ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК: 004.02 doi: 10.25730/VSU.0536.18.25

Об алгоритме нахождения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Д. В. Чупраков
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr10381@vyatsu.ru

Аннотация. В работе исследуются конечные циклические полукольца с полурешеточным сложением, лежащие в основе теории конечных циклических полуколец с некоммутативным идемпотентным сложением. Для исследования применены методы теории чисел, абстрактной алгебры и компьютерного моделирования. Центральным результатом статьи является оптимизированный алгоритм построения всех конечных циклических полуколец с полурешеточным умножением. Как пример работы алгоритма найдены все девятиэлементные циклические полукольца с полурешеточным сложением. Вычислено количество конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением вплоть до 50-го порядка. Выявлена экспоненциальная зависимость роста количества полуколец в зависимости от числа элементов.

Работа разделена на три параграфа. В параграфе «Введение и основные понятия» обозначена актуальность исследования, выполнен краткий обзор литературы, приведены базовые определения.

Параграф «Математические основания алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением» посвящен теоретическим свойствам конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, лежащим в основе алгоритма. Наконец, параграф «Алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением и результаты его применения» содержит основные результаты работы.

Ключевые слова: циклическое полукольцо, алгоритмическая теория чисел, SageMath.

Введение и основные понятия

Полукольцом называется алгебраическая структура S с ассоциативными операциями сложения «+» и умножения «−» и аксиомами дистрибутивности умножения относительно сложения с обеих сторон:

$$x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$$

Полукольцо S называется *полукольцом с полурешеточным сложением*, если операция сложения коммутативна и идемпотентна (т. е. $s + s = s$ для любого элемента $s \in S$). Полукольцо с единицей 1 называется *циклическим*, если все его (ненулевые) элементы являются целыми неотрицательными степенями некоторого элемента $\alpha \in S$, называемого образующим полукольца S, при этом $1 = \alpha^0$.

Важность исследования циклических полуколец определяется прикладной значимостью циклических структур (вспомним, например, классическую теорему о представлении конечных абелевых групп и теорию конечных полей), кроме того, Е. М. Вечтомовым и И. А. Лубягиной исследование конечных циклических полуколец с некоммутативным сложением сведено именно к конечным циклическим полукольцам с полурешеточным сложением и конечным циклическим полуполям.

Общая задача описания конечных циклических полуколец с коммутативным сложением сформулирована Е. М. Вечтомовым [3] в 2000 г. А. С. Бестужевым в статье [1] начато исследование конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением. В этой работе применен метод перебора по ширине полурешетки, определяющей операцию сложения, и описаны все конечные циклические полукольца, в которых операция сложения задана полурешеткой с шириной, не превосходящей 3. Отметим, что в работе А. С. Бестужева не выявлено общего свойства, позволяющего автоматизировать поиск конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением. Решение этой задачи впервые получено в работе А. В. Ведерниковой и Д. В. Чупракова [2] путем представления конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением через идеалы целых неотрицательных чисел. В докладе [7] изложен алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, основанный на переборе всевозможных базисов идеалов полукольца целых неотрицательных чисел с последующим восстановлением по ним конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, вычислено количество КИЦП с числом элементов, не превосходящим 16. Однако алгоритм, предложенный в этом докладе, является крайне неэффективным, так как сводится к сплошной проверке всех подмножеств отрезка целых неотрицательных чисел $\{0,1,\dots,n\}$.

Свойства, позволяющие эффективно отсеивать неподходящие подмножества, изложены в работе Д. В. Чупракова и А. В. Ведерниковой [2] и докладах Д. В. Чупракова [5; 7], в частности вычислено количество элементов конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, заданных двухпорожденными идеалами полукольца целых неотрицательных чисел. Д. В. Чупраковым также получен общий вид таких полуколец.

В настоящей статье описан алгоритм, нахождения всех конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением, основанный на результатах работ [5; 6; 7].

Математические основания алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Операция умножения в циклическом полукольце $S=\{1,\alpha,\alpha^2,\dots,\alpha^n\}$ однозначно определена циклическим свойством. Поэтому (n+1)-элементное циклическое полукольцо определяется своей аддитивной операцией.

