении сверхпроводимости, для того чтобы подводящие провода не влияли на результаты измерений, становясь, в частности, источниками тепловых шумов, приходящих в камеру наблюдения извне, приходится принимать дополнительные меры – вводить фильтры, эмиттерные повторители и т. д.

Таким образом, в современной микроэлектронике происходит постоянное совершенствование экспериментальных методов. К числу первых методов такого сорта относится метод Ван-дер-Пау [9]. Суть этого метода состоит в том, что берется плоский образец произвольной формы с четырьмя контактами по периферии. По двум из них пропускается заданный ток (токовые контакты), а между двумя другими измеряется разность потенциалов (потенциальные контакты). Из измерений вычисляется сопротивление путем деления разности потенциалов на ток. Затем один из токовых контактов становится потенциальным, а один из потенциальных – токовым, и снова измеряется разность потенциалов и вычисляется сопротивление. Как показал Ван дер Пау, из этих измерений можно определить поверхностную проводимость плоского образца, зная его толщину.

Переход на суб-10 нм технологии диктует свои требования. В частности, надо уметь работать не только с полупроводниками, где с успехом применяется метод Ван дер Пау, но и с металлами [8], где он может быть недостаточно точен. Что касается экспериментальной методики измерений поверхностной проводимости, то для наноструктур можно либо сделать четыре контакта литографическим методом, либо использовать монолитные четырехточечные зонды или многозондовый ска-

© Рассадин А. Э., Фомин Л. А., 2018

** Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 18-08-01356-а. Работа Л. А. Фомина поддержана Государственным заданием № 007-00220-18-00.*

нирующий туннельный микроскоп [7]. Также интерес представляет исследование систем стержень-пленка. В таких системах, как было показано в работах [1], ток высокой плотности, инжектируемый через микроконтакт из стержня в пленку, вызывает генерацию терагерцового излучения за счет спиновой инжекции. Интерес представляют распределения электрического и магнитного поля в такой системе.

В данной работе предложена альтернатива методу Ван Дер Пау для измерения поверхностной проводимости образцов в форме тонких дисков. В основу нового метода положено новое точное решение задачи о распределении потенциала в таком образце.

Работа имеет следующую структуру: в части 1 представлено построение нового решения уравнения Лапласа в общем виде. В части 2 это решение адаптировано к граничным условиям, соответствующим предложенной новой экспериментальной методике. Часть 3 посвящена описанию способа определения поверхностной проводимости такого образца на основе одновременного использования зондовой микроскопии и полученного точного решения для потенциала образца. В Заключении суммированы полученные результаты.

1. Точное решение уравнения Лапласа для тонкого кругового диска с симметрично расположенными контактами

Рассмотрим проводящий образец в виде кругового диска, радиус которого a существенно превышает его толщину d: $a >> d$. Далее, пусть I_0 – постоянный ток, втекающий в центр диска O_0 с декартовыми координатами $(0,0)$, а I_k – токи, вытекающие с диска в N различных точках O_k на его краях двумерными радиус-векторами $\vec{r}_k = (a\cdot\cos\theta_k, a\cdot\sin\theta_k)$ ($k=\overline{1,N}$).

Поверхностная плотность электрического тока $\vec{j}$ на диске связана с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ на нем законом Ома [4]:

$$\vec{j} = \lambda\cdot\vec{E}, \tag{1}$$

где λ – постоянная поверхностная проводимость материала диска.

Как известно, в этом случае поверхностная плотность тока $\vec{j}$ подчиняется уравнению непрерывности [4]:

$$div\,\vec{j} = 0, \tag{2}$$

а напряженность электрического поля $\vec{E}$ выражается через потенциал $\varphi(\vec{r})$: $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

Из уравнений (1) и (2) следует, что в каждой точке $\vec{r} = (x, y)$ открытой области Ω: $x^2 + y^2 < a^2$ потенциал $\varphi(\vec{r})$ подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) необходимо дополнить условием на границе $\partial\Omega$ $x^2 + y^2 = a^2$ области Ω:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, следующим из условия обращения в нуль нормальной компоненты плотности тока на границе проводника с непроводящей средой [4]. Разумеется, в этом условии должны быть исключены из рассмотрения точки O_1, ..., O_N, в которых ток вытекает из образца. Но совокупность этих точек истечения токов является множеством меры нуль на $\partial\Omega$ и поэтому может не приниматься во внимание.

