УДК 378.016 doi: 10.25730/VSU.0536.18.24

Изучение темы «Интегральное исчисление» в курсе высшей математики

Е. С. Трефилова
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена одному из разделов математического анализа – интегральному исчислению функции одной и нескольких переменных. В статье проанализированы два подхода к введению понятия определенного интеграла. Приведены некоторые достоинства и недостатки каждого способа введения. Предложен один из возможных способов обобщения определенного интеграла до криволинейных и поверхностных интегралов, а также кратных интегралов. Показана связь криволинейных, поверхностных и кратных интегралов с определенным интегралом, а также физический и механический смыслы различных видов интеграла. Приведено несколько примеров вычисления различных видов интегралов. В статье также названы основные ошибки и затруднения, возникающие при вычислении интегралов у студентов, и предложены некоторые способы их предотвращения.

Ключевые слова: определенный интеграл, формула Ньютона – Лейбница, криволинейные и кратные интегралы.

Тема интегральное исчисление функции включает в себя несколько разделов: первообразная, неопределенный интеграл, определенный интеграл, кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы и различные их приложения. В полном объеме данная тема изучается на инженерных направлениях, для гуманитарных направлений – до кратных интегралов.

До введения определенного интеграла в изложении теории первообразной и неопределенного интеграла в учебниках и учебных пособиях по математике для вузов различия отсутствуют.

Однако понятие определенного интеграла и соответственно теоремы Ньютона – Лейбница можно ввести по-разному. Существует два подхода к введению понятия: один из них основан на понятии интегральной суммы и принят в большинстве учебников [1; 2; 4], второй – на формуле Ньютона – Лейбница [3]. Приведем эти определения и теоремы.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k) \Delta x_k$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек τ_k [1].

Теорема Ньютона-Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и $F(x)$ – первообразная функции на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется соответствующее приращение ее первообразной, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ [3].

Производная площади переменной криволинейной трапеции для любого значения аргумента $X=x$ равна ее концевой ординате $y = f(x)$

Определение, приведенное авторами учебника [3], позволяет сразу вычислять определенный интеграл, используя его связь с неопределенным интегралом. Кроме этого из понятия приращения, изучаемого в разделе дифференциального исчисления, становится ясно, что это число, а не функция. Поэтому в таком подходе обучающиеся меньше видят сложностей при нахождении интеграла. Но при этом возникает ряд сложностей: какую из первообразных взять, как понять, в чем заключаются геометрический и механический смыслы интеграла… Поэтому авторам учебника приходится доказывать ряд теорем, например теорему о независимости определенного интеграла от выбора первообразной функции.

Если изучение интегрального исчисления заканчивается изучением определенного интеграла, то предложенный Б. П. Демидовичем, В. А. Кудрявцевым подход можно использовать, например, в курсе математики для некоторых гуманитарных направлений – психологии, социологии и некоторых других.

Для направлений, особенно инженерных, где интегралы вычисляют не только в курсе математики, но и в других дисциплинах, например физике, такой подход лучше не применять, поскольку при введении других видов интегралов приходится вводить интегральные суммы.

Напомним, как вводится понятие определенного интеграла непрерывной функции $y = f(x)$ на основе интегральных сумм.

В задачах на нахождение работы переменной силы или о площади криволинейной трапеции промежуток, на котором определена функция, сначала делится на несколько частей, затем на каждом таком отрезке выбирается точка, в которой вычисляется значение функции, и составляется сумма произведений функции на величину частичного сегмента. Используя предельный переход при стремлении самого большого частичного сегмента к нулю, получаем определенный интеграл. Достоинства такого подхода в его универсальности для любых промежутков и областей.

Обычно при изучении других видов интегралов связь с определенным интегралом появляется позже, при их вычислении. Можно показать ее раньше, например, следующим образом.

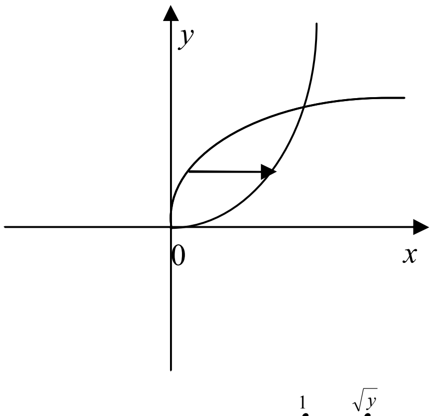
Представим, что теперь интеграл ищем не на отрезке, а в некой области плоскости или пространства либо на некой кривой – получаем переход к кратным и криволинейным интегралам. При этом введение понятия происходит аналогично введению понятия определенного интеграла, только делится на сегменты не отрезок, а область или кривая. При этом свойства аналогичны свойствам определенного интеграла, и они также имеют свой геометрический и физический смысл.

