УДК 512.55 doi: 10.25730/VSU.0536.18.20

Практикум по теории упорядоченных множеств и решеток*

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Теория упорядоченных множеств и решеток рассматривается в упражнениях и задачах. Определяются основные порядковые понятия, приводятся базовые примеры. Предлагаются циклы заданий по пяти темам: бинарные отношения, упорядоченные множества, решетки, дистрибутивные решетки, булевы алгебры.

Решение учебных и исследовательских задач – естественный путь овладения математикой. Особое значение имеют задачи, связанные с пониманием базовых структур математики и человеческого мышления, к которым относится порядковая структура. Наряду со структурным подходом в дидактике математики определяющую роль играет задачный подход, то есть обучение математике через анализ, решение и составление задач. Из приведенных 175 заданий можно выделить следующие группы задач: использование диаграмм Хассе при изучении конечных упорядоченных множеств; свойства линейно упорядоченных пространств; представления дистрибутивных решеток; взаимосвязи конечных упорядоченных множеств, конечных дистрибутивных решеток и конечных топологических пространств.

Ключевые слова: задача, обучение математике, бинарное отношение, порядковая структура, упорядоченное множество, решетка, дистрибутивность, булева алгебра.

1. Введение

При обучении математике принципиально важную роль играет *структурный подход*, при котором математика определяется как дедуктивная наука о *математических структурах* (то есть множествах с заданными на них наборами отношений). Французская группа математиков Бурбаки выделила три фундаментальных типа математических структур: алгебраический, порядковый, топологический. К ним добавляются структуры с мерой и инцидентностные структуры [см.: 20].

Порядковая структура (отношение порядка, упорядоченное множество, решетка) требует отдельного рассмотрения. Отношение порядка отражает и формализует сравнение вещей по той или иной величине (не обязательно числовой). Методике и методологии обучения порядковой структуре посвящены наши работы [6; 7; 11; 13; 14; 16; 19; 22]. В терминах отношения порядка можно выразить многие математические понятия и утверждения. Теория решеток позволяет видеть различные математические факты с единой точки зрения, унифицировать их. Порядковый и решеточный язык нагляден и адекватен, вызывает знакомые ассоциации с обычным порядком между действительными числами. Основополагающее значение порядковая структура имеет во многих разделах математики, например в функциональной алгебре [23; 24].

Решение учебных, учебно-исследовательских и исследовательских задач – естественный путь овладения математикой. Наряду со структурным подходом в дидактике математики главенствующую роль играет *задачный подход*, то есть обучение математике через задачи: через анализ, решение и составление задач. Особое значение имеют задачи, связанные с пониманием базовых структур математики и человеческого мышления, к которым относится порядковая структура.

Для магистрантов математических направлений подготовки нами разработана и ведется учебная дисциплина «Упорядоченные множества и решетки» [17]. Программа изучения дисциплины содержит пять глав: Бинарные отношения, Упорядоченные множества, Решетки, Дистрибутивные решетки, Булевы алгебры. По каждой из глав предусмотрены системы упражнений и задач.

Книги [1–5; 9; 20; 21; 25; 26; 28–39] содержат материал по упорядоченным множествам и решеткам. Необходимые сведения по теоретико-множественной топологии можно найти в трудах [1; 3; 20; 34; 40].

** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.*

2. Основные понятия и примеры

Напомним определения исходных порядковых понятий.

Бинарное отношение $\leq$ на непустом множестве X называется *отношением порядка*, или просто *порядком*, если оно

рефлексивно: $\forall x{\in}X\; x \leq x$,

транзитивно: $\forall x, y, z \in X\; (x \leq y \;\&\; y \leq z \Rightarrow x \leq z)$,

антисимметрично: $\forall x, y \in X\; (x \leq y \;\&\; y \leq x \Rightarrow x{=}y)$.

При этом пара $\langle X, \leq\rangle$ называется *упорядоченным множеством*. Отношение $\leq$ читается «меньше или равно». Заметим, что во многих работах используются термины «частичный порядок» и «частично упорядоченное множество».

Пусть далее $\langle X, \leq\rangle$ – произвольное упорядоченное множество, которое будем обозначать обычно как X. Заметим, что каждое непустое подмножество Y в X становится упорядоченным множеством $\langle Y, \leq\rangle$ относительно исходного порядка $\leq$.

Элементы $a, b \in X$ называются *сравнимыми*, если $a \leq b$ ли $b \leq a$. Если любые два элемента упорядоченного множества X сравнимы, то X называется *линейно упорядоченным множеством*, или просто *цепью*. Если различные элементы упорядоченного множества X попарно не сравнимы, то X называется *антицепью*. Элемент упорядоченного множества назовем *изолированным*, если он не сравним ни с каким другим элементом этого множества.

Естественным образом вводятся обозначения: $<$ (строго меньше), $\geq$ (больше или равно) и $>$ (строго больше).

Возьмем в X элементы $a \leq b$. Множество $(a; b)=\{x{\in}X\colon a < x < b\}$ – это *интервал* в X с концами a и b, $[a; b]=\{x{\in}X\colon a \leq x \leq b\}$ – *отрезок*, $(a]=\{x{\in}X\colon x \leq a\}$ – *начальный отрезок*, $[a)=\{x{\in}X\colon x \geq a\}$ – *финальный отрезок*. Аналогичным образом определяются: *полуинтервал*, *полуотрезок*, *начальный* и *финальный интервалы*. Если $a < b$ и интервал $(a; b)$ пустой, то говорят, что элементы $a < b$ образуют *покрытие*.

Элемент $a{\in}X$ называются:

наибольшим (*наименьшим*), если $\forall x{\in}X\; x \leq a$ ($\forall x{\in}X\; x \geq a$);

максимальным (*минимальным*), если $\forall x{\in}X\; (x \geq a \Rightarrow x{=}a)$ ($\forall x{\in}X\; (x \leq a \Rightarrow x{=}a)$);

верхней гранью (*нижней гранью*) множества $Y{\subseteq}X$, когда $\forall x{\in}Y\; x \leq a$ ($\forall x{\in}Y\; x \geq a$);

точной верхней гранью (*точной нижней гранью*) множества $Y{\subseteq}X$, в обозначениях $\sup Y$ ($\inf Y$), когда a будет наименьшим элементом множества всех верхних граней множества Y (соответственно, наибольшим элементом множества всех нижних граней множества Y).

Говорят, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию минимальности* (*условию максимальности*), если каждое его непустое подмножество имеет минимальный (максимальный) элемент.

Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным множеством*, если любое его непустое подмножество обладает наименьшим элементом. Вполне упорядоченные множества суть цепи с условием минимальности.