Таким образом, потенциал на диске является решением двумерной задачи Неймана [2] (3)–(4). Для его определения выделим сначала в нем логарифмические особенности:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_s(\vec{r}) + \psi(\vec{r}). \tag{5}$$

Здесь $\psi(\vec{r})$ – решение задачи Неймана (3)–(4) в области Ω, не имеющее в ней особенностей, а

$$\varphi_s(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \sum_{k=1}^{N}\varphi_k(\vec{r}), \tag{6}$$

где

$$\varphi_0(\vec{r}) = -\frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{|\vec{r}|}{a} \tag{7}$$

и

$$\varphi_k(\vec{r}) = \frac{I_k}{\pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{|\vec{r} - \vec{r}_k|}{a}. \tag{8}$$

Функция (7) в области $\Omega \setminus O_0$ удовлетворяет уравнению (3), а также выражающему закон сохранения заряда условию $I_0 = -\lambda \cdot \oint \nabla \varphi_0 \cdot d\vec{r}$, в котором интегрирование производится по бесконечно малой окружности с центром в точке O_0. Аналогично функции (8) удовлетворяют уравнению Лапласа и условиям $-I_k = -\lambda \cdot \int \nabla \varphi_k \cdot d\vec{r}$, в которых, однако, интегрирование производится по бесконечно малым полуокружностям с центрами в точках O_k (эти токи вытекают с диска).

Наконец, интегрируя уравнение (2) по замкнутой трехмерной области, охватывающей рассматриваемый нами диск, получим, что:

$$I_0 = \sum_{k=1}^{N} I_k. \tag{9}$$

Далее, для определения функции $\psi(\vec{r})$ перейдем к полярным координатам на плоскости (x, y): $x = r \cdot \cos\theta \quad y = r \cdot \sin\theta$. Уравнение Лапласа для функции $\psi(\vec{r})$ в этих координатах имеет вид [4, 2]:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (10), не имеющее особенностей в области Ω, хорошо известно [2]:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cdot [A_m \cdot \cos(m \cdot \theta) + B_m \cdot \sin(m \cdot \theta)], \tag{11}$$

где A_m и B_m – постоянные коэффициенты. Для их нахождения воспользуемся условием (4).

Перепишем формулу (6) в полярных координатах:

$$\varphi_s(r, \theta) = -\frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r}{a} + \sum_{k=1}^{N} \frac{I_k}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos(\theta - \theta_k)}{a^2}. \tag{12}$$

Приняв во внимание равенство (9), легко видеть, что $\left.\frac{\partial \varphi_s(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$, значит, вследствие условия (4) $\left.\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$ почти всюду. С другой стороны, дифференцируя ряд (11) по r почленно, получим:

$$\left.\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot a^{m-1} \cdot [A_m \cdot \cos(m \cdot \theta) + B_m \cdot \sin(m \cdot \theta)] = 0 \tag{13}$$

почти всюду, т. е. из формулы (13) следует [2, 3], что $A_m = 0$ и $B_m = 0$ при всех натуральных m.

Таким образом, в области Ω функция $\psi(r, \theta) \equiv 0$. В силу формулы (5) это означает, что потенциал рассматриваемой системы в области Ω совпадает с функцией (12):

$$\varphi(r, \theta) \equiv \varphi_s(r, \theta). \tag{14}$$

Используя известное разложение в ряд Фурье [3]:

$$\ln(1+\rho^2+2\cdot\rho\cdot\cos\theta)=2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{\rho^m}{m}\cdot\cos(m\cdot\theta),\ |\rho|<1, \tag{15}$$

получим для потенциала (14) следующее представление:

$$\varphi(r,\theta)=-\frac{I_0}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{r}{a}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m\cdot[a_m\cdot\cos(m\cdot\theta)+b_m\cdot\sin(m\cdot\theta)], \tag{16}$$

где $a_m=\frac{1}{\pi\cdot m\cdot\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{N}I_k\cdot\cos(m\cdot\theta_k)$ и $b_m=\frac{1}{\pi\cdot m\cdot\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{N}I_k\cdot\sin(m\cdot\theta_k)$.

