

К вопросу о возможности использования систем компьютерной математики в учебном процессе

Е. Н. Лубягина¹, Л. В. Тимшина², Е. С. Трефилова³

¹кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,

Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.

ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

²старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,

Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.

ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

³старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,

Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.

ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. В настоящее время растет интерес к использованию информационных технологий в учебном процессе, что предполагает овладение выпускниками педагогических вузов соответствующими компетенциями, одной из которых является представление учебной информации в различных видах и работа с ней.

В данной статье рассматривается возможность использования систем компьютерной математики GeoGebra, Maxima, Sage в решении задач по некоторым темам алгебры и геометрии в рамках подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Приведены некоторые примеры.

При таком подходе формируются общеучебные, междисциплинарные и надпредметные умения и навыки, связанные с применением знаний по математике и информатике. Считаем, что такое использование систем компьютерной математики способствует повышению мотивации к научно-исследовательской работе студентов.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, GeoGebra, Maxima, Sage, геометрические преобразования.

Системы компьютерной математики позволяют создавать качественные иллюстрации (в том числе динамические), оперативно выполнять преобразования математических объектов (например, чертежей), автоматически реализовывать трудоемкие алгоритмы, экспериментировать с данными задачи с целью поиска их решения. Продемонстрируем возможность использования систем компьютерной математики в рамках подготовки бакалавров по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

Компьютерные программы в учебном процессе могут применяться при разработке демонстрационных материалов, при выполнении студентами задач, вынесенных на самостоятельное решение, в научно-исследовательской работе студентов, при организации спецкурсов математических дисциплин. С опытом организации спецкурса по геометрии с использованием информационных технологий можно ознакомиться в [4].

Считаем, что такое использование систем компьютерной математики способствует повышению мотивации к учебе, а также к научно-исследовательской работе студентов.

Отметим, что проблема, рассмотренная с разных сторон, может обрести дополнительный смысл. Порой решение задачи интуитивно понятно, а осознается именно с помощью картинки (графического образа) – ее модели. Поэтому использование зрительных образов преобразований объектов способствует формированию общеучебных, междисциплинарных и надпредметных умений и навыков.

В качестве первого примера рассмотрим задачу (из [2]), в которой параметр можно понимать как некий фактор, изменяющий данный объект. Для иллюстрации решения задач с параметрами хорошо подходит система динамических чертежей GeoGebra.

Задача 1. Найти все значения параметра, при которых следующее уравнение будет иметь ровно одно решение:

$$1 - p = \sqrt{4 - p^2 - 2px - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2}.$$

Для решения данной задачи преобразуем уравнение.

$$1 - p = \sqrt{4 - p^2 - 2px - x^2} - \sqrt{3 - 2x - x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 - (1 + x)^2} + 1 = \sqrt{4 - (p + x)^2} + p.$$

Заметим, что левой части полученного уравнения соответствует верхняя полуокружность радиуса 2 с центром в точке (-1, 1). Правая часть уравнения задает окружности того же радиуса, но с переменным центром - он движется по прямой $y = -x$. Значит, $p \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.

На полотно GeoGebra достаточно построить график функции $f(x) = \sqrt{4 - (1 + x)^2} + 1$ (рис. 1), задать с помощью ползунка параметр p со значениями от -3 до 5 и указать функцию $g(x) = \sqrt{4 - (p + x)^2} + p$. Меняя значения параметра, мы зададим движение графика второй функции и получим динамическую иллюстрацию. Для создания статической картинке процесса можно воспользоваться возможностью объектов в GeoGebra оставлять след.

