УДК 372.851 doi: 10.25730/VSU.0536.18.23

Организация самостоятельной работы студентов-педагогов при изучении учебной дисциплины «Элементарная геометрия»

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Статья имеет практический характер. Обсуждается опыт организации самостоятельной работы будущих педагогов при повторении материала школьного предмета «Геометрия». Целью повторения материала школьной планиметрии является как воспроизведение изученного материала для его дальнейшего использования, так и его новая организация в форме опорных задач. Содержание повторения составляют основные планиметрические теоремы, свойства некоторых понятий, известные приемы решения задач. Основной метод повторения ранее изученного – самостоятельное решение предложенных математических задач и обсуждение результатов решения в малых группах. Представлены примеры учебных заданий для самостоятельной познавательной деятельности студентов.

Ключевые слова: самостоятельная работа студентов, элементарная геометрия, опорная задача.

Концепция модернизации российского образования требует усиления роли деятельностного подхода к обучению и оптимального использования его возможностей в практике вузовского обучения. Поэтому актуальными являются вопросы совершенствования самостоятельной учебной деятельности студентов.

Самостоятельная работа имеет решающее значение при организации различных видов повторения. В рамках изучения учебной дисциплины «Элементарная геометрия», которая играет важную роль в формировании профессионально-предметных знаний будущих педагогов и напрямую связана со школьным предметом «Геометрия», целесообразна организация повторения материала школьной планиметрии.

За основу примем методическую систему обогащающего повторения [1], для которого характерно не только повторение с последующим применением изученного, но и интеллектуальное развитие, обогащение памяти, расширение кругозора учащихся.

Для этого вся учебная группа делится на несколько рабочих групп. Каждой группе выдается определенный набор задач, в который включается опорная задача и задачи, элементом решения которых является опорная задача. Кроме того, группе предлагается контрольная задача. После обсуждения группа должна представить для всех студентов вместе с опорной задачей решение контрольной задачи. Контроль результатов повторения осуществляется в форме самоконтроля, взаимоконтроля участников одной рабочей группы и внешнего контроля преподавателем.

Таким образом, в основе повторения теоретического и практического материала по геометрии лежат опорные задачи. Данный подход имеет для студентов определенную новизну в актуализации математических знаний, эти задачи являются своеобразными ориентирами для решения других задач, у студентов накапливается определенный набор опорных задач, на основе которых можно выстраивать серии взаимосвязанных задач, тем самым создавая определенный методический багаж для будущей педагогической деятельности.

В статье приведены такие опорные задачи, содержание которых составляют следующие геометрические факты и приемы решения: равенство отрезков касательных, проведенных к окружности, описанный четырехугольник; взаимное расположение окружностей; свойства выпуклого четырехугольника; медианы и площадь, метод площадей; переход к другой фигуре.

Подбор задач осуществлялся исходя из трех уровней усвоения материала: первый состоит в осознании информации, ее обосновании и запоминании; второй представляет усвоение способов применения знаний по образцу, включая легко опознаваемые вариации этого образца, применение знаний в знакомой ситуации; третий заключается в готовности обучающегося творчески применить усвоенную информацию в новой ситуации [3].

Приведем примеры серий таких задач.

В задачах 1–5 основным фактом является равенство отрезков касательных. Для некоторых задач приведено решение.

Задача 1. *К окружности проведены две касательные, проходящие через точку, лежащую вне окружности (рис. 1). Доказать, что AB = AC и угол BAO равен углу CAO (AO – биссектриса угла), где B и C точки касания, а O – центр окружности.*