Упорядоченное множество называется *решеткой*, если любое его двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани: $\sup\{a, b\}$ и $\inf\{a, b\}$. Ясно, что $\sup\{a\}=\inf\{a\}=a$. Это порядковый подход к определению решетки L.

На L вводятся бинарные операции сложения и умножения: $a+b=\sup\{a, b\}$ и $ab=a{\cdot}b=\{a, b\}$. Эти операции коммутативны, ассоциативны, идемпотентны и связаны законами (тождествами) поглощения $x+xy=x$, $x(x+y)=x$. Получаем алгебраическую структуру $\langle L, +, \cdot\rangle$ типа $\langle 2, 2\rangle$, удовлетворяющую четырем парам взаимодвойственных аксиом (алгебраическое определение решетки). При этом на L задается порядок: $x \leq y \Leftrightarrow x+y=y$, равносильно, $xy=x$.

Порядковое и алгебраическое определения решеток эквивалентны. Полезно рассматривать решетки как естественный симбиоз алгебраической и порядковой структур: алгебраические операции $+, \cdot$ и порядок $\leq$ связаны следующими соотношениями:

$$x+y=\sup\{x, y\},\; xy=\inf\{x, y\},\; x \leq y \Leftrightarrow x+y=y \Leftrightarrow xy=x,$$
$$(x \leq y)\&(z \leq u) \Rightarrow (x+z \leq y+u)\&(xz \leq yu).$$

Отображение f упорядоченного множества X в упорядоченное множество Y называется:

изотонным, если оно сохраняет отношение порядка:

$$\forall x, y \in X\; (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y));$$

(*порядковым*) *изоморфизмом*, если f взаимно однозначно и обратное отображение f^{-1} также изотонное.

Упорядоченные множества называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Любой порядковый изоморфизм решеток сохраняет их алгебраические операции, то есть будет их (решеточным) изоморфизмом. Изоморфные упорядоченные множества имеют одинаковые порядковые свойства, то есть свойства, выразимые в терминах отношения порядка. Так, упорядоченное множество, порядково изоморфное решетке, само будет решеткой.

Для решеток естественным образом определяются такие общеалгебраические понятия, как подрешетка, идеал, конгруэнция, фактор-решетка, гомоморфизм, прямое произведение семейства решеток.

Гомоморфизмы решеток – изотонные отображения, а изотонное отображение решетки на решетку может не сохранять операции, то есть не обязано быть решеточным гомоморфизмом.

Важнейшие классы решеток образуют модулярные решетки, дистрибутивные решетки и булевы решетки.

Решетка называется *дистрибутивной* (*модулярной*), если в ней выполняется тождество $x(y+z)=xy+xz$ (соответственно, тождество $x(xy+z)=xy+xz$). Дистрибутивные решетки модулярны. Классы всех решеток, модулярных решеток и дистрибутивных решеток являются многообразиями, то есть задаются (могут быть заданы) тождествами.

Наибольший элемент в решетке часто обозначается 1 (единица, единичный элемент), а наименьший элемент обозначается 0 (нуль, нулевой элемент). Решетка с 1 и 0 называется *ограниченной*. Конечные решетки – ограниченные.

Пятиэлементная решетка, полученная из трехэлементной антицепи (трехэлементного упорядоченного множества с одним изолированным элементом) добавлением элементов 0 и 1, называется *диамантом* (*пентагоном*).

Ограниченная дистрибутивная решетка L называется *булевой решеткой*, если $1\neq 0$ и $(\forall x\in L)(\exists y\in L)(x+y=1\ \&\ xy=0)$. Такие элементы x и y называют *дополнениями* друг друга. В булевой решетке дополнение y элемента x определено однозначно и обозначается через x'.

В решетке с нулем (с единицей) минимальные среди ненулевых (максимальные среди неединичных) элементы называются *атомами* (*коатомами*).

Упорядоченное множество X называется:

полным сверху (*полным снизу*), если любое его непустое подмножество имеет точную верхнюю грань (точную нижнюю грань);

полной решеткой, если X полно сверху и полно снизу; при этом $\sup X=1$ и $\inf X=0$. Полные решетки суть ограниченные решетки.

Если в упорядоченном множестве каждое ограниченное сверху подмножество имеет sup, то оно называется *условно полным сверху*. Двойственным образом определяется *условно полное снизу* упорядоченное множество. Условно полное сверху и снизу упорядоченное множество называется *условно полным*.

Цепь называется *плотной*, когда любой ее интервал $(a; b)$, $a < b$, непустой, стало быть, содержит бесконечно много элементов.

Приведем базовые (модельные) примеры упорядоченных множеств и решеток.

1. Цепь $\langle \mathbf{R}, \leq\rangle$ действительных чисел. При этом sup=max, inf=min. Цепь $\mathbf{R}$ условно полна, не имеет ни наибольшего элемента, ни наименьшего элемента.

2. *Булеан* $\langle \mathrm{B}(M), \subseteq\rangle$, где $\mathrm{B}(M)$ – множество всех подмножеств фиксированного множества M. Булеан $\mathrm{B}(M)$ для непустого множества M является полной атомной решеткой, причем $\sup=\cup$, $\inf=\cap$, $A'=M\backslash A$ – дополнение множества A до множества M. Для $\mathrm{B}(M)$ имеем: M – наибольший элемент, $\varnothing$ – наименьший элемент, одноэлементные подмножества – атомы, а их дополнения до M – коатомы.

3. Дистрибутивная решетка $\langle \mathbf{N}$, НОК, НОД, $|\rangle$ натуральных чисел с отношением делимости «делит» $|$, где $x|y$ означает $y=xz$ для некоторого натурального числа z. В $\mathbf{N}$ число 1 служит наименьшим элементом, а любое его непустое подмножество имеет inf. Если к $\mathbf{N}$ добавить число 0, то получим полную дистрибутивную решетку $\mathbf{N}_0$ неотрицательных целых чисел с наибольшим элементом – числом 0.

4. Булева решетка $\langle \mathrm{AF}; \vee, \&, \Rightarrow\rangle$ классов $[F]$ равносильных формул F логики высказываний (пропозициональных форм F), где $[F]\Rightarrow[G]$ означает, что формула $F\Rightarrow G$ является тавтологией.

5. Решетка $\mathbf{R}^X$ всевозможных числовых функций на непустом множестве X с поточечным порядком является дистрибутивной решеткой. Если X – топологическое пространство, то множество $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на X служит подрешеткой решетки $\mathbf{R}^X$.

6. Конечные упорядоченные множества с небольшим числом элементов удобно изображать диаграммами Хассе.