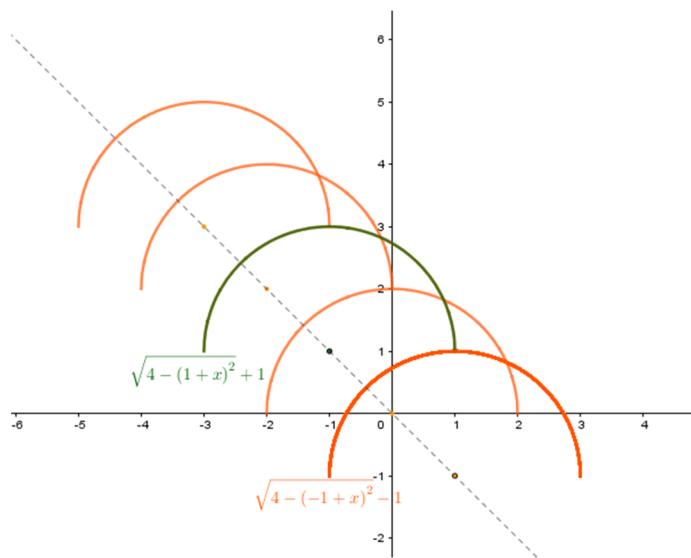


Рис. 1

Следующий пример иллюстрирует применение инверсии к решению геометрической задачи. Примечательно, что данное преобразование позволяет переводить окружности в прямые, и наоборот. Это свойство инверсии позволяет строить примеры конфигураций, различных внешне, но одинаковых по сути. Реализация преобразования инверсии в системе GeoGebra осуществляется в один клик - достаточно с помощью инструмента «Отражение относительно окружности» выделить отражаемую конфигурацию и указать окружность инверсии.

Задача 2. Даны четыре окружности, каждая из которых касается двух других (рис. 2). Доказать, что точки их касания расположены на одной окружности.

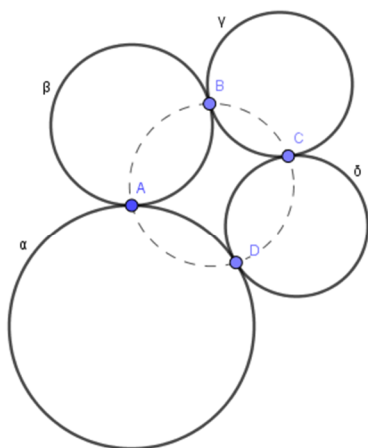


Рис. 2

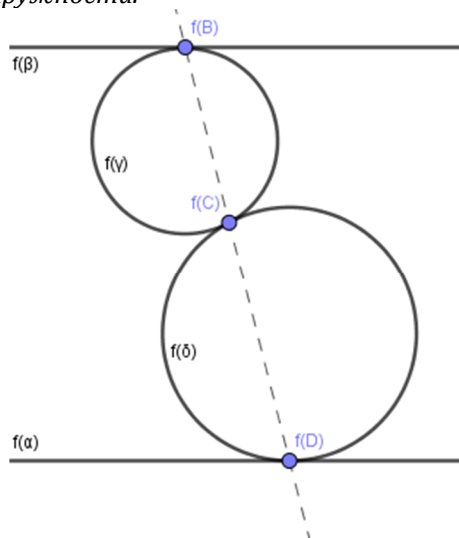


Рис. 3

При инверсии данной в задаче конфигурации относительно окружности с центром в одной из точек касания A две окружности, касающиеся в этой точке, перейдут в пару параллельных прямых, а две другие перейдут в окружности, касающиеся друг с другом и с полученными прямыми, как показано на рис. 3. Для решения будет достаточно доказать, что точки $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ лежат на одной прямой. Это можно сделать, проведя, например, общую касательную окружностей $f(\gamma)$, $f(\delta)$, и рассмотреть получившиеся при этом углы (рис. 4).

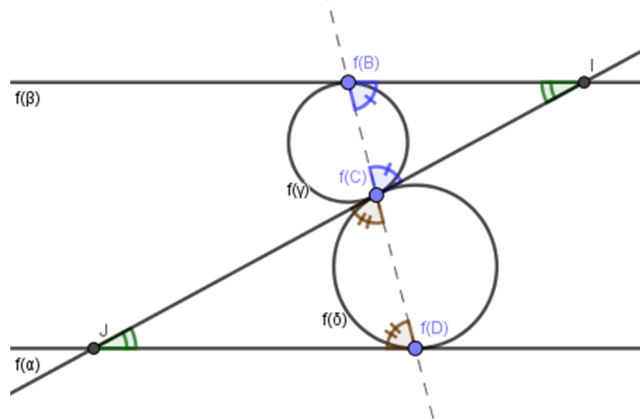


Рис. 4

Отдельный интерес представляет визуализация отображений на комплексной плоскости. Решению этой задачи в системе GeoGebra посвящена глава пособия [3]. Вопрос об иллюстрации отображений комплексной плоскости в системах Maple и Mathcad затрагивается также и в пособии [5].

Задача 3. Изобразить на комплексной плоскости образ множества точек $|z|=1$, $z \in \mathbb{C}$, при отображении $f(z)=z^2+z+1$.

Для построения чертежа к данной задаче в GeoGebra достаточно задать окружность $|z|=1$ радиуса 1 с центром в начале координат, ввести на ней точку A и ее образ $A'((x(A)^2 - y(A)^2 + x(A) + 1, 2y(A)x(A) + y(A)))$ при отображении f . Получится кривая, похожая на улитку Паскаля.