В решении (16) остались неопределенными постоянные исходящие токи I_1, ..., I_N, связанные с входящим в диск током I_0 соотношением (9). Их можно просто измерить экспериментально, и тогда распределение потенциала по поверхности диска становится окончательно известным.

2. Точные решения для потенциала при выходных контактах в вершинах правильного N-угольника, вписанного в круг

Полностью определенное выражение для потенциала диска можно получить, если выбрать точки стока O_1, ..., O_N в вершинах правильного $N-$ угольника, т. е. положив в формуле (12) $\theta_k=\frac{2\cdot\pi\cdot(k-1)}{N}$ ($k=\overline{1,N}$). Тогда из соображений симметрии все токи, вытекающие с диска, будут одинаковы по величине и равны $I_k=\frac{I_0}{N}$. Таким образом, в этом случае потенциал диска есть:

$$\varphi_N(r,\theta)=-\frac{I_0}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{r}{a}+\frac{I_0}{2\cdot\pi\cdot\lambda\cdot N}\cdot\sum_{k=1}^{N}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}-2\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\left[\theta-\frac{2\cdot\pi\cdot(k-1)}{N}\right]\right). \tag{17}$$

Для $N=1$ (один контакт на краю диска) $\theta_1=0$, $I_1=I_0$, и распределение потенциала на проводящем диске согласно формуле (17) дается выражением:

$$\varphi_1(r,\theta)=\frac{I_0}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{r^2+a^2-2\cdot r\cdot a\cdot\cos\theta}{a\cdot r}. \tag{18}$$

Для $N=2$ (два диаметрально противоположных контакта на краях диска) $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$, $I_1=I_2=I_0/2$, и распределение потенциала равно:

$$\varphi_2(r,\theta)=\frac{I_0}{4\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{(r^2-a^2)^2+4\cdot a^2\cdot r^2\cdot\sin^2\theta}{a^2\cdot r^2}. \tag{19}$$