При построении *диаграммы Хассе* конечного упорядоченного множества X пары элементов a, $b \in X$, образующих покрытие $a < b$, соединяют стрелкой $a\to b$ или, нагляднее, «точки» a и b соединяют отрезком, идущим вверх на доске (или вперед в тетради). Получается ориентированный граф без петель и кратных ребер, по которому – с учетом рефлексивности и транзитивности – однозначно восстанавливается само упорядоченное множество X. Именно, $a < b$ в X тогда и только тогда, когда в X существует последовательность покрытий $a \to a_1$, $a_1 \to a_2$, …, $a_n \to b$ (для n=0 имеем покрытие $a \to b$ при $a=a_0$, $b=a_1$). Можно начать строить диаграмму Хассе для X с множества X_1 минимальных элементов, располагая их на первом, нижнем горизонтальном уровне. На втором уровне находятся элементы множества X_2 минимальных элементов упорядоченного множества $X \backslash X_1$. При этом каждый элемент множества X_2 будет соединен идущим вниз отрезком с подходящим элементом множества X_1. Аналогичным образом получаем множества X_3 (третий уровень), …, X_n (последний n-й уровень). Антицепи X_1, X_2, …, X_n разбивают на уровни все упорядоченное множество X. Любой элемент множества X_n, как легко видеть, служит началом убывающей n-элементной цепи с концом из множества X_1. Поэтому X имеет длину n–1. Можно строить диаграмму Хассе, начиная с максимальных элементов, располагая их на верхнем уровне, и постепенно двигаться вниз [см.: 14].

7. С точностью до изоморфизма существуют пять попарно не изоморфных пятиэлементных решеток. Среди них три решетки дистрибутивны, диамант – недистрибутивная модулярная решетка, пентагон – немодулярная решетка.

8. Всевозможные непустые подмножества в решетках примеров 1–5 суть упорядоченные множества с индуцированным порядком. Подрешетки булеанов называются *решетками множеств*, которые, как легко видеть, дистрибутивны.

3. Задания к главе «Бинарные отношения»

Под *бинарным отношением между множествами* A и B можно понимать произвольное подмножество ρ прямого произведения $A \times B$, то есть некоторое множество упорядоченных пар (a, b) элементов $a \in A$, $b \in B$. Вместо $(a, b) \in \rho$ пишут $a\rho b$ и иллюстрируют это стрелкой $a \to b$. В случае $A=B$ говорят о *бинарном отношении* ρ *на множестве* A, которое задает на A ориентированный граф без кратных ребер, но, возможно, с петлями вида $a \to a$.

Отметим, что число элементов конечного множества A обозначается $|A|$ и называется его мощностью или порядком.

Изучению бинарных отношений посвящены статьи [1; 18], глава 1 учебного пособия [20], работа [39].

1. Что означает коммутативность объединения семейства множеств?

2. Докажите законы де Моргана для семейств множеств:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)' = \bigcap_{i\in I} A_i' \text{ и } \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)' = \bigcup_{i\in I} A_i'.$$

3. Докажите, что следующее утверждение (часто принимаемое в качестве аксиомы выбора) эквивалентно аксиоме выбора: для любого семейства $(A_i)_{i\in I}$ попарно непересекающихся непустых множеств ($A_i \neq \varnothing$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$) существует такое множество $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, что все множества $A \cap A_i$ – одноэлементные.

4. Докажите правила суммы и произведения для конечных множеств.

5. Для конечных множеств A, B, C докажите равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |A \cup C| + |B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B \cap C|.$$

6. Проверьте равенство $|B(A)| = 2^{|A|}$ для конечных множеств A.

7. Покажите, что число всех k-элементных подмножеств n-элементного множества ($k \leq n$) равно числу сочетаний из n по k.

8. *Задача Льюиса Кэрролла.* В жаркой потасовке схватились 100 пиратов. Известно, что в схватке 70 пиратов потеряли ногу, 75 – руку, 80 – глаз и 85 – ухо. Сколько пиратов наверняка лишились и ноги, и руки, и глаза, и уха?

9. Покажите, что всякое универсальное множество бесконечно (в интуитивном смысле).

10. В рамках произвольного универсального множества U определите понятие натурального числа.

11. Для любых двух множеств A и B выполняется ровно одно из следующих пяти соотношений: $A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$, A и B не пустые и не пересекаются, A и B находятся в общем положении. Последнее означает, что множества $A \backslash B$, $B \backslash A$ и $A \cap B$ не пусты. Два множества в общем положении делят объемлющее их множество на четыре части. Сформулируйте понятие того, что n множеств находятся в общем положении.

12. На диаграмме Эйлера – Венна три множества A, B, C в общем положении делят плоскость на восемь частей. Докажите, что четыре окружности на плоскости не могут делить ее на 16 частей. (Известно, что пять перекрывающихся эллипсов могут делить плоскость на 32 части.)

13. Какое наибольшее число различных множеств можно получить из n произвольных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, применяя только операции объединения и пересечения множеств? Покажите, что при n=3 получается 18 множеств. При n=4 имеется 166 множеств.

14. Докажите, что из n множеств, находящихся в общем положении, с помощью операций объединения, пересечения и дополнения получается 2^{2^n} множеств.

15. Чему равно наибольшее число множеств, получаемых из n множеств последовательным применением операций объединения, пересечения и разности?

16. Установите взаимно однозначное соответствие между булеаном $\mathbf{B}(A)$ и множеством всех отображений $f: A\to\{0, 1\}$, называемых *характеристическим функциями* множеств $f^{-1}(1)$.

17. Покажите, что бинарное отношение является всюду определенным тогда и только тогда, когда обратное к нему отношение сюръективно.

18. Докажите, что однозначность бинарного отношения ρ равносильна инъективности обратного отношения ρ^{-1}.

19. Проверьте, что любое отображение f является композицией сюръекции g и инъекции h. Что при этом означает биективность f, инъективность g, сюръективность h?

20. Пусть даны произвольные бинарные отношения ρ, σ между множествами A и B и δ, γ между множествами B и C. Докажите следующие соотношения:

$$\rho\subseteq \sigma \Leftrightarrow \rho^{-1}\subseteq \sigma^{-1} \Leftrightarrow \sigma'\subseteq \rho';\ 1_A\rho=\rho=\rho 1_B;$$
$$(\rho^{-1})^{-1}=\rho;\ (\rho\delta)^{-1}=\delta^{-1}\rho^{-1};$$
$$\rho\subseteq \rho\rho^{-1}\rho,\ \text{причем},\ \rho=\rho\rho^{-1}\rho \Leftrightarrow \rho\ \text{инъективно};$$
$$(\rho\cup\sigma)\delta=\rho\delta\cup\sigma\delta;\ (\rho\cap\sigma)\delta\subseteq \rho\delta\cap\sigma\delta;$$
$$\rho(\delta\cup\gamma)=\rho\delta\cup\rho\gamma;\ \rho(\delta\cap\gamma)\subseteq \rho\delta\cap\rho\gamma.$$

21. Пусть ρ – бинарное отношение между множествами X, Y и $A, B\subseteq X$. Докажите следующие соотношения:

а) $\rho(A\cup B)=\rho(A)\cup\rho(B)$;

б) $\rho(A\cap B)\subseteq \rho(A)\cap\rho(B)$;

в) $(\forall C, D\subseteq X\ \rho(C\cap D)=\rho(C)\cap\rho(D)) \Leftrightarrow \rho$ инъективно.