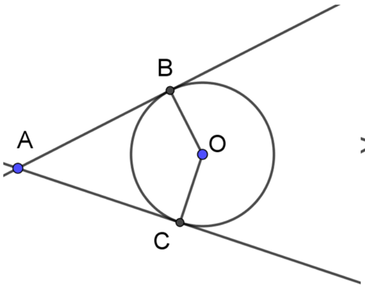

Рис. 1

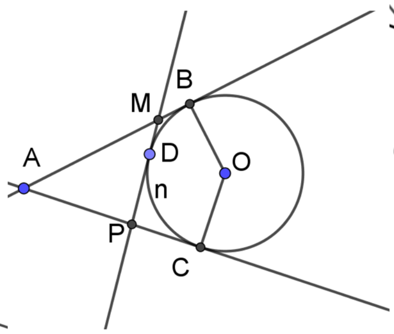

Рис. 2

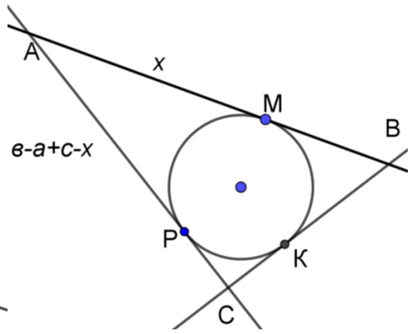

Рис. 3

Задача 2. *Добавим к окружности третью касательную (рис. 2), пересекающую касательные AB и CA в точках M и P и проходящую через точку D, принадлежащую дуге BnC окружности. Доказать, что периметр треугольника MAP и величина угла MOP не зависят от выбора точки D.*

Задача 3. *В треугольник ABC со сторонами а, в, с вписана окружность (рис. 3). Выразить расстояние от вершины A треугольника до точек M и P касания сторон, выходящих из этой вершины, с окружностью.*

Решение. Пусть длина отрезка *AM* равна *x*. Выражая последовательно отрезки *MB, BK, KC, CP* и *PA* через стороны треугольника и длину *x* отрезка *AM,* получим, что $AP = в - a + c - x$. Поскольку *AM* = *AP*, то приравнивая полученные выражения для длин отрезков *AM* и *AP,* выразим $x = \dfrac{в + c - a}{2}$. Аналогичные выражения можно получить для длин других отрезков.

Естественным продолжением рассмотренных задач являются задачи, связанные со свойствами описанного четырехугольника, однако при ограниченном времени эти задачи можно исключить из данной серии задач.

Задача 4. *Если четырехугольник ABCD описан около окружности, то равны суммы длин его противоположных сторон, а центром окружности является точка пересечения биссектрис его углов. Доказать.*

Задача 5. *Около круга описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 80, а острый угол 30º. Найти площадь трапеции и доказать, что боковые стороны трапеции видны из центра вписанной окружности под прямым углом.*

Контрольная задача. *В треугольнике ABC AB=9, BC=5, AC=8. Точка D лежит на стороне BC так, что* $BD : DC = 3 : 7$ *. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ACD и ABD, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.*

Для следующей серии задач 6–7 опорной является геометрическая конфигурация задачи 6 и свойства этой конфигурации.

Задача 6. *Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом в точке A (рис. 4). BC – их общая касательная. Доказать, что угол BAC прямой и* $BC = 2\sqrt{Rr}$ *.*

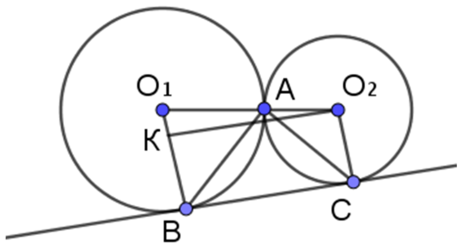

Рис. 4

Решение. Данная конфигурация имеет много полезных с точки зрения решения задач свойств. Отметим, прежде всего, что точки O_1, *A* и O_2 лежат на одной прямой. Радиусы O_1B и O_2C параллельны, т. к. перпендикулярны общей касательной *BC*. Докажем, что угол *BAC* прямой. Пусть $\angle BO_1A = \alpha$, тогда $\angle AO_2C = 180° - \alpha$. По свойству равнобедренных треугольников AO_1B и AO_2C

$\angle O_1AB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle O_2AC = \frac{\alpha}{2}$, а сумма углов равна $90°$. Эта сумма вместе с $\angle BAC$ составляет развернутый угол, следовательно $\angle BAC = 90°$. Для вычисления *BC* выполним дополнительное построение. Через центр O_2 окружности с меньшим радиусом r проведем $O_2K \parallel BC$. Получим прямоугольный треугольник O_1O_2K, в котором $O_1O_2 = R + r, O_1K = R - r, KO_2 = BC$. По теореме Пифагора выразим KO_2. Получим $KO_2 = 2\sqrt{Rr}$, и значит $BC = 2\sqrt{Rr}$.