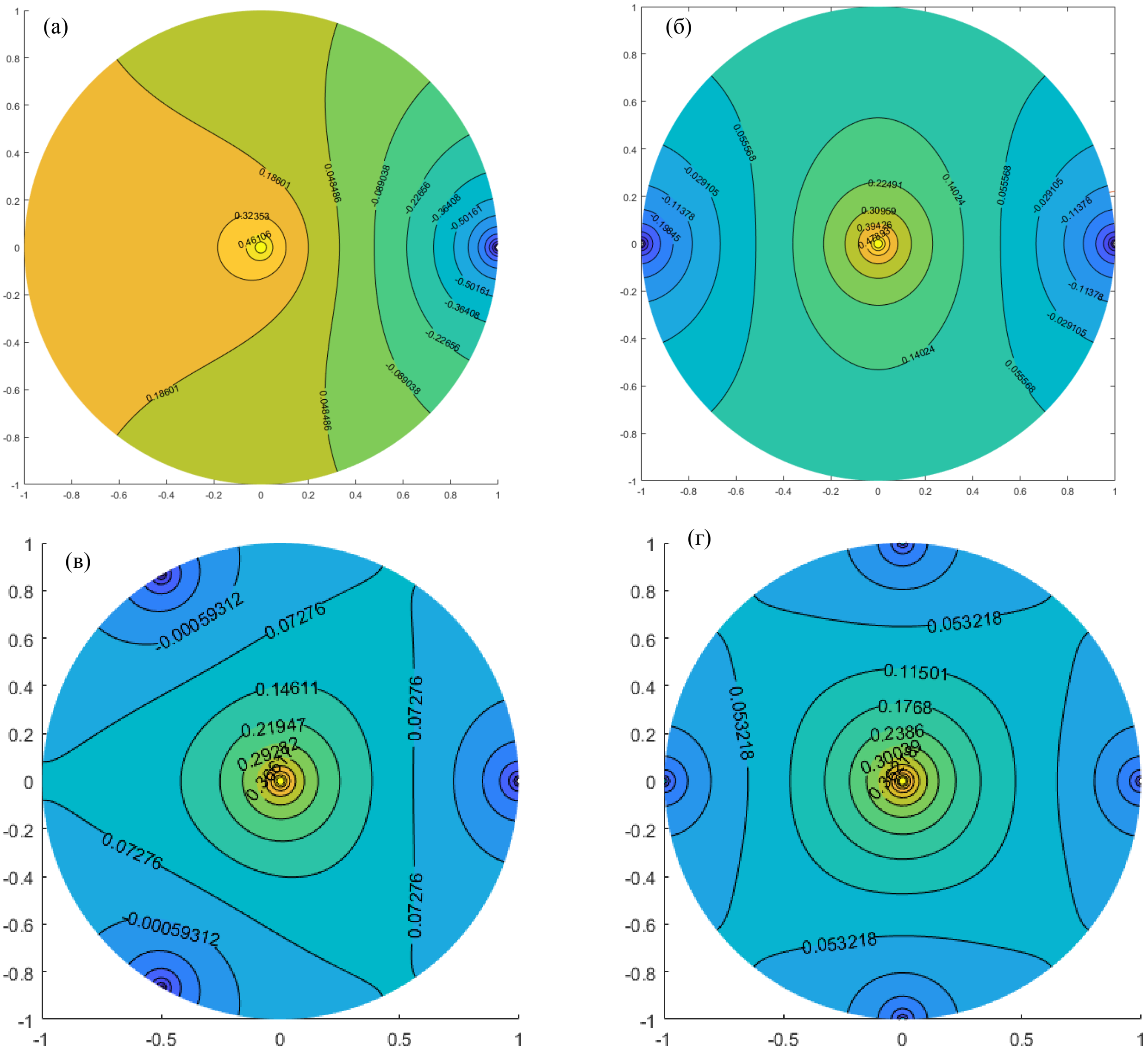
Для $N=3$ (три контакта в вершинах вписанного в $\partial\Omega$ равностороннего треугольника) $\theta_1=0$, $\theta_2=2\cdot\pi/3$, $\theta_3=4\cdot\pi/3$, $I_1=I_2=I_3=I_0/3$, и потенциал есть:

$$\begin{aligned}\varphi_3(r,\theta)=&-\frac{I_0}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{r}{a}+\frac{I_0}{6\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\left[\ln\frac{r^2+a^2-2\cdot a\cdot r\cdot\cos\theta}{a^2}+\right.\\&\left.+\ln\frac{r^2+a^2-2\cdot a\cdot r\cdot\cos(\theta-2\cdot\pi/3)}{a^2}+\ln\frac{r^2+a^2-2\cdot a\cdot r\cdot\cos(\theta+2\cdot\pi/3)}{a^2}\right].\end{aligned} \tag{20}$$

Для $N=4$ (четыре контакта в вершинах квадрата, вписанного в $\partial\Omega$) $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi/2$, $\theta_3=\pi$, $\theta_4=3\cdot\pi/2$, $I_1=I_2=I_3=I_4=I_0/4$, и потенциал равен:

$$\varphi_4(r,\theta)=\frac{I_0}{8\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\ln\frac{[(r^2-a^2)^2+4\cdot a^2\cdot r^2\cdot\sin^2\theta]\cdot[(r^2-a^2)^2+4\cdot a^2\cdot r^2\cdot\cos^2\theta]}{a^4\cdot r^4}. \quad (21)$$

Линии уровня функций (18)–(21) приведены на рисунке.