22. Верны ли утверждения предыдущего упражнения для семейств подмножеств в X?

23. Докажите равенство $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ для любого отображения $f: X\to Y$ и произвольного семейства $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств множества Y.

24. *Дифункциональные соответствия.* Бинарное отношение ρ между множествами A и B называется *дифункциональным*, если для любых $a, c\in A$, $b, d\in B$ из $a\rho b$, $a\rho d$, $c\rho b$ следует $c\rho d$ (равносильно, $\rho\rho^{-1}\rho\subseteq \rho$). Опишите дифункциональные отношения между данными множествами.

25. *Задача Рамсея.* Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых между собой людей.

26. В терминах разбиений опишите все симметричные транзитивные отношения на произвольном множестве.

27. Покажите, что отношение равночисленности ($A\sim B \Leftrightarrow |A|=|B|$) на множестве всех конечных подмножеств универсального множества является эквивалентностью. Что представляет собой соответствующее фактор-множество?

28. На множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел зададим бинарное отношение ρ формулой: $a\rho b$ означает, что $a-b\in \mathbf{Z}$ ($a, b\in \mathbf{R}$). Докажите, что ρ – эквивалентность на $\mathbf{R}$. Дайте геометрическую интерпретацию фактор-множества $\mathbf{R}/\rho$.

29. *Теорема о гомоморфизмах для множеств.* Для всякой сюръекции $f: A\to B$ существует единственная биекция g: $A/\sim\to B$, такая, что $f=\pi g$, где π: $A\to A/\sim$ – каноническое отображение на фактор-множество множества A по отношению равнообразности: $a\sim b \Leftrightarrow af=bf$.

30. Рассмотрим множество $S = \mathrm{B}(X)\setminus\{\varnothing\}$ всех непустых подмножеств непустого множества X. Для любых $A, B\in S$ положим: $A\rho B \Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$. Покажите, что отношение ρ является отношением *сходства* (рефлексивным и симметричным) на S. Заметим, что любое отношение сходства определенным образом сводится к описанному сходству ρ [39].

31. Составьте таблицу на совместимость следующих четырех свойств бинарного отношения между множествами: всюду определенности, однозначности, инъективности и сюръективности.

32. Составьте таблицу на совместимость следующих пяти свойств бинарного отношения на множестве: рефлексивности, симметричности, транзитивности, антирефлексивности и антисимметричности.

33. На пятиэлементном множестве задайте несюръективное транзитивное бинарное отношение. Какими свойствами еще оно обладает?

34. Когда композиция бинарного отношения и обратного к нему отношения является рефлексивным отношением? Симметричным отношением?

4. Задания к главе «Упорядоченные множества»

Введем важные понятия длины, ширины и размерности конечного упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$. Длиной n-элементной цепи считается число $n-1$. *Длиной* X называется наибольшая из длин цепей в X. *Шириной* X называется наибольшее число элементов антицепей в X. Наконец, *размерность* X – это наименьшее число линейных порядков на X, пересечением которых является исходный порядок $\leq$.

На произвольной цепи определяется *интервальная топология*, базой открытых множеств которой служат всевозможные интервалы, начальные и финальные интервалы. Цепь с интервальной топологией называется *линейно упорядоченным пространством* [см.: 20; 40]. Конечные цепи, цепи натуральных и целых чисел дискретны как линейно упорядоченные пространства.

Теория упорядоченных множеств затрагивается в работах [4–7; 8; 11; 13; 14; 16; 19; 20; 22; 30; 31; 37].

35. Отношение порядка на множестве $X=\{a, b, c, d, e, f\}$ задано отношением покрытия: $a < b < e$, $b < f$, $d < c < e$, $c < f$. Найдите все линейные порядки на X, содержащие данный порядок $\leq$.

36. Сколько различных отношений порядка можно задать на n-элементном множестве при $n \leq 4$?

37. Покажите, что с точностью до порядкового изоморфизма существуют: 3 двухэлементных, 5 трехэлементных, 16 четырехэлементных, 63 пятиэлементных, 318 шестиэлементных упорядоченных множеств (нарисуйте их диаграммы Хассе).

38. Проверьте, что число упорядочений n-элементного множества равно: 3 при n=2, 19 при n=3, 219 при n=4.

39. Когда ширина конечного упорядоченного множества равна его мощности?

40. Докажите, что мощность любого конечного упорядоченного множества не превосходит произведения его длины, увеличенной на 1, и его ширины.

41. Решите следующую задачу XIII Московской математической олимпиады. Пусть натуральные числа 1, 2, 3, …, 101 выписаны в ряд в некотором порядке. Покажите, что из этого ряда можно вычеркнуть 90 чисел так, чтобы оставшиеся 11 чисел были расположены либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

42. Для натуральных чисел m и n постройте упорядоченное множество мощности $(m+1)n$ длины m и ширины n.

43. Постройте конечное связное упорядоченное множество наибольшей (и наименьшей) мощности длины 4, ширины 3 с двумя минимальными и с тремя максимальными элементами.

44. Докажите известную лемму Кенига: упорядоченное множество конечно, если конечны все его цепи и антицепи.

45. Докажите, что любой порядок на произвольном непустом множестве X можно *линейно доупорядочить*, то есть расширить до некоторого линейного порядка на X (Э. Шпильрайн).

46. Убедитесь в корректности определения размерности конечных упорядоченных множеств.

47. Покажите, что все упорядоченные множества мощности ≤ 5, не являющиеся цепями, имеют размерность 2.

48. Постройте шестиэлементное упорядоченное множество размерности 3.

49. Как определить размерность бесконечного упорядоченного множества?

50. Что такое линейный строгий порядок $<$ на множестве X? Докажите, что бинарное отношение на X, являющееся дополнением линейного строгого порядка $<$, будет линейным порядком на X.

51. Пусть $\langle X, \leq \rangle$ – упорядоченное множество. Элементы $x, y \in X$ назовем $<$-несравнимыми, если $\urcorner(x< y) \& \urcorner(y< x)$. Покажите, что отношение $<$-несравнимости на X является эквивалентностью $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y, z \in X\ (x< z \Rightarrow (x< y) \vee (y< z)).$$

52. Докажите *принцип двойственности для упорядоченных множеств*: если некоторое предложение об упорядоченных множествах верно для всех упорядоченных множеств, то верно и двойственное предложение, получающееся из данного заменой отношения $\leq$ на отношение $\geq$, и обратно. Приведите примеры двойственных понятий и двойственных теорем.