Задача 7. *Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.*

Замечание. В задаче 7 кроме внешней общей касательной существует общая внутренняя касательная.

Контрольная задача. *Две окружности касаются внешним образом в точке К. Прямая касается первой окружности в точке А, а второй – в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С. Докажите, что прямые AD и BC параллельны. Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 25.*

Для задач 8–9 опорной является задача 8.

Задача 8. *Пусть M, N, P и Q – середины сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рис. 5). Тогда MNPQ параллелограмм и площадь четырехугольника ABCD равна удвоенной площади параллелограмма MNPQ.*

Решение. *MN* – средняя линия треугольника *ABC*. Значит $MN = \frac{1}{2}AC$ и $MN \parallel AC$. Аналогично $PQ = \frac{1}{2}AC$ и $PQ \parallel AC$. Получили $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$. Следовательно, *MNPQ* – параллелограмм. Стороны *MQ* и *NP* параллелограмма параллельны диагонали *BD*. В силу параллельности получаем равенство углов *QMN* и *DOC*, где *O* – точка пересечения диагоналей данного четырехугольника. Используя связь между сторонами параллелограмма и диагоналями данного четырехугольника, несложно установить связь между площадями данных фигур. Вспомните соответствующие формулы.

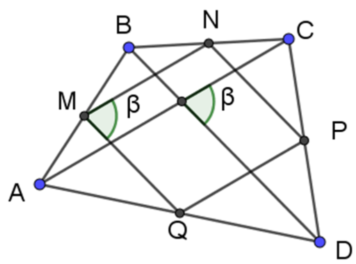

Рис. 5

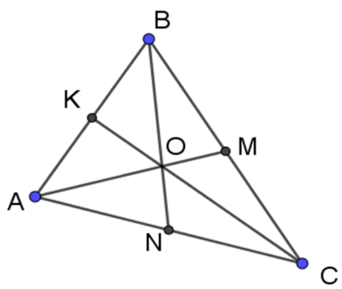

Рис. 6

Задача 9. *При каких свойствах диагоналей данного выпуклого четырехугольника ABCD параллелограмм MNPQ будет ромбом, прямоугольником, квадратом (рис. 5)?*

Контрольная задача. *В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.*

Дополним рассмотренные серии задач тремя опорными задачами (задачи 10–12), каждая из них позволяет в дальнейшем в нестандартных ситуациях видеть уже известные нам конструкции.

Задача 10 (медианы и площадь). *Исследовать, как площади треугольников, на которые медианы разбивают данный треугольник, связаны с площадью данного треугольника.*

Решение. В задаче необходимо исследовать площади треугольников трех типов. Если *AM, BN и CK* медианы треугольника *ABC* (рис. 6), то а) равны площади треугольников *ABN* и *CBN* (общая высота, проведенная из вершины *B*, и равные основания). Аналогично б) равны площади треугольников *AON* и *CON*. Кроме того, в) $S_{ABO} = S_{ABN} - S_{AON} = S_{CBN} - S_{CON} = S_{COB}$. Итак, каждая медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника, все медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников и $S_{ABO} = S_{BCO} = S_{CAO} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Задача 11 (переход к другой фигуре**)**. *Медианы треугольника равны 3, 4 и 5. Найти площадь треугольника.*