Так, конечное (n+1)-элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением и образующим α однозначно задается (n+1)-элементным кортежем

$$(p_0,p_1,\dots,p_n)\in\{0,1,\dots,n\}^{n+1}, \text{ где } 1+\alpha^i=\alpha^{p_i}. \qquad (*)$$

При этом для любого $i\in\{0,1,\dots,n\}$ справедливо неравенство $p_i\geq i$ (см. [2]). Отметим также, что α^n – поглощающий элемент полукольца S. По кортежу (*) восстанавливается таблица Кэли аддитивной операции полукольца S следующим образом:

$$\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{max\,\{i+p_{j-i},n\}} \text{ для любых } i\leq j\leq n.$$

Множество элементов $I=\{p_0,p_1,\dots,p_n\}$ кортежа (*) является идеалом [2] полукольца $\langle\{0,1,\dots,n\},\oplus,\otimes\rangle$ с аддитивной операцией

$$b\oplus c=\min\{b+c,n\}, b,c\in\{0,1,\dots,n\}$$

и мультипликативной операцией

$$b\otimes c=\min\{bc,n\}, b,c\in\{0,1,\dots,n\}.$$

Идеал I конечен и, значит, имеет *базис,* т. е. множество $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}\subseteq I$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) любой элемент $b\in I$ выражается через элементы $g_1,g_2,\dots,g_l$:

$$b=(k_1\otimes g_1)\oplus(k_2\otimes g_2)\oplus\dots\oplus(k_l\otimes g_l),\ \ k_1,k_2,\dots,k_l\in\{0,1,\dots,n\};$$

2) никакой элемент базиса G нельзя представить в виде комбинации остальных элементов системы с коэффициентами из множества $\{0,1,\dots,n\}$.

Ясно, что идеалу I однозначно соответствует идеал $J=\langle g_1,g_2,\dots,g_l\rangle$ целых неотрицательных чисел с базисом $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$. Будем говорить, что аддитивная операция полукольца S задана *идеалом G.*

Сказанное позволяет использовать кортеж (*) как представление конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, а для удобства поиска полуколец оперировать базисом $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$.

Известно [6], что для фиксированного количества элементов $N=n+1$ множеству $G=\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$ соответствует не более одного (n+1)-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением, однако каждому базису $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ некоторого идеала полукольца целых неотрицательных чисел может соответствовать несколько циклических полуколец с полурешеточным сложением, имеющих общие свойства и различимых только числом элементов.

Отсюда могут быть выделены две задачи построения конечных полуколец с полурешеточным сложением:

1. По заданному базису G идеала I полукольца целых неотрицательных чисел найти число элементов N полуколец с полурешеточным сложением, заданным этим идеалом I.

2. По известному числу элементов N и идеалу I полукольца целых неотрицательных чисел, задающему аддитивную операцию N-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением, восстановить кортеж (*).

3. По заданному числу элементов N найти всевозможные базисы идеалов полукольца целых неотрицательных чисел, задающих аддитивную операцию хотя бы одного N-элементного циклического полукольца с полурешеточным сложением.

Решение первой задачи для произвольного идеала I полукольца целых неотрицательных чисел опирается на следующее утверждение:

Утверждение 1. ([2]). *Пусть I – идеал полукольца целых неотрицательных чисел с базисом $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$. ($n$+1)-элементное циклического полукольца с полурешеточным сложением существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\min G < n \le \min \bigcup_{k=1}^{m-1} (I \cap I_k) \backslash I_{\min(I \cap I_k)}.$$

В случае, когда идеал I полукольца целых неотрицательных чисел порожден базисом $G = \{g_1, g_2\}$, число элементов полукольца может быть найдено явно:

Утверждение 2 ([6,7]). *Пусть $I = \langle g_1, g_2 \rangle$ – идеал полукольца целых неотрицательных чисел, $g_1 < g_2$ и $d = (g_1, g_2)$. Для каждого натурального числа k, удовлетворяющего неравенству*

$$g_2 < k \le \frac{g_1 g_2}{d} + \min\{t^-_{g_1,g_2} : t = dt' < g_1, t' \in \mathbb{N}\}, \qquad (**)$$

где $t = t^+_{g_1,g_2} + t^-_{g_1,g_2}$, $-\frac{g_1 g_2}{2} \le t^-_{g_1,g_2} \le 0 \le t^+_{g_1,g_2} \le \frac{g_1 g_2}{2}$ существует единственное циклическое (k+1)-элементное полукольцо с полурешеточным сложением, заданным с идеалом I.