Эквипотенциальные линии, полученные в результате решения уравнения Лапласа для кругового диска: а) ток проходит через центральный контакт и один контакт на краю; б) ток растекается из центрального контакта к двум контактам по противоположным краям; в) когда ток растекается из центрального контакта к трем симметричным контактам по краям; г) ток растекается из центрального контакта к четырем симметричным контактам по краям

3. Измерение поверхностной проводимости при помощи зондовой микроскопии

Как уже было сказано во Введении, для нахождения распределения потенциала в плоском образце можно использовать сканирующую туннельную микроскопию, в частности многозондовую [7]. Ставя один из туннельных зондов в центр образца и пропуская через него ток, при этом устанавливая один или несколько других зондов по краям в качестве стоков и измеряя напряжение в любой точке еще одним зондом, можно проверять, насколько реальное распределение потенциала отличается от теоретически предсказанного. Таким образом можно судить о степени дефектности данного образца. Однако, несмотря на свою привлекательность, этот метод довольно трудно реализуем. Проще в реализации метод на основе сканирующей зондовой микроскопии, в режиме работы Кельвин [5]. К образцу по краям крепятся два токовых контакта, и распределение потенциала измеряется одним зондом в Кельвин-моде. Этот метод прост тем, что не требует наличия нескольких зондов, которые каждый по отдельности нужно подводить к образцу и получать хороший контакт. Конфигурации со стержнем в качестве токового контакта по центру круга представляют интерес в плане получения терагерцового излучения методом спиновой инжекции [1]. Совместив такую конструкцию со сканирующим зондовым микроскопом, можно исследовать не только распределение потенциала в Кельвин-моде, но также и магнитное строение ферромагнитного диска методом магнитно-силовой микроскопии [5].

Комбинирование результатов измерений электрического потенциала с помощью зондовой микроскопии на образцах рассмотренного типа и точных решений для потенциала на них дает возможность экспериментального определения поверхностной проводимости материала таких образцов.

Для этого введем на области Ω равномерную сетку в цилиндрических координатах: $r_i = \frac{a \cdot i}{I+1}$, $i = \overline{1, I}$ и $\theta_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{J}$, $j = \overline{1, J}$ [10] и выберем для сеточных функций следующую норму [10]:

$$\| f \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^2} \,. \qquad (22)$$

Измерение потенциала на образце дает сеточную функцию $\varphi_{ij}^{\exp}$.

С другой стороны, каждое из выражений (18)-(21) имеет функциональную структуру вида: $\varphi(r,\theta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \Phi(r,\theta)$, следовательно, вычислив на сетке значения функции $\Phi(r,\theta)$: $\Phi_{ij} = \Phi(r_i, \theta_j)$ и минимизировав значение нормы (22) для сеточной функции $\varphi^{\exp} - \frac{1}{\lambda} \cdot \Phi$, получим для поверхностного сопротивления образца, обратного его поверхностной проводимости, оценку:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\| \Phi \|^2} \cdot \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \varphi_{ij}^{\exp} \cdot \Phi_{ij} \,. \qquad (23)$$

Заключение

В представленной работе получены точные решения для уравнения Лапласа в круге, соответствующие электрическому току, входящему в центр круга и истекающего с него по системе контактов, расположенных в вершинах правильного N-угольника, вписанного в границу круга. Эти явные решения благодаря их простой форме в сочетании с методами зондовой микроскопии положены в основу серии новых методов измерения поверхностной проводимости тонких круговых образцов, альтернативных методу Ван-дер-Пау.

Список литературы

1. *Вилков Е. А.* и др. Генерация и регистрация спектров терагерцового диапазона частот источниками излучения на базе твердотельных микро- и наноструктур / Е. А. Вилков, И. Н. Дюжиков, С. В. Зайцев-Зотов, М. В. Логунов, С. А. Никитов, С. С. Сафонов, С. Г. Чигарев // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63. № 9. С. 935–965.

2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1967. 197 с.

3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа : учебник для студ. ун-тов и вузов : в 3 т. Т. 3. М. : Высш. шк., 1989. 352 с.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М. : Наука, 1982. 624 с.

5. *Миронов В. Л.* Основы сканирующей зондовой микроскопии : учеб. пособие для студ. старших курсов высш. учеб. завед. Н. Новгород : Ин-т физики микроструктур, 2004. 110 с.

6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 592 с.

7. *Lüpke F., Cuma D., Korte S., Cherepanov V., Voigtländer B.* Four-point probe measurements using current probes with voltage feedback to measure electric potentials. J. Phys. : Condens. Matter, 2018. Vol. 30. P. 054004.

8. *Mikhailov G. M., Fomin L. A., Rassadin A. E.* Diffraction model of the electronic transport in rough normal metal and ferromagnetic nanowires // «Микро- и наноэлектроника» : междунар. конф. 2018. С. 51.