Если мы в качестве области интегрирования рассмотрим некую плоскую область и составим для нее по тому же алгоритму, что и в определенном интеграле, двумерную интегральную сумму, то получим двойной интеграл, который находится путем сведения его к повторному интегралу, т. е. двум определенным интегралам.

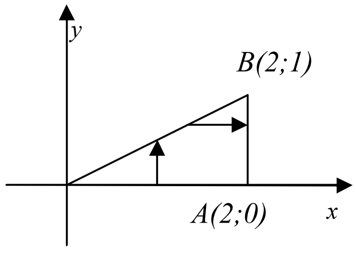
Самая большая сложность возникает у студентов как раз в сведении двойного интеграла к повторному интегралу, поэтому рекомендуем при изучении двойных интегралов выполнять задания типа:

Пример 1. Поменять порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x;y)dy$.

Решение. 1) Построим область. Для этого определим уравнения линий, которые ее задают.



Так как переменная *x* изменяется пределах от 0 до 1, а переменная *y* изменяется от x^2 до $\sqrt{x}$, то линии, ограничивающие область, задаются уравнениями $x=1$ и $x=0$, $y=\sqrt{x}$; $y=x^2$; 2) Выразим переменную *x* через *y*: $x=y^2$ и $x=\sqrt{y}$; 3) Найдем пределы изменения переменной *y*, для этого спроектируем фигуру на ось *Oy*. Получаем пределы изменения *y* – от 0 до 1; 4) Используя рисунок, найдем, как изменяется переменная *x*. Для этого выберем на оси *Oy* в пределах изменения переменной точку и проведем прямую, перпендикулярную оси *Oy*, – получаем точки «входа» и «выхода». 5) Запишем повторный интеграл с новыми пределами $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx$.



Пример 2. Сведите интеграл к повторному (расставьте пределы интегрирования) $\iint\limits_S f(x;y)dxdy$, если область *S* – это треугольник с вершинами *O*(0: 0); *A*(2; 0) и *B*(2; 1).

Решение. 1) Построим область по заданным точкам. 2) Найдем уравнения линий, ограничивающие область: $y=0$; $x=1$; $y=0{,}5x$ или $x=2y$. 3) Запишем повторный интеграл двумя способами: $\iint\limits_S f(x;y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^{2} f(x;y)dx$; $\iint\limits_S f(x;y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{0{,}5x} f(x;y)dy$.

Пример 3. Вычислить интегралы: а) $\iint\limits_S x\sqrt{y}dxdy$, если *S* – это квадрат: $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$; б) $\iint\limits_S x^2 ydxdy$, если *S* – это треугольник с вершинами *O*(0: 0); *A*(2; 0) и *B*(2; 1).

Решение. а) Сведем интеграл к повторному интегралу, т. к. область прямоугольная, то ее можно не строить и сразу расставить пределы интегрирования. Имеем $\iint\limits_S x\sqrt{y}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x\sqrt{y}dy =$ $\int\limits_0^1 x\left(\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)\Big|_0^1 dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 xdx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

б) Используя рисунок из предыдущего примера, сведем интеграл к повторному: $\iint\limits_S x^2 ydxdy =$

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^2 x^2 ydx = \int\limits_0^1 y(\frac{x^3}{3})\Big|_{2y}^2 dy = \int\limits_0^1 \frac{y}{3}(8-8y^3)dy = \frac{8}{3}\int\limits_0^1 (y-y^4)dy =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

После рассмотрения предложенных типов задач можно переходить к более сложным интегралам, при вычислении которых используются метод подстановки или метод интегрирования по частям. В дальнейшем необходимо решить примеры на использование физического и геометрического смысла двойного интеграла.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение сводится к вычислению интеграла $\iint\limits_s dxdy$ по области, ограниченной данными линиями.

Пример 5. Найти центр тяжести однородного полукруга, ограниченного осью *Ox* и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Такой порядок задач способствует лучшему усвоению материала студентами.

Изучение криволинейных интегралов начинают с рассмотрения физического примера и построения соответствующей интегральной суммы. Можно поступить и по-другому. Напомним учащимся, что определенный интеграл вычисляется по отрезку прямой, и зададим им вопрос, можно ли заменить отрезок дугой некоторой кривой. Отвечая положительно на данный вопрос, мы получаем криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Отличие их друг от друга – в подынтегральной функции, у криволинейного интеграла первого рода это скалярная функция, поэтому он не зависит от выбора точки, которую будем считать начальной, и имеет соответствующий физический смысл – вычисление массы материальной линии. Интеграл второго рода вычисляется для векторной функции, записанной в координатной форме, и поэтому зависит от выбора начальной точки кривой. Его физический смысл – вычисление работы силы.