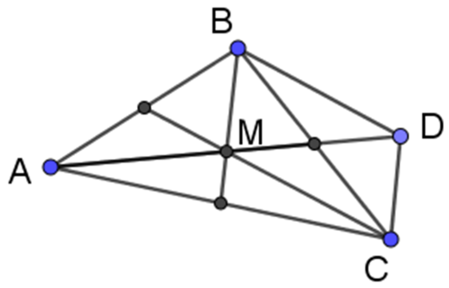

Рис. 7

Решение. Пусть *M* – точка пересечения медиан данного треугольника (рис. 7). $S_{ABC} = 3S_{BMC}$ (задача 10). Для нахождения площади треугольника *BMC* достроим его до параллелограмма *BMCD*. Продолжение медианы *AM* содержит диагональ *MD* параллелограмма. $S_{BMC} = S_{BMD}$, т. к. каждая из указанных площадей равна половине площади параллелограмма *BMCD*. Площадь треугольника *BMD* вычисляем по формуле Герона, т. к. известны его стороны как части соответствующих медиан. Тогда $S_{ABC} = 3S_{BMC} = 3S_{BMD} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$.

Задача 12 (метод площадей). *Площадь треугольника ABC равна 16. AM и BP – медианы,* $AM = 6, BP = 4$. *Доказать, что угол AOB прямой, где O точка пересечения медиан.*

В целом такая форма организации самостоятельной работы способствует повышению ее эффективности, обеспечивает развитие профессионально значимых качеств личности. При этом занятие проходит динамично, вызывает интерес и желание у студентов к умственной деятельности, способствуют более прочному закреплению знаний.

Список литературы

1. *Зильберберг Н. И.* Урок математики: Подготовка и проведение : кн. для учителя. М. : Просвещение : АО «Учеб. лит.», 1995. 178 с.
2. *Малых А. Е.* Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники : учеб. пособие. Пермь : Перм. гос. пед. ун-т, 2010. 100 с.
3. *Саранцев Г. И.* Общая методика преподавания математики : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. Саранск : Тип. «Красный Окт.», 1999. 208 с.
4. *Шебанова Л. П.* Повышение качества подготовки учителя математики в педвузе на основе системы обогащающего повторения элементарной математики и методики обучения математике : автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск : ОмГПУ, 2004. 22 с.

Organization of independent work of students-teachers during the study of the discipline «Elementary geometry»

L. V. Timshina

senior lecturer, Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.

ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article is of practical nature. The experience of the organization of independent work of future teachers in the repetition of the material of the school subject "Geometry" is discussed. The purpose of repetition of the school planimetry material is both reproduction of the studied material for its further use and its new organization in the form of supporting tasks. The content of the repetition are the key planimetric theorem, properties of some notions, well-known techniques for solving problems. The main method of repetition of the previously studied is an independent solution of the proposed mathematical problems and discussion of the results of the solution in small groups. Examples of educational tasks for independent cognitive activity of students are presented.

Keywords: independent work of students, elementary geometry, basic problem.

References

1. *Zilberberg N. I. Urok matematiki: Podgotovka i provedenie: kn. dlya uchitelya* [Math lesson: Preparing and carrying out: the book for a teacher]. M. Prosveshchenie: JSC «Ucheb. lit.». 1995. 178 p.

2. *Malyh A. E. Opornye planimetricheskie zadachi. Treugol'niki i mnogougol'niki: ucheb. posobie* [Suport planimetric problems. Triangles and polygons: educational manual]. Perm. Perm State Ped. University. 2010. 100 p.

3. *Sarancev G. I. Obshchaya metodika prepodavaniya matematiki : ucheb. posobie dlya studentov mat. spec. ped. vuzov i un-tov* [General methods of teaching mathematics: educational manual for students of the math. spec. of ped. high schools and universities]. Saransk. Printing house «Krasny Oct.». 1999. 208 p.

4. *SHebanova L. P. Povyshenie kachestva podgotovki uchitelya matematiki v pedvuze na osnove sistemy obogashchayushchego povtoreniya ehlementarnoj matematiki i metodiki obucheniya matematike :avtoref. dis. … kand. ped. nauk* [Improving the quality of training teachers of mathematics in the pedagogical university on the basis of the system of enriching repetition of elementary mathematics and methods of teaching mathematics: abstr. dis. ... PhD. ped. sciences]. Omsk. OmSPU. 2004. 22 p.