Метод решения второй задачи опирается на следующее утверждение:

Утверждение 3. Если $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_l \rangle$ *– идеал полукольца целых неотрицательных чисел, определяющий аддитивную операцию (n+1)-элементного полукольца S с полурешеточным сложением и $d = (g_1, g_2, \dots, g_l)$, то полукольцо S представимо кортежем (*), для которого справедливы следующие свойства:*

1) $p_k = \min(I \cap I_k)$ *для каждого* $k \in \{0,1,\dots,n\}$, *где* $I_k = I + k = \{i \oplus k : i \in I\}$ [5];

2) $p_k = k$ *для каждого* $k \in I \cap \{0,1,\dots,n\}$ [2];

3) $p_k = n$, *если k не делится на d* [6];

4) если $p_k \ne n$, *то* p_k *делится на d* [6].

Здесь свойство 1 определяет общий алгоритм восстановления кортежа (*), а свойства 2)–4) позволяют в частных случаях сократить вычисления.

Наконец, для сокращения перебора возможных базисов $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ используются следующие факты:

Утверждение 4 ([7]). *Пусть $(n+1)$-элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением задано кортежем $(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \{0,1,\dots,n\}^{n+1}$. Тогда кортеж $(q_0, q_1, \dots, q_{dn}) \in \{0,1,\dots,dn\}^{dn+1}$, где $q_k = dn$ для всех индексов $k \in \{0,1,\dots,dn\}$, не кратных d, и $q_{dt} = dp_t$ для всех $t \in \{0,1,\dots,n\}$, определяет $(dn+1)$-элементное циклическое полукольцо с полурешеточным сложением.*

Утверждение 5 ([7]). Пусть *I' – идеал полукольца целых неотрицательных чисел и S – циклическое полукольцо с полурешеточным сложением, заданным идеалом $J = dJ' = \{dj : j \in J'\}$, тогда S содержит подполукольцо, изоморфное S' с полурешеточным сложением, заданным J.*

Утверждение 6 ([6]). *Если идеал I полукольца целых неотрицательных чисел задает полурешеточную операцию сложения конечного циклического полукольца, то все попарные разности его базисных элементов различны.*

Алгоритм построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением и результаты его применения.

Опишем структуру алгоритма построения конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением.

Вход: число N – количество элементов конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением.

Выход: Список всех групп циклических полуколец, число элементов которых не превосходит $N+1$ в виде упорядоченных троек (G, L, C), где G – базис полукольца, задающего аддитивную операцию, L – кортеж (*), определяющий полукольцо с полурешеточной операцией, заданной идеалом полукольца целых неотрицательных чисел, порожденным базисом G с числом элементов, не превосходящим $N+1$, количество таких полуколец.

Шаг 1. Построение кортежей (*), соответствующих главным идеалам полукольца целых неотрицательных чисел.

Шаг 2. Нахождение всех допустимых базисов: таких подмножеств $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$ множества $\{2,3, \ldots, n-1\}$, элементы которых удовлетворяют всем следующим свойствам:

1) $l \geq 2$;
2) числа $g_1, g_2, \ldots, g_l$ линейно независимы;
3) $(g_1, g_2, \ldots, g_l) = 1$;
4) все попарные разности чисел $g_1, g_2, \ldots, g_l$ различны.

Шаг 3. Для каждого найденного допустимого базиса $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$ вычисление максимального числа элементов конечного циклического полукольца с полурешеточным сложением, заданным идеалом $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_l \rangle$, и проверка неравенства (**).