Криволинейные интегралы сводятся к определенным интегралам, для этого используется уравнение связи между координатами – уравнение кривой.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_l x^2 dl$, где *l* – это кривая, заданная уравнением $y = \ln x$, если $1 \le x \le e$ [5].

Решение. 1) Вычислим дифференциал кривой по формуле $dl = \sqrt{1+(y^/)^2}dx$. Имеем $dl = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$. 2) Подставляем найденное значение дифференциала в интеграл, получаем $\int\limits_l x^2 dl = \int\limits_1^e x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int\limits_1^e \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}\Big|_1^e =$

$\frac{1}{3}\left((1+e^2)^3-2\sqrt{2}\right)$.

При вычислении криволинейных интегралов построение области чаще всего не требуется, если только интеграл вычисляется не по замкнутому контуру.

Пример 7. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy\vec{i}+x\vec{j}$ при перемещении точки *M* из положения *A* (2; 0) в положение *B* (–1; 3) вдоль прямой *AB*.

Решение. Согласно физическому смыслу необходимо вычислить интеграл криволинейный второго рода. Уравнение линии, по которой идет перемещение точки, имеет вид $y=2-x$. Имеем

$$\int_{AB} 2xydx+xdy=\int_2^{-1} 2x(2-x)dx+x(-1)dx=\int_2^{-1}(4x-2x^2-x)dx=\left.\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\right|_2^{-1}=1{,}5.$$

В статье рассмотрены только некоторые аспекты изучения интегрального исчисления. Предложенный подход к введению различных типов интегралов был использован при изучении математики студентами инженерных направлений ВятГУ и дал положительный результат.

Список литературы

1. *Баврин И. И.* Высшая математика : учебник для студ. естественнонауч. спец. пед. вузов. 6-е изд., испр. М. : Изд. центр «Академия», 2007.

2. Высшая математика для экономистов : учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / [Н. Ш. Кремер и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. 3-е изд. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

3. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. М. : ООО «Изд-во Астрель» ; ООО «Изд-во АСТ», 2001. 656 с. : ил.

4. *Шипачев В. С.* Высшая математика : учебник для вузов. 4-е изд., стер. М. : Высш. шк., 1998.

5. *Шипачев В. С.* Задачник по высшей математике : учеб. пособие для вузов. 6-е изд., стер. М. : Высш. шк., 2006.

Study of the topic «Integral calculus» in the course of higher mathematics

E. S. Trefilova

senior lecturer, Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.

ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. The Article is devoted to one of the sections of mathematical analysis– integral calculus of the function of one and several variables. The article analyzes two approaches to the introduction of the concept of a certain integral. Some advantages and disadvantages of each method of administration are given. One of possible ways of generalization of a certain integral to curvilinear and surface integrals, and also multiple integrals is offered. The connection of curvilinear, surface and multiple integrals with a certain integral is shown, as well as the physical and mechanical meanings of different types of integral are indicated. Several examples of calculation of different types of integrals are given. The article also identifies the main errors and difficulties encountered in calculating the integrals of students, and offers some ways to prevent them.

Keywords: definite integral, Newton-Leibniz formula, curvilinear and multiple integrals.

References

1. *Bavrin I. I. Vysshaya matematika: uchebnik dlya stud. estestvennonauch. spec. ped. vuzov* [Higher mathematics: textbook for students of natural science specializations of ped. higher schools]. 6th publ., corr. M. Publ. center «Academiya». 2007.

2. *Vysshaya matematika dlya ehkonomistov: uchebnik dlya stud. vuzov, obuchayushchihsya po ehkonom. spec.* – Higher mathematics for economists: textbook for students studying in economics specializations / [N. Sh. Kremer et al.]; ed. N. Sh. Kremer. 3d publ. M. YUNITI-DANA. 2010.

3. *Kratkij kurs vysshej matematiki : ucheb. posobie dlya vuzov* – Short course of higher mathematics: educational manual for high schools / B. P. Demidovich, V. A. Kudryavtsev. M. LLC «Publishing house Astrel»; LLC «Publishing house AST». 2001. 656 p.: Il.

4. *SHipachev V. S. Vysshaya matematika : uchebnik dlya vuzov* [Higher mathematics: textbook for universities]. 4th publ., ster. M. Vyssh. shk. 1998.

5. *SHipachev V. S. Zadachnik po vysshej matematike : ucheb. posobie dlya vuzov* [Higher mathematics problems book: educational manual for high schools]. 6th publ., ster. M. Vyssh. shk. 2006.