53. Если на множестве A задано отношение порядка $\leq$, то бинарное отношение $<$, определяемое как пересечение отношений $\leq$ и $\neq$, есть *строгий порядок* (антирефлексивное и транзитивное) на множестве A. Обратно, если $<$ – произвольный строгий порядок на множестве A, то бинарное отношение $\leq$, определяемое как объединение отношений $<$ и $=$, является отношением порядка на множестве A. Тем самым, между порядками и строгими порядками на любом множестве A устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие. Докажите эти утверждения.

54. Пусть ρ – отношение *квазипорядка* (рефлексивное и транзитивное) на множестве A. Для произвольных элементов $a, b \in A$ положим $a \sim b$, если $a\rho b$ и $b\rho a$. Покажите, что отношение $\sim$ является эквивалентностью на A. На фактор-множестве $A/\sim$ задается отношение порядка $\leq$ по формуле

$$\widetilde{a} \leq \widetilde{b} \Leftrightarrow a\rho b \text{ для любых } a, b \in A.$$

Проверьте корректность этих утверждений.

55. Докажите, что для любого натурального числа n существует конечное упорядоченное множество размерности n. Например, можно взять булеан n-элементного множества.

56. Докажите, что отношение порядка $\leq$ на множестве X есть пересечение двух линейных порядков $\Leftrightarrow$ отношение $<$-несравнимости на X является отношением сравнимости для некоторого порядка на X.

57. Найдите на **N** неполный линейный порядок и новый полный порядок.

58. Докажите, что произвольная цепь полна тогда и только тогда, когда она полна сверху и имеет наименьший элемент. Сформулируйте двойственное утверждение.

59. Докажите, что понятия условно полной сверху цепи, условно полной снизу цепи и условно полной цепи равносильны.

60. Убедитесь, что изотонная биекция одной цепи на другую есть (порядковый) изоморфизм данных цепей.

61. Проверьте, что всякое вполне упорядоченное множество есть цепь.

62. Докажите, что упорядоченное множество удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда в нем нет бесконечных (строго) убывающих последовательностей.

63. Известно, что рассуждения по трансфинитной индукции проводятся на вполне упорядоченных множествах, в частности обычная математическая индукция – на **N**. Нетерова индукция ведется по упорядоченным множествам с условием минимальности. Выясните, что такое нетерова индукция.

64. Покажите, что изотонное инъективное отображение конечного упорядоченного множества в себя является изоморфизмом.

65. Верно ли данное утверждение для бесконечных упорядоченных множеств?

66. Как можно обобщить упражнение 64?

67. Докажите, что в классе конечных упорядоченных множеств теорема о неподвижной точке неверна. Приведите соответствующий контрпример.

68. Докажите, что бесконечное вполне упорядоченное множество, имеющее единственный предельный элемент (наименьший элемент), изоморфно цепи **N**.

69. Какие вполне упорядоченные множества имеют два предельных элемента? $n > 2$ предельных элементов?

70. Докажите хаусдорфовость и нормальность линейно упорядоченных пространств.

71. Покажите, что для дискретности линейно упорядоченного пространства X необходимо и достаточно, чтобы каждый ненаименьший элемент цепи X имел предыдущий элемент, а каждый ненаибольший ее элемент имел последующий элемент.

72. Сепарабельность линейно упорядоченного пространства X эквивалентна существованию в цепи X счетного плотного в X подмножества. Докажите это.

73. Докажите, что топология подпространства Y линейно упорядоченного пространства, вообще говоря, сильнее интервальной топологии цепи Y. Приведите соответствующий пример.

74. Убедитесь в том, что цепь изоморфна **Z** тогда и только тогда, когда все ее финальные интервалы изоморфны **N**, а все начальные интервалы антиизоморфны **N**.

75. Почему каждый интервал цепи **Q** изоморфен **Q**?

76. Докажите, что цепь X без наименьшего и наибольшего элементов изоморфна **R** тогда и только тогда, когда X плотна, сепарабельна, и любая последовательность вложенных отрезков в X имеет непустое пересечение.

77. Докажите, что линейно упорядоченное поле P изоморфно полю **R** с обычным порядком тогда и только тогда, когда P архимедово и все фундаментальные последовательности в нем являются сходящимися.

78. Пусть $Y=X\cup\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ – упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества X добавлением «новых» наименьшего $\boldsymbol{0}$ и наибольшего $\boldsymbol{1}$ элементов. Могут ли упорядоченные множества X и Y быть изоморфными?

79. Докажите, что любое конечное упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству (с индуцированным порядком) упорядоченного множества $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ с сохранением имеющихся точных верхних граней.

5. Задания к главе «Решетки»

Собственный идеал P решетки L называется *простым*, если для любых элементов $a, b \in L$ из $ab \in P$ следует $a \in P$ или $b \in P$. Положим Spec L – множество всех простых идеалов решетки L. Через $\mathrm{D}(a)$ обозначается множество всех тех простых идеалов в L, которые не содержат элемент $a \in L$: $\mathrm{D}(a)=\{P \in \mathrm{Spec}\, L\colon a \notin P\}$. Множества вида $\mathrm{D}(a)$ образуют базу топологии (открытых множеств) на Spec L – *стоуновской топологии* на Spec L. Ее открытыми множествами служат множества

$$\mathrm{D}(I)=\{P\in \mathrm{Spec}\, L\colon I \text{ не содержится в } P\}$$

по всем подмножествам I в L. В результате получаем топологическое пространство Spec L (при условии Spec $L\neq\varnothing$), называемое *простым спектром* решетки L.

Теории решеток посвящены книги [5; 9; 28; 29; 35; 37], глава V справочника [32].

80. Выведите законы идемпотентности в решетках из остальных решеточных аксиом.

81. Докажите, что в любой решетке L наибольший элемент 1 определяется каждым из условий: $\forall x\in L\ x+1=1$; $\forall x\in L\ x\cdot 1=x$.

82. Докажите, что в решетках L наименьший элемент 0 определяется каждым из условий: $\forall x\in L\ x+0=x$; $\forall x\in L\ x\cdot 0=0$.

83. Покажите, что любая $(n+2)$-элементная решетка получается из единственного (с точностью до изоморфизма) n-элементного упорядоченного множества.

84. Всякое ли n-элементное упорядоченное множество получается из $(n+2)$-элементной решетки отбрасыванием наибольшего и наименьшего элементов?

85. Постройте диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток.