Шаг 4. Восстановление по базисам $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$ кортежей (*) опираясь на свойства 1), 2) утверждения 3.

Шаг 5. Построение кортежей (*), соответствующих идеалам с базисами $G_d = \{dg_1, dg_2, \ldots, dg_l\}$, по кортежам, соответствующим базисам $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$, опираясь на свойства 3), 4) утверждения 3.

Конец алгоритма

Описанный алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры SageMath.

В качестве демонстрации работы алгоритма в табл. 1 приведены все кортежи (*), задающие полурешеточную операцию 9-элементных полуколец. Отметим, что это полукольца наименьшей мощности, среди которых встречаются циклические полукольца, полурешеточное сложение которых задано трехпорожденным идеалом.

Таблица 1

Строение 9-элементных циклических полуколец с полурешеточным сложением

Базис	Кортеж показателей p_i, удовлетворяющий равенству $1+\alpha^i=\alpha^{p_i}$	Базис	Кортеж показателей p_i, удовлетворяющий равенству $1+\alpha^i=\alpha^{p_i}$
(1)	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	(3, 5)	(0, 6, 5, 3, 8, 5, 6, 8, 8)
(2)	(0, 8, 2, 8, 4, 8, 6, 8, 8)	(3, 7)	(0, 7, 8, 3, 7, 8, 6, 7, 8)
(3)	(0, 8, 8, 3, 8, 8, 6, 8, 8)	(4, 5)	(0, 5, 8, 8, 4, 5, 8, 8, 8)
(4)	(0, 8, 8, 8, 4, 8, 8, 8, 8)	(4, 6)	(0, 8, 6, 8, 4, 8, 6, 8, 8)
(5)	(0, 8, 8, 8, 8, 5, 8, 8, 8)	(4, 7)	(0, 8, 8, 7, 4, 8, 8, 7, 8)
(6)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 6, 8, 8)	(5, 6)	(0, 6, 8, 8, 8, 5, 6, 8, 8)
(7)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 7, 8)	(5, 7)	(0, 8, 7, 8, 8, 5, 8, 7, 8)
(8)	(0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)	(6, 7)	(0, 7, 8, 8, 8, 8, 6, 7, 8)
(2, 7)	(0, 7, 2, 7, 4, 7, 6, 7, 8)	(4, 5, 7)	(0, 5, 7, 7, 4, 5, 8, 7, 8)
(3, 4)	(0, 4, 6, 3, 4, 8, 6, 7, 8)	(4, 6, 7)	(0, 7, 6, 7, 4, 8, 6, 7, 8)

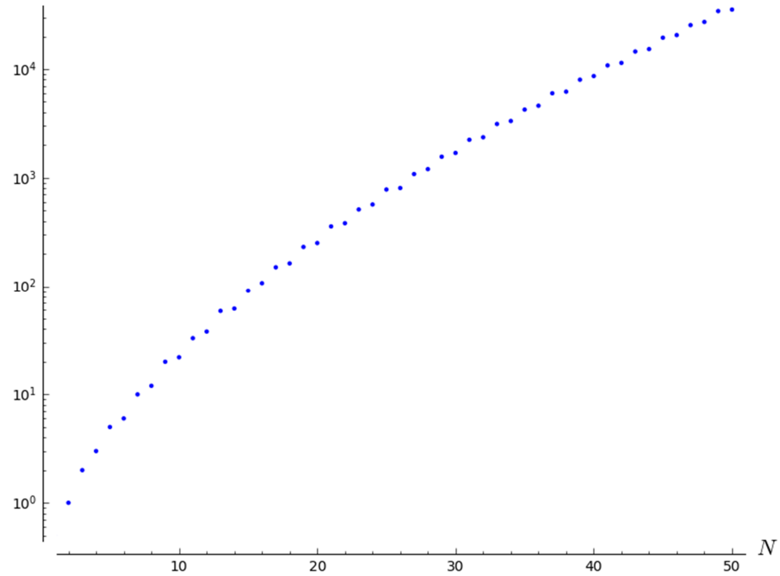
В табл. 2 приведено количество конечных циклических полуколец с полурешеточным сложением в зависимости от числа элементов N и мощности базиса $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$ идеала целых неотрицательных чисел, задающего операцию сложения.