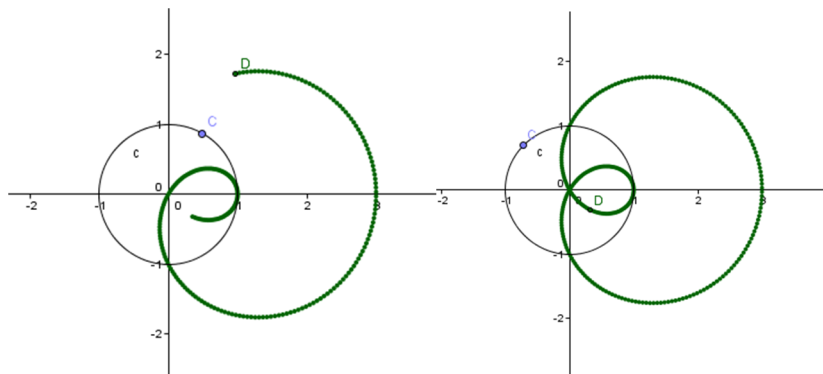


Рис. 5

Среда GeoGebra позволяет выдвинуть гипотезу о виде полученной кривой. Студентам предлагается аналитически доказать, что это не улитка Паскаля.

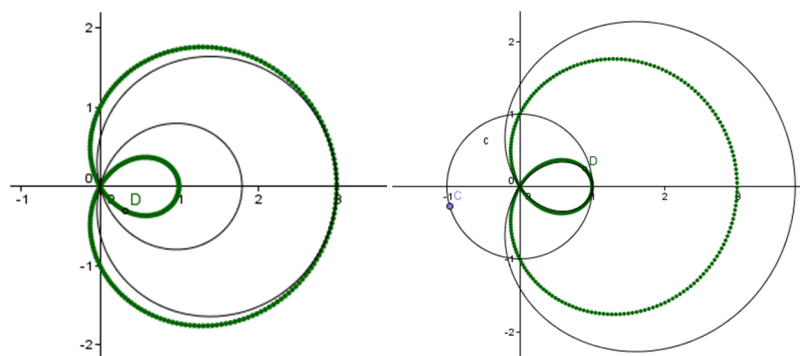


Рис. 6

Эффективной иллюстрацией применения комплексных чисел являются фракталы. Для построения изображений, требующих выполнения трудоемких вычислений, целесообразно использовать системы компьютерной алгебры. Для быстрого построения фрактальных множеств в системе компьютерной алгебры Maxima имеются такие пакеты, как `fractals` и `dynamics`.

Так, например, чтобы получить изображение множества Жюлиа с параметром $1/2 + 1/2 i$

(см. рис. 2), достаточно ввести в Maxima следующий код:

```
load(dynamics)$
julia(0.5,0.5, [iterations, 77], [x,-1.5, 1.5], [y, -1.5, 1.5], [grid, 500, 500], [color_bar_tics, 0, 6, 36]);
```

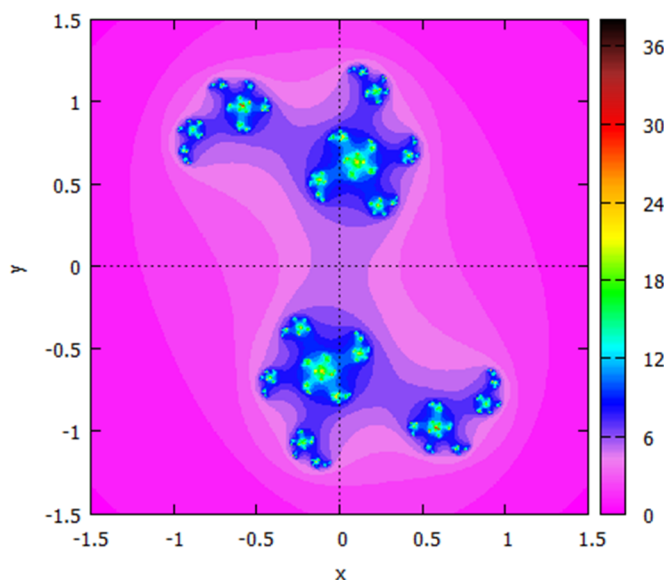


Рис. 7

Подробнее о моделировании фракталов в системе Maxima можно узнать в [1].

Важную роль преобразования играют в алгебраической геометрии. Когда мы работаем с группами геометрических преобразований, мы этим иллюстрируем общее понятие группы. Для алгебраического анализа групп преобразований можно эффективно использовать такие системы компьютерной алгебры, как GAP и Sage.