86. Докажите, что в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать:

$$a \le b \text{ и } c \le d \text{ влекут } a+c \le b+d \text{ и } ac \le bd.$$

87. Докажите, что в любой решетке выполняется тождество

$$(xy+xz)(xy+yz)=xy.$$

88. Покажите, что если в решетке $a+b+c=abc$, то $a=b=c$.

89. Во всякой ли решетке выполняется тождество

$$xy+xz+yz=(x+y)(x+z)(y+z)?$$

90. Покажите, что в произвольной решетке верны неравенства

$$ab+ac \le a(ab+c) \le a(b+c).$$

91. Найдите все подрешетки шестиэлементных решеток.

92. Найдите все подрешетки и идеалы пятиэлементной цепи.

93. Наименьший элемент решетки обычно называется *нулем* и обозначается 0, а наибольший элемент решетки часто называется *единицей* и обозначается 1. Докажите, что нулевой элемент 0 (единичный элемент 1) произвольной решетки, если он существует, определяется любым из тождеств $0a = 0$, $0+a = a$ (соответственно: $1a = a$, $1+a = 1$).

94. Верна ли теорема о неподвижной точке в классе решеток?

95. Приведите пример изотонного биективного отображения решеток, не являющегося гомоморфизмом.

96. Покажите, что пересечение двух главных идеалов решетки – главный идеал.

97. Когда пересечение всех идеалов решетки непусто? Является ее идеалом?

98. Обязана ли сумма двух идеалов решетки снова быть ее идеалом?

99. Проверьте, что в конечной решетке все идеалы главные.

100. Верно ли обратное утверждение?

101. Верно ли следующее утверждение: если решетка удовлетворяет условию максимальности (минимальности), то все ее идеалы – главные?

102. Отыщите все самодвойственные шестиэлементные решетки.

103. Найдите все подрешетки, идеалы и конгруэнции следующих конечных решеток: пятиэлементных решеток; цепей; прямого произведения двух цепей.

104. Докажите, что модулярность произвольной решетки равносильна отсутствию в ней подрешеток, изоморфных пентагону.

105. В решетках понятия фильтра и простого фильтра двойственны понятиям идеала и простого идеала. Дайте определения фильтра и простого фильтра в решетках.

106. Докажите, что для любого подмножества I произвольной решетки L равносильны следующие свойства:

1) I – простой идеал решетки L;
2) I – идеал, а $L\setminus I$ – фильтр решетки L;
3) $L\setminus I$ – простой фильтр в L;
4) I есть прообраз нуля 0 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}=\{0, 1\}$;
5) $L\setminus I$ – прообраз 1 при гомоморфизме L на $\mathbf{D}$.

107. Дайте пример ограниченной модулярной решетки, в которой существует элемент с бесконечным множеством дополнений.

108. Пусть p – ненулевой элемент решетки L с 0. Докажите, что p есть атом $L \Leftrightarrow pa=0$ или $pa=p$ для всех $a\in L$.

109. Убедитесь, что для любой решетки L отображение D: $L \to \{\mathrm{D}(a)\colon a\in L\}$ является гомоморфизмом решетки L на решетку множеств $\{\mathrm{D}(a)\colon a\in L\}$.

6. Задания к главе «Дистрибутивные решетки»

При изучении дистрибутивных решеток в качестве центральных результатов выступают теоремы о представлении абстрактных дистрибутивных решеток в дистрибутивных решетках из примеров 1–3, 5.

Метод М. Стоуна дает представление любой дистрибутивной решетки как решетки некоторых множеств ее простых идеалов. При этом реализуется функциональный подход:

Теорема Стоуна:

*Произвольная неодноэлементная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $C_{00}(\mathrm{Spec}\, L, \mathbf{D})$ всех непрерывных **D**-значных функций с компактным носителем, определенных на простом спектре Spec L решетки L.*

Здесь $\mathbf{D}=\{0, 1\}$ – топологическая двухэлементная цепь с топологией несвязного двоеточия с замкнутой точкой 0. При этом Spec L будет локально компактным T_0-пространством.

Элемент a решетки L называется: *простым* (неразложимым в произведение), если $a=bc$ влечет $a=b$ или $a=c$; *неразложимым* (в сумму), если $a=b+c$ влечет $a=b$ или $a=c$ ($\forall b, c \in L$).

Обозначим через $X(L)$ упорядоченное множество (с индуцированным порядком) всех неразложимых элементов конечной дистрибутивной решетки L.

Порядковым идеалом упорядоченного множества X называется любое подмножество в X, содержащее вместе с каждым своим элементом и все меньшие его элементы. Порядковые идеалы упорядоченного множества X задают на нем T_0-топологию $J(X)$. Топологическое пространство называется *T_0-пространством*, если открытые множества разделяют его точки.

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решетках гласит (Г. Биркгоф):

Всякая конечная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $J(X(L)$.

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решетках позволяет установить взаимосвязь между категориями конечных дистрибутивных решеток, конечных упорядоченных множеств и конечных T_0-пространств.

Пусть L – неодноэлементная дистрибутивная решетка. Для каждого простого идеала P решетки L ($P\in\mathrm{Spec}\, L$) имеем гомоморфизм f_P: $L\to\mathbf{D}$, для которого $f_P(a)=0 \Leftrightarrow a\in P$ для всех $a\in L$. Рассмотрим отображение

$$\alpha\colon L\to\mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\, L},\ \alpha(a)(P)=f_P(a) \text{ для любых } a\in L \text{ и } P\in\mathrm{Spec}\, L.$$

Отображение α будет изоморфным вложением (инъективным гомоморфизмом) решетки L в прямое произведение $\mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\, L}$, при этом образ $\alpha(a)=(f_P(a))_{P\in\mathrm{Spec}\, L}$ элемента $a\in L$ есть «строка» с P-ми координатами 0 или 1. Кроме того, $\alpha(a)$: Spec $L\to\mathbf{D}$ служит характеристической функцией подмножества D(a) множества Spec L.

Исследованию дистрибутивных решеток посвящены статьи [8; 10]. Дистрибутивные решетки образуют, наряду с ассоциативными кольцами, важный класс полуколец [12; 26; 27].

110. Проверьте, что любая цепь является дистрибутивной решеткой.

111. Покажите, что дистрибутивность решетки эквивалентна выполнению в ней двойственного дистрибутивного закона

$$(x+y)(x+z)=x+yz.$$

112. Докажите, что решетка дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a, b и c имеем: $a+b=a+c$ и $ab=ac$ влекут $b=c$.

113.Убедитесь, что в любой дистрибутивной решетке верно тождество
$(x+y)(x+z)(y+z)=xy+xz+yz$.

114. Будет ли произвольная решетка с тождеством $x(xy+z)=x(y+z)$ дистрибутивной?

115. В дистрибутивной решетке множество $A+B$ является идеалом для любых ее идеалов A и B. Докажите это.

116. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

117. Покажите, что если A и B – главные идеалы в дистрибутивной решетке, то и A+B будет главным идеалом.

118. Докажите, что дистрибутивность решетки эквивалентна дистрибутивности решетки всех ее идеалов.

119. Проверьте, что любая дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке решетки всех ее идеалов.

120. Докажите, что решетка L дистрибутивна $\Leftrightarrow$ простые идеалы в L разделяют ее элементы.

121. Выведите отсюда следующий критерий дистрибутивности решетки: решетка L дистрибутивна $\Leftrightarrow$ отображение D: $L \to \{\mathrm{D}(a)\colon a\in L\}$ – решеточный изоморфизм.

122. Докажите, что дистрибутивность произвольной решетки эквивалентна отсутствию в ней подрешеток, изоморфных пентагону и диаманту.

123. Всякая конечнопорожденная дистрибутивная решетка конечна. Докажите.

124. Могут ли все идеалы бесконечной ограниченной дистрибутивной решетки быть главными?

125. Докажите, что идеалы A и B дистрибутивной решетки являются главными, если идеалы $A\cap B$ и A+B – главные.

126. Докажите, что максимальные идеалы дистрибутивных решеток являются простыми.

127. Найдите простые и максимальные идеалы в дистрибутивных решетках, имеющих не более семи элементов.

128. Может ли дистрибутивная решетка не иметь максимальных идеалов?

129. Обязана ли дистрибутивная решетка содержать 1, если каждый ее собственный идеал лежит в некотором максимальном идеале?

130. Покажите, что главный идеал $(a]$ дистрибутивной решетки L является простым идеалом $\Leftrightarrow$ a – простой элемент в L.

131. Докажите, что для любой дистрибутивной решетки L множества $\mathrm{D}(I)$ по всем идеалам I в L исчерпывают все открытые множества стоуновской топологии на Spec L.

132. Множество $\mathrm{D}(I)$ пусто для некоторого идеала I дистрибутивной решетки $L \Leftrightarrow L$ имеет 0 (при этом $I=\{0\}$). Почему?

133. Докажите, что $\mathrm{D}(a)$=Spec L для некоторого элемента a дистрибутивной решетки $L \Leftrightarrow L$ имеет 1 (при этом a=1).

134. Докажите, что компактность простого спектра дистрибутивной решетки равносильна существованию 1 в ней.

135. Приведите пример ограниченной дистрибутивной решетки, не имеющей атомов.

136. Докажите фундаментальную теорему о конечных дистрибутивных решетках.

137. Проверьте, что для любой неодноэлементной решетки L отображение α: $L\to\mathbf{D}^{\mathrm{Spec}\,L}$ является изоморфным вложением решеток, причем L будет подпрямым произведением семейства решеток $\mathbf{D}$, индексированного множеством Spec L, другими словами, подпрямым произведением $|\mathrm{Spec}\,L|$ экземпляров двухэлементной цепи {0, 1}.

138. Докажите теорему Стоуна о функциональном представлении дистрибутивных решеток.

139. Докажите, что многообразие дистрибутивных решеток является наименьшим нетривиальным многообразием решеток. *Тривиальное многообразие* решеток задается тождеством x=y; оно совпадает с классом всех одноэлементных решеток.

140. Всякое конечное упорядоченное множество X порядково изоморфно упорядоченному множеству $X(J(X))$. Убедитесь в этом.

141. Любое конечное T_0-пространство $\langle X, \tau\rangle$ гомеоморфно $\langle X(\tau), J(X(\tau))\rangle$. Проверьте.

142. Обозначим через C_n n-элементную цепь. Почему $J(C_n) \cong C_{n+1}$?

143. Пусть упорядоченное множество X=$C_m\cup C_n$ есть несвязное объединение цепей. Что представляет собой решетка $J(X)$?

144. Покажите, что для несвязного объединения U двух конечных упорядоченных множеств X и Y выполняется равенство $J(U)$=$J(X)\times J(Y)$, то есть решетка $J(U)$ разложима. Верно ли обратное утверждение?

145. Какие решетки $J(X)$ имеют: антицепи X; булеаны X; произвольные цепи X?

146. Как связаны решетки $J(X)$ и $J(Y)$ двойственных друг другу упорядоченных множеств X и Y?

147. Укажите все топологии на данном n-элементном множестве при $n\leq 4$.

148. Найдите все четырехэлементные T_0-пространства.

149. Докажите, что любая конечная дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке решетки $\langle\mathbf{N}, |\rangle$.

150. Покажите, что главные идеалы решетки $\langle \mathbf{N}, | \rangle$ исчерпывают, с точностью до изоморфизма, прямые произведения конечного числа конечных цепей.

7. Задания к главе «Булевы алгебры»

Теорема Стоуна дает функциональное представление булевых решеток:

Произвольная булева решетка L изоморфна решетке C(Spec L, $\mathbf{D}$*) всех непрерывных* $\mathbf{D}$*-значных на ее максимальном спектре Max L со значениями в дискретной двухэлементной цепи* $\mathbf{D}$.

Заметим, что Max L=Spec L – нульмерный компакт, то есть компактное хаусдорфово пространство с базой из открыто-замкнутых множеств.

Булевой алгеброй называется алгебраическая структура $\langle L, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$, такая, что $\langle L, +, \cdot, 0, 1\rangle$ – дистрибутивная решетка, в которой выполняются тождества $x+1=1$, $x+0=x$, $x+x'=1$ и $xx'=0$ (обычно предполагается, что $1\neq 0$). Тем самым, булевы алгебры в указанной сигнатуре задаются 13 тождествами, образуя многообразие. Как класс булевы алгебры совпадают с булевыми решетками. Но булевы решетки в решеточной сигнатуре не образуют многообразие.

Булево кольцо – это ассоциативное кольцо с тождеством $xx=x$.

Отметим, что булевы решетки и булевы кольца рассматриваются в работах [5; 8; 26; 28; 34; 36; 37].

151. Докажите следующие свойства булевых решеток L ($\forall\ a, b\in L$):

(1) $0'=1$, $1'=0$.

(2) $a''=a$.

(3) $a\leq b \Leftrightarrow b'\leq a' \Leftrightarrow a'+b=1 \Leftrightarrow ab'=0$.

(4) $(a+b)'=a'b'$, $(ab)'=a'+b'$ (законы де Моргана).

(5) $a+a'=1$, $aa'=0$.

152. Покажите, что в любом булевом кольце выполняется тождество $x+x=0$.

153. Докажите коммутативность булевых колец.

154. Проверьте, что всякое конечное булево кольцо имеет единицу.

155. Докажите, что классы булевых решеток и булевых колец с единицей совпадают.

156. Выведите отсюда совпадение классов обобщенных булевых решеток и булевых колец. Решетка называется *обобщенно булевой*, если каждый ее отрезок $[a, b]$, $a< b$, – булева решетка.

157. Докажите, что булевость ассоциативного кольца равносильна тому, что различные элементы кольца имеют различные левые аннуляторы.

158. Найдите неразложимые и простые элементы восьмиэлементной булевой решетки.

159. Докажите, что булеан $\mathrm{B}(M)$ и упорядоченное множество $\mathbf{D}^M$ изоморфны, более того, при каноническом соответствии сохраняются все булевы операции.

160. Дайте прямое доказательство теоремы о строении конечных булевых решеток: любая конечная булева решетка изоморфна булеану множества всех своих атомов.

161. Докажите теорему о функциональном представлении булевых решеток.

162. Выведите из нее теорему о строении конечных булевых решеток.

163. Как формулируется теорема о функциональном представлении булевых колец? Докажите сформулированную теорему.

164. Убедитесь в том, что множество всех дополняемых элементов ограниченной дистрибутивной решетки образует в ней булеву подрешетку.

165. Как коатомы булевой решетки связаны с ее атомами?

166. Если каждый идеал булевой решетки главный, то она конечна. Докажите.

167. Докажите, что булевы решетки с условием максимальности (минимальности) конечны.

168. Установите, что в любой бесконечной булевой решетке существует бесконечная антицепь.

169. Докажите, что в любой бесконечной булевой решетке существует счетное дизъюнктное множество ненулевых элементов.

170. Приведите пример неполной атомной булевой решетки.

171. Приведите пример безатомной булевой решетки.

172. Покажите, что в булевых решетках простые идеалы максимальны.

173. Будет ли всякая неодноэлементная дистрибутивная решетка L, в которой Spec L=Max L, булевой решеткой? Обобщенно булевой решеткой?

174. Докажите, что в любой полной булевой решетке L верны равенства

$$a\cdot\sup B=\sup(aB) \text{ и } a+\inf B=\inf(a+B)$$

для всех $a\in L$ и $B\subseteq L$.

175. Опираясь на это, докажите, что всякая полная атомная булева решетка изоморфна булеану множества всех ее атомов.

8. Заключение

Циклы задач по теории упорядоченных множеств и решеток хорошо подходят в качестве основы выпускных квалификационных работ для студентов математических направлений подготовки. В настоящее время два магистранта кафедры фундаментальной математики ВятГУ выполняют ВКР на темы «Конечные дистрибутивные решетки и их представления» и «Построение конечных топологических пространств», используя задачный материал раздела 6.

В курсе «Упорядоченные множества и решетки» большое внимание уделяется анализу конкретных порядковых объектов, выяснению их специфических, уникальных и общих, универсальных свойств. Например, булеаны выступают и как уникальные решетки со своей абстрактной характеризацией, и как универсальные объекты в многообразии дистрибутивных решеток.

Отметим, что многие задания хорошо известны и взяты из источников, указанных в списке литературы. Некоторые задачи являются авторскими, например задания 31, 32, 41, 64, 69, 78, 79, 114, 120, 143–146, 149, 157.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.
2. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. М. : Изд-во МГУ, 1988. 112 с.
3. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М. : Наука, 1974. 424 с.
4. *Беран Л.* Упорядоченные множества. М. : Наука, 1981. 64 с.
5. *Биркгоф Г.* Теория решеток / пер. с англ. М. : Наука, 1984. 568 с.
6. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Линейно упорядоченные множества // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 2002. Вып. 4. С. 16–27.
7. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Задачи в курсе «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Материалы II Междунар. науч.-практ. конф. «Задачи в обучении математике, физике, информатике: теория, опыт, инновации», посвященной 125-летию П. А. Ларичева. Вологда : ВоГУ, 2017. С. 72–74.
8. *Вечтомов Е. М.* Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Математические заметки. 1993. Т. 53. Вып. 2. С. 15–24.
9. *Вечтомов Е. М.* Теория решеток : учеб.-метод. разработка спецкурса. Киров : Киров. гос. пед. ин-т, 1995. 40 с.
10. *Вечтомов Е. М.* Дистрибутивные решетки, функционально представимые цепями // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. Вып. 1. С. 93–102.
11. *Вечтомов Е. М.* Прямой способ введения отношения порядка в системе Пеано // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. 1998. Вып. 1. С. 6–14.
12. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца: пособие для студентов и аспирантов. Киров : ВятГПУ, 2000. 44 с.
13. *Вечтомов Е. М.* Упорядоченные структуры в курсе математики // Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» (Дубна) : сб. материалов Всерос. конф. М. : МЦНМО, 2000. С. 351–354.
14. *Вечтомов Е. М.* Упорядоченные множества с диаграммой Хассе // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2002. № 6. С. 13–15.
15. *Вечтомов Е. М.* Бинарные отношения // Математика в образовании. 2007. Вып. 3. С. 41–51.
16. *Вечтомов Е. М.* Изучение порядковой структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2010. № 2(1). С. 111–120.
17. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.
18. *Вечтомов Е. М.* О бинарных отношениях для математиков и информатиков // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. 1(3). С. 51–58.
19. *Вечтомов Е. М.* Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 15–34.
20. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учеб. пособие для академ. бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
21. *Вечтомов Е. М.* Философия математики : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 317 с.
22. *Вечтомов Е. М., Варанкина В. И.* Упорядоченные множества с конечным условием минимальности // Вестник Вятского государственного педагогического университета. 2000. № 3–4. С. 11–12.
23. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 1. Киров : «Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. 384 с.
24. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. Т. 2. Киров : «Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. 316 с.
25. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец: монография. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

26. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.
27. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Полукольца, близкие к дистрибутивным решеткам // Международная конференция «Полугруппы и их приложения, включая полугрупповые кольца» : тез. докл. СПб. : РГГИ, 1995. С.90–91.
28. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 456 с.
29. *Коробков С. С.* Введение в теорию решеток : учеб. пособие по спецкурсу. Екатеринбург : Урал. гос. пед. ун-т, 1996. 64 с.
30. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. 2-е изд. М. : Наука, 1973. 400 с.
31. *Общая алгебра. Т. 1* / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М. : Наука, 1990. 592 с.
32. *Общая алгебра. Т. 2* / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М. : Наука, 1991. 480 с.
33. *Оре О.* Теория графов / пер. с англ. 2-е изд. М. : Наука, 1980. 336 с.
34. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики / пер. с англ. М. : Наука, 1972. 592 с.
35. *Салий В. Н.* Решетки с единственными дополнениями. М. : Наука, 1984. 128 с.
36. *Сикорский Р.* Булевы алгебры / пер. