УДК 512.556 doi: 10.25730/VSU.0536.18.21

Частичные кольца непрерывных [–1, 1]-значных функций

О. В. Кузнецова[1], Е. Н. Лубягина[2]
[1]магистрант, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
E-mail: olga83kuz@gmail.com
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г Киров.
ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена теории колец непрерывных функций на топологических пространствах. В качестве множества значений функций выбран числовой отрезок $E = [-1,1]$ с обычной операцией умножения ·, частичной (не всюду определенной) операцией сложения $+$ и со стандартной топологией. Частичные кольца $C(X,E)$ всех непрерывных *E*-значных функций на топологических пространствах по своим свойствам схожи с кольцами $C(X) = C(X,R)$ непрерывных действительнозначных функций на X.

В статье рассмотрены некоторые свойства частичных колец $C(X,E)$, показано, что максимальными идеалами частичного кольца $C(X,E)$ являются в точности идеалы M_x по всевозможным точкам x компакта X, выявлена двойственность категории частичных колец $C(X,[-1,1])$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1, и категории всех компактов X с их непрерывными отображениями.

Тематика, рассмотренная в статье, допускает дальнейшее исследование.

Ключевые слова: частичное полукольцо непрерывных функций, компакт, максимальный идеал, гомоморфизм.

Через $C(X,S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, со значениями в топологическом полукольце S с определенными поточечно операциями над функциями.

В качестве множества значений функций возьмем числовой отрезок $E = [-1,1]$ с обычной операцией умножения··, частичной (не всюду определенной) операцией сложения $+$ и со стандартной топологией. Получим частичные кольца $C(X,E)$, которые по своим свойствам схожи с кольцами $C(X) = C(X,R)$ непрерывных действительнозначных функций на топологических пространствах X. С классической теорией колец $C(X)$ можно познакомится в работах [1; 4]. О частичных кольцах говорится в [3].

Заметим, что в отличие от колец $C(X)$ обратимыми элементами в частичных кольцах $C(X,E)$ являются только константы ± 1.

Зададим в частичном кольце $C(X,E)$ отношение $\leq$ и отношение $\vdots$:

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ для любых } x \in X;$$

$$f \vdots g \Leftrightarrow \text{найдется такая функция } h \in C(X,E), \text{ что } f=gh.$$

Предложение 1. *Пусть* X *– произвольное топологическое пространство, а* f, g *– любые функции из* $C(X,E)$*. Тогда* $|f| \leq g^2$ *влечет* $f \vdots g$.

Доказательство. Действительно, пусть $h(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in Z(g); \\ f(x)/g(x), \text{ если } x \in coz\ g. \end{cases}$

Множество $coz\ g$ является открытым, и на нем функция h непрерывна. Возьмем $x_0 \in Z(g)$. Рассмотрим окрестность $U = \{x \in X : g(x) < \varepsilon\}$ точки x_0 для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$. Так как $|f| \leq g^2$, то $h(x) = f(x)/g(x) \leq g(x) < \varepsilon$ для любого $x \in U$. Значит, функция h непрерывна и в любой точке из $Z(g)$. Получили, что $h \in C(X,E)$ и $f = gh$.

Известно, что любому топологическому пространству Z соответствует компакт X (то есть компактное хаусдорфово пространство), такой, что полукольца $C(Z,S)$ и $C(X,S)$ канонически изоморфны. Действительно, построим фактор-множество $\tau Z = Z/\sim$ по следующему отношению эквивалентности $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ для любой функции } f \in C(Z,S).$$

На τZ зададим наименьшую топологию, относительно которой будут непрерывны все функции $\bar{f} : \tau Z \to S$, где $f \in C(Z,S)$ и $\bar{f}\left(\tilde{x}\right) = f(x)$ для всех $x \in Z$. Тогда $C(Z,E) \cong C(\tau Z,E)$. Построенное пространство τZ тихоновское (то есть вполне регулярное хаусдорфово). Значит, для τZ существует стоун-чеховская компактификация $\beta\tau Z = X$, такая, что $C(X,E) \cong C(\tau Z,E) \cong C(Z,E)$.