Таблица 2

Количество циклических полуколец с полурешеточным сложением

Число элементов	**Мощность базиса идеала *G***						**Количество полуколец**
	1	2	3	4	5	6	
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	1
3	2	0	0	0	0	0	2
4	3	0	0	0	0	0	3
5	4	1	0	0	0	0	5
6	5	1	0	0	0	0	6
7	6	4	0	0	0	0	10
8	7	5	0	0	0	0	12
9	8	10	2	0	0	0	20
10	9	11	2	0	0	0	22
11	10	17	6	0	0	0	33
12	11	21	6	0	0	0	38
13	12	30	17	0	0	0	59
14	13	32	17	0	0	0	62
15	14	43	32	2	0	0	91
16	15	51	39	2	0	0	107
17	16	62	62	10	0	0	150
18	17	67	69	10	0	0	163
19	18	82	105	26	0	0	231
20	19	91	115	26	0	0	251
21	20	108	169	60	0	0	357
22	21	116	182	63	0	0	382
23	22	132	241	116	0	0	511
24	23	148	275	122	0	0	568
25	24	169	369	214	4	0	780
26	25	175	379	222	4	0	805
27	26	197	482	355	22	0	1082
28	27	217	540	395	22	0	1201
29	28	239	662	565	68	0	1562
30	29	255	726	614	68	0	1692
31	30	282	890	879	156	0	2237
32	31	300	934	937	157	0	2359
33	32	329	1134	1311	320	0	3126
34	33	345	1212	1419	320	0	3329
35	34	373	1419	1821	592	0	4239
36	35	401	1557	2005	602	0	4600
37	36	432	1808	2672	1036	8	5992
38	37	448	1884	2771	1049	8	6197
39	38	483	2187	3574	1680	24	7986
40	39	515	2386	3915	1746	24	8625
41	40	549	2703	4760	2675	80	10807
42	41	568	2819	5109	2782	80	11399
43	42	607	3216	6361	4074	206	14506
44	43	634	3385	6746	4254	206	15268
45	44	675	3839	8303	6069	504	19434
46	45	706	4082	8845	6355	504	20537
47	46	745	4508	10401	8668	1004	25372
48	47	785	4847	11291	9161	1004	27135
49	48	830	5415	13582	12372	1913	34160
50	49	850	5562	14006	12884	1915	35266

Следующий график (рисунок), демонстрирующий рост числа полуколец с увеличением количества элементов в них, позволяет сформулировать гипотезу о экспоненциальной скорости роста числа полуколец.



Зависимость числа циклических полуколец с полурешеточным сложением от количества элементов в них

Список литературы

1. *Бестужев А. С.* Конечные идемпотентные циклические полукольца // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 71–78.
2. *Ведерникова А. В., Чупраков Д. В.* О представлении конечных идемпотентных циклических полуколец кортежами целых чисел // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19. С. 70–76.
3. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца. Киров : ВГПУ, 2000. 44 с.
4. *Вечтомов Е. М., Лубягина (Орлова) И. В.* Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. № 6. С. 17–41.
5. *Вечтомов Е. М., Орлова И. В., Чупраков Д. В.* К теории мультипликативно циклических полуколец // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, 29 мая 2018 г. Тула : ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018 С. 136–138.
6. *Чупраков Д. В., Ведерникова А. В.* О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика, механика, информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 92–107.
7. *Чупраков Д. В.* Конечные циклические полукольца с коммутативным идемпотентным сложением, ассоциированные с двухпорожденными идеалами полукольца натуральных чисел // Математическое моделирование и информационные технологии : сб. ст. Междунар. науч. конф. (10–11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар). Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. С. 148–152.
8. *Chuprakov D. V.* Algorithm for constructing finite idempotent cyclic semirings with commutative addition // Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4'2017. June 28 – July 2. Chisinau, 2017. Pp. 59–62.

On the algorithm for finding finite cyclic semirings with semi-lattice addition

D. V. Chuprakov

PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr10381@vyatsu.ru

Abstract. In the article we study finite cyclic semirings with semi-lattice addition, which are the basis of the theory of finite cyclic semirings with noncommutative idempotent addition. Methods of number theory, abstract algebra and computer modeling are applied for the research. The central result of the paper is an optimized algorithm for constructing all finite cyclic semirings with semi-lattice multiplication. As an example of the algorithm, all nine-element cyclic semirings with semi-lattice addition are found. The number of finite cyclic semirings with semi-lattice addition up to the 50th order is calculated. The exponential dependence of the growth of the number of half-rings depending on the number of elements is revealed.

The work is divided into three paragraphs. The paragraph «Introduction and basic concepts» indicates the relevance of the study, a brief review of the literature, the basic definitions.

The section «Mathematical foundations of the algorithm for constructing finite cyclic semirings with semi-lattice addition» is devoted to the theoretical properties of finite cyclic semirings with semi-lattice addition underlying the algorithm. Finally, the paragraph «Algorithm for constructing finite cyclic semirings with semi-lattice addition and the results of its application» contains the main results of the work.

Keywords: cyclic semicircle, algorithmic number theory, SageMath.

References

1. *Bestuzhev A. S. Konechnye idempotentnye ciklicheskie polukol'ca* [Finite cyclic idempotent semirings] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2011, iss. 13, pp. 71–78.

2. *Vedernikova A. V., CHuprakov D. V. O predstavlenii konechnyh idempotentnyh ciklicheskih polukolec kortezhami celyh chisel* [On representation of a finite idempotent semirings of cyclic tuples of integers] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2017, iss. 19, pp. 70–76.

3. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca* [Introduction to semiring]. Kirov. VSPU. 2000. 44 p.

4. *Vechtomov E. M., Lubyagina (Orlova) I. V. Ciklicheskie polukol'ca s idempotentnym nekommutativnym* [Cyclic semiring with the idempotent noncommutative] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2015, vol. 20, No. 6, pp. 17–41.

5. *Vechtomov E. M., Orlova I. V., CHuprakov D. V. K teorii mul'tiplikativno ciklicheskih polukolec* [On the theory of multiplicative cyclic semirings] // *XV Mezhdunarodnaya konferenciya «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya», posvyashchennaya stoletiyu so dnya rozhdeniya professora Nikolaya Mihajlovicha Korobova, 29 maya 2018 g. Tula : TGPU im. L. N. Tolstogo* – XV international conference «Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications», dedicated to the centenary of the birth of professor Nikolai Mikhailovich Korobov, May 29, 2018. Tula. TSPU n.a. L. N. Tolstoy. 2018. Pp. 136–138.

6. *CHuprakov D. V., Vedernikova A. V. O strukture konechnyh ciklicheskih polukolec s idempotentnym kommutativnym slozheniem* [The structure of a finite cyclic semirings with idempotent commutative addition] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika, mekhanika, informatika* – Herald of Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics, mechanics, computer science. 2017, iss. 2 (23), pp. 92–107.

7. *CHuprakov D. V. Konechnye ciklicheskie polukol'ca s kommutativnym idempotentnym slozheniem, associirovannye s dvuxporozhdennymi idealami polukol'ca natural'nyh chisel* [Finite cyclic semirings with commutative idempotent addition associated with two-generated ideals of the semirings of natural numbers] // *Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tekhnologii: sb. st. Mezhdunar. nauch. konf. (10–11 noyabrya 2017 g., g. Syktyvkar)* – Mathematical modeling and information technologies: coll. art. of scientific conf. (10-11 November 2017, Syktyvkar). Syktyvkar. Publishing house of SSU n.a. Pitirim Sorokin. 2017. Pp. 148–152.

8. *Chuprakov D. V. Algorithm for constructing finite idempotent cyclic semirings with commutative addition* [Algorithm for constructing cyclic finite idempotent semirings with commutative addition] // *Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4'2017. June 28 – July 2-* Proceedings of the 4th Conference of Mathematical Society of Moldova CMSM4 in 2017. June 28-July 2. Chisinau. 2017. Pp. 59–62.