9. *Van der Pauw L. J.* A method of measuring the resistivity and Hall coefficient on lamellae of arbitrary shape // Philips Technical review. 1958. Vol. 20. Pp. 220–224.

10. *Wenner F.* A method of measuring earth resistivity // Bull. Bur. Stand. 1915. № 12. P. 469.

New method of measuring surface conductivity of thin round samples as an alternative to the Van der Pauw method

A. E. Rassadin[1], L. A. Fomin[2]

[1]member of the Board, Nizhny Novgorod Mathematical Society, Russia, Nizhny Novgorod.
ORCID: 0000-0002-7396-0112. E-mail: brat_ras@list.ru
[2]PhD of physical and mathematical sciences, head of laboratory, Institute of Problems of Microelectronics Technology and High-purity Materials of RAS. Russia, Moscow region, Chernogolovka. E-mail: fomin@iptm.ru

Abstract. At present, the four-point electrical measurement scheme has a wide range of applications, including the characterization of metallic and semiconductor nanostructures. To characterize the electrical properties of films, it is customary to use the Van Der Pauw method. The paper proposes an alternative to this method for measuring the surface conductivity of samples in the form of circular disks. The basis of the new method is the new exact solution of the problem of the distribution of potential in such a sample.

Keywords: Van der Pauw method, microelectronics, electrical properties of nanostructures, scanning probe microscopy, separation of variables, Fourier series, Neumann problem.

References

1. *Vilkov E. A. et al Generaciya i registraciya spektrov teragercovogo diapazona chastot istochnikami izlucheniya na baze tverdotel'nyh mikro- i nanostruktur* [Generation and registration of spectra of the terahertz frequency range by sources of radiation on the basis of solid – state micro-and nanostructures] / E. A. Vilkov, I.N. Dyuzhikov, S. V. Zaitsev-Zotov, M. V. Logunov, S. A. Nikitov, S. S. Safonov, S. G. Chigarev // Radio engineering and electronics. 2018, vol. 63, No. 9, pp. 935–965.

2. *Vladimirov V. S. Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. M. Nauka. 1967. 197 p.

3. *Kudryavcev L. D. Kurs matematicheskogo analiza : uchebnik dlya stud. un-tov ivuzov : v 3 t. T. 3* [Course of mathematical analysis: textbook for students of universities and colleges: in 3 vol. Vol. 3]. M. Vyssh. Shk., 1989. 352 p.

4. *Landau L. D., Lifshic E. M. EHlektrodinamika sploshnyh sred* [Electrodynamics of continuous media]. M. Nauka. 1982. 624 p.

5. *Mironov V. L. Osnovy skaniruyushchej zondovoj mikroskopii : ucheb. posobie dlya stud. starshih kursov vyssh. ucheb. zaved.* [Fundamentals of scanning probe microscopy: tutorial manual for students of senior courses of higher schools]. N. Novgorod. Institute of Physics of Microstructures. 2004. 110 p.

6. *Samarskij A. A., Nikolaev E. S. Metody resheniya setochnyh uravnenij* [Methods of solving grid equations]. M. Nauka.1978. 592 p.

7. *Lüpke F., Cuma D., Korte S., Cherepanov V., Voigtländer B*. Four-point probe measurements using current probes with voltage feedback to measure electric potentials. J. Phys. : Condens. Matter, 2018. Vol. 30. P. 054004.

8. *Mikhailov G. M., Fomin L. A., Rassadin A. E.* Diffraction model of the electronic transport in rough normal metal and ferromagnetic nanowires // «Micro-and nanoelectronics»: international conf. – «Микро- и наноэлектроника»: междунар. конф. 2018. P. 51.

9. *Van der Pauw L. J*. A method of measuring the resistivity and Hall coefficient on lamellae of arbitrary shape // Philips Technical review. 1958. Vol. 20. Pp. 220–224.

10. *Wenner F*. A method of measuring earth resistivity // Bull. Bur. Stand. 1915. № 12. P. 469.

Научный журнал № 3 (2018)

16+

Научное издательство Вятского государственного университета,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964