Далее при изучении частичных колец $C(X,E)$ мы можем ограничиться компактами X.

По теореме Вейерштрасса непрерывные на компакте действительнозначные функции ограничены и принимают свои наибольшие и наименьшие значения. Тогда любой функции $f \in C(X,E)$, не обращающейся в 0 на X, можно сопоставить натуральные числа $n_f = \inf\left\{ n_i \in \mathrm{N} : |f| \geq \frac{1}{n_i} \right\}$, такие, что

$$f^* = \frac{1}{n_f} f^{-1} \in C(X,E) \text{ и } f \cdot f^* = \frac{1}{n_f}.$$

Предложение 2. *Если идеал J частичного кольца $C(X,E)$ содержит функцию, не обращающуюся в* 0 *на X, то $J = C(X,E)$.*

Доказательство. Пусть $f \in J$ и $f \neq 0$ на X. Тогда $f\left(\frac{1}{n_f} f^{-1}\right) = \frac{1}{n_f} \in J$ и $\sum_{1}^{n_f} \frac{1}{n_f} = 1 \in J$. Следовательно, $J = C(X,E)$.

Лемма 1. *Если идеал J частичного кольца $C(X,E)$ содержит функцию g, $g(x) \neq 0$ в некоторой точке x компакта X, то J содержит неотрицательную функцию $h, h(x) \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим $g(x) = a \neq 0$. Поскольку вместе с g в J лежит и функция $-g$, для которой $-g(x) = -a$, то можем считать, что $1 \geq a > 0$. Тогда $1 \geq g > 0$ на некоторой окрестности U точки x. Так как пространство X тихоновское, то существует функция $f \in C(X,[0,1])$, для которой $f(x) = 1$ и $f(X \backslash U) = 0$. Получаем: $fg(x) \neq 0$, $0 \leq fg(U) \leq 1$, $fg(X \backslash U) = 0$ и $fg \in J$.

Рассмотрим идеалы $M_x = \{ f \in C(X,E) : f(x) = 0 \}$ частичного полукольца $C(X,E)$, определяемые произвольными точками $x \in X$. Как в кольцах $C(X)$ и в полукольцах $C^+(X)$, так и в частичных кольцах $C(X,E)$ верно следующее утверждение:

Теорема 1. *Максимальными идеалами частичного кольца $C(X,E)$ являются в точности идеалы M_x по всевозможным точкам x компакта X.*

Доказательство. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим идеал M_x частичного кольца $C(X,E)$.

Пусть найдется такой идеал J в частичном кольце $C(X,E)$, что $M_x \subset J$. Покажем, что $J = C(X,E)$. Для функции $g \in J \backslash M_x$ обозначим $g(x) = a \neq 0$. По лемме 1 можем считать, что

$g \geq 0$ и $1 \geq a > 0$. Тогда $1 \geq g > 0$ на некоторой окрестности U точки x. Так как пространство X тихоновское, то существует функция $f \in C(X,[0,1])$, для которой $f(x)=0$ и $f(X \setminus U)=1$. Для функций $f_1 = \frac{1}{2} f$ и $g_1 = \frac{1}{2} g$ получаем: $f_1 \in M_x \subset J$, $g_1 \in J$, $0 \leq f_1 \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq g_1 \leq \frac{1}{2}$, $f_1(X \setminus U) = \frac{1}{2}$, $0 < g_1(U) \leq \frac{1}{2}$. Получаем $0 < (f_1 + g_1)(U) \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq (f_1 + g_1)(X \setminus U) \leq 1$ и $f_1 + g_1 \in J$. По предложению 2 $J = C(X,E)$.