Например, для того чтобы убедиться, что диэдральная группа симметрий квадрата имеет порядок 8, является подгруппой группы перестановок четвертой степени, нециклической, некоммутативной и ненормальной, в Sage достаточно ввести следующие команды:

```
D4=DihedralGroup(4); D4;
D4.order();
spD4=D4.list(); spD4;
S4=SymmetricGroup(4);
D4.is_subgroup(S4);
D4.is_cyclic();
D4.is_abelian();
D4.is_normal(S4);
```

```
Dihedral group of order 8 as a permutation group
8
[(), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,2,3,4), (2,4), (1,3), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)]
True
False
False
False
```

В заключение отметим, что использование систем компьютерной математики при создании иллюстраций, для поиска решения и выполнения трудоемких вычислений на отдельных этапах решения задачи способствует повышению эффективности обучения, обеспечивает развитие профессионально значимых качеств личности. При этом занятие проходит динамично, вызывает у студентов интерес и стремление к умственной деятельности, способствует более прочному закреплению знаний.

Список литературы

1. Букушева А. В. Дифференциальная геометрия в Maxima : учеб. пособие. Саратов, 2015. 50 с.
2. Крачковский С. М. Дивергентные задачи по математике и их визуальные образы : учеб.-метод. пособие. М. : Прометей, 2016. 166 с.
3. Ларин С. В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики : учеб. пособие. Ростов н/Д : Легион, 2015. 192 с.
4. Матвеев С. Н., Антропова Г. Р. Организация спецкурса по геометрии средствами информационных технологий (в подготовке бакалавров) // Мир науки : интернет-журнал. 2017. Т. 5. № 2. URL: <http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf>
5. Титов К. В. Компьютерная математика : учеб. пособие. М. : РИОР : ИНФРА-М, 2016. 261 с.
6. Трошин П. И. Моделирование фракталов в среде Maxima. Ч. I. Казань : Казан. федер. ун-т, 2012.
7. Яцкин Н. И. Алгебраические вычисления в системе Sage. Иваново, 2014.

On the possibility of using systems of computer mathematics in the educational process

E. N. Lubyagina¹, L. V. Timshina², E. S. Trefilova³

¹PhD of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

² senior lecturer of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

³ senior lecturer of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. Currently, there is a growing interest in the use of information technology in the educational process. This implies mastering graduates of pedagogical universities with relevant competencies, including the presentation of educational information in various forms and working with it.

In this article, we consider the possibility of using computer mathematics systems GeoGebra, Maxima, Sage in solving problems in some topics of algebra and geometry as part of the preparation of bachelors in the direction of 44.03.05 Pedagogical education (with two training profiles). The article gives some examples.

It helps to develop general educational, interdisciplinary and above-subject skills associated with the use of knowledge in mathematics and computer science. We believe that such use of computer math systems contributes to increasing the motivation for students' research work.

Keywords: Computer math systems, GeoGebra, Maxima, Sage, geometric transformations.

References

1. Bukusheva A. V. *Differencial'naya geometriya v Maxima : ucheb. posobie* [Differential geometry in Maxima: tutorial]. Saratov. 2015. 50 p.
2. Krachkovskij S. M. *Divergentnye zadachi po matematike i ih vizual'nye obrazy: ucheb.-metod. posobie* [Divergent problems in mathematics and their visual images: educational and methodical manual]. M. Prometheus. 2016. 166 p.
3. Larin S. V. *Komp'yuternaya animaciya v srede GeoGebra na uroках matematiki: ucheb. posobie* [Computer animation in the environment of GeoGebra in mathematics lessons: educational manual]. Rostov-on-Don. Legion. 2015. 192 p.
4. Matveev S. N., Antropova G. R. *Organizaciya speckursa po geometrii sredstvami informacionnyh tekhnologij (v podgotovke bakalavrov)* [Organization of a special course on geometry by means of information technologies (in preparation of bachelors)] // *Mir nauki : internet-zhurnal* – World of science: Internet magazine. 2017, vol. 5, No. 2. Available at: <http://mir-nauki.com/PDF/33PDMN217.pdf>
5. Titov K. V. *Komp'yuternaya matematika : ucheb. posobie* [Computer mathematics: educational manual]. M. RIOR: INFRA-M. 2016. 261 p.
6. Troshin P. I. *Modelirovanie fraktalov v srede Maxima* [Simulation of fractals in the environment of Maxima. Part I]. Kazan. Kazan. Feder. University. 2012.
7. Yackin N. I. *Algebraicheskie vychisleniya v sisteme Sage* [Algebraic calculations in the Sage system]. Ivanovo. 2014.