Покажем, что любой собственный идеал J содержится в M_x для некоторой точки $x \in X$. Пусть это не так. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется функция $f_x \in J$, $f_x(x) > 0$. По лемме 1 можем считать функцию $f_x \in J$ неотрицательной. Получаем, что $f_x(x) > 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Из открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X выберем конечное подпокрытие U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_k}. Получаем, что $\frac{1}{k}\left(f_{x_1} + f_{x_2} + \ldots + f_{x_k}\right) = f \in J$, причем $f > 0$ на X. Значит, $J = C(X,E)$, противоречие. Значит, $J \subseteq M_x$.

Итак, M_x исчерпывают все максимальные идеалы частичного кольца $C(X,E)$.

Получаем, что единственным собственным идеалом частичного кольца $[-1,1]$ будет нулевой идеал.

Каждому идеалу J частичного кольца $C(X,E)$ соответствует *идеальная конгруэнция* $\rho(J)$:

$$f\rho(J)g \Leftrightarrow f - g \in J \text{ для любых } f,g \in C(X,E).$$

Обратно, любой конгруэнции ρ на $C(X,E)$ соответствует идеал

$$J(\rho) = \{f - g \in C(X,I) : f,g \in C(X,E), f\rho g\}.$$

Предложение 3. *В $C(X,E)$ все конгруэнции являются идеальными. Для любой конгруэнции σ имеем $\sigma = \rho(J(\sigma))$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную конгруэнцию σ на $C(X,E)$. Включение $\sigma \subseteq \rho(J(\sigma))$ очевидно. Покажем, что $\sigma \supseteq \rho(J(\sigma))$. Пусть для функций $f,g \in C(X,E)$ выполняется $f\rho(J(\sigma))g$. Тогда $f - g \in J(\sigma)$ и $f - g = h - q$, $h,q \in C(X,E)$, $h\sigma q$. Получаем, что $f + q = h + g$ и $\left(\frac{f+q}{3} + \frac{h}{3}\right)\sigma\left(\frac{h+g}{3} + \frac{q}{3}\right)$. Значит, $\frac{f}{3} + \frac{f}{3} + \frac{f}{3} \sigma \frac{g}{3} + \frac{g}{3} + \frac{g}{3} \Rightarrow f\sigma g$.

Для произвольного отображения $\varphi : Y \to X$ рассмотрим отображение α_φ: $C(X,E) \to C(Y,E)$, такое, что $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ – композиция отображений φ и f для любой функции $f \in C(X,E)$:

$$\alpha_\varphi(f)(y) = f(\varphi(y)) \text{ для любых } f \in C(X,E) \text{ и } y \in Y.$$

Предложение 4. *Любой гомоморфизм $\alpha : C(X,E) \to C(Y,E)$ частичных колец, сохраняющий* 1 ($\alpha(1)=1$), *имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$. Если α – изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть дан гомоморфизм $\alpha : C(X,E) \to C(Y,E)$, $\alpha(1)=1$. Для произвольной неотрицательной функции $f \in C(X,E)$ имеем $\alpha(f) = \alpha(\sqrt{f})\alpha(\sqrt{f}) \geq 0$. Обратно, если α – изоморфизм, то для произвольной неотрицательной функции $g \in C(Y,E)$, $g = \sqrt{g}\sqrt{g}$, найдется такая функция $h \in C(X,E)$, что $\alpha(h) = \sqrt{g}$ и $\alpha(h^2) = \alpha(h)\alpha(h) = g \geq 0$.

Рассмотрим гомоморфизм частичных полуколец $\alpha|_I : C(X,[0,1]) \to C(Y,[0,1])$, такой, что $\alpha|_I(f) = \alpha(f)$ для произвольной функции $f \in C(X,[0,1])$. Если α – изоморфизм, то и $\alpha|_I$ – изоморфизм. В [2, предложение 23] показано, что любой такой гомоморфизм α, $\alpha(1)=1$, имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$. Если α – изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.

Получаем, что $\alpha|_I(f)(y) = f(\varphi(y))$ для любых $f \in C(X,[0,1])$, $y \in Y$. В частности, $\alpha(c)(y) = \alpha|_I(c)(y) = c$ для любой неотрицательной константы $c \in C(X,E)$. Тогда для любой функции $g \in C(X,E)$ получаем $\frac{1}{2}\alpha(g) + \frac{1}{2} = \alpha\left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(y) = \alpha|_I\left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(y) = \left(\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\right)(\varphi(y)) = \frac{g(\varphi(y))}{2} + \frac{1}{2}$. Значит, $\alpha(g)(y) = g(\varphi(y))$ и $\alpha = \alpha_\varphi$.

Отображение $\pi_x : C(X,E) \to E$, такое, что $\pi_x(f) = f(x)$ для любой функции $f \in C(X,E)$, называется *вычислением в точке* $x \in X$. Получаем, что для $Y = \{y\}$, $\alpha : C(X,E) \to E$ является вычислением в точке $y \in X$.

Обозначим через K категорию всех компактов X и их непрерывных отображений φ, а через C – категорию всех частичных колец $C(X,E)$ и их гомоморфизмов α, сохраняющих единицу. Для любых непрерывных отображений $\psi : Z \to Y$ и $\varphi : Y \to X$ имеем, что $\alpha_{\varphi\circ\psi} = \alpha_\psi \circ \alpha_\varphi$. Поэтому соответствие F, такое, что $F(X) = C(X,E)$ и $F(\varphi) = \alpha_\varphi$ для любых компактов X и непрерывных отображений $\varphi : Y \to X$, является контравариантным функтором из категории K в категорию C. По предложению 3 функтор F устанавливает антиэквивалентность между категориями K и C; говорят также, что эти категории двойственны друг другу.

Теорема 2. *Категория частичных колец $C(X,[-1,1])$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1, двойственна категории всех компактов X и их непрерывных отображений*.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы : учеб. пособие. М. : МПГУ, 1992.
2. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Полукольца непрерывных [0,1] – значных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 4. С. 53–82.
3. Лубягина Е. Н. Частичные кольца непрерывных функций // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 3. С. 44–46.
4. *Jerison M., Gilman L.* Rings of Continuous Functions. Princeton : Van Nostrand, 1976.

Partial rings of continuous [–1, 1] – valued functions

O. V. Kuznetsova[1], E. N. Lubyagina[2]
[1]master student, Vyatka State University. Russia, Kirov.
E-mail: olga83kuz@gmail.com
[2]PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article is devoted to the theory of rings of continuous functions on topological spaces. As a set of function values, a numerical segment $E = [-1,1]$ with the usual multiplication operation, a partial (not everywhere defined) addition operation and a standard topology is chosen. Partial rings $C(X,E)$ of all continuous E-valued functions on topological spaces are similar in their properties to rings $C(X) = C(X,R)$ of continuous real valued functions on X.

In the article, we consider some properties of partial rings $C(X, E)$, it is shown that the maximal ideals of a partial ring $C(X, E)$ are exactly ideals M_x over all possible points x of the compact X, the duality of the category of partial rings $C(X, [-1,1])$ and their homomorphisms preserving 1, and the category of all compacts X with their continuous maps is revealed.

The subject considered in the article allows further research.

Keywords: partial semiring of continuous functions, compact, maximal ideal, homomorphism.

References

1. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij na topologicheskih prostranstvah. Izbrannye temy : ucheb. posobie* [Rings of continuous functions on topological spaces. Selected topics: tutorial]. M. Moscow State Pedagogical University. 1992.

2. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Polukol'ca nepreryvnyh [0,1]- znachnyh funkcij* [Half-ring of the continuous [0,1]- valued functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics. 2012, vol. 17, No. 4, pp. 53–82.

3. *Lubyagina E. N. CHastichnye kol'ca nepreryvnyh funkcij* [Partial rings of continuous functions] // *Nauchno-tekhnicheskij vestnik Povolzh'ya* – Scientific-technical herald of the Volga region. 2015, No. 3, pp. 44–46.

4. *Jerison M., Gilman L.* Rings of Continuous Functions. Princeton: Van Nostrand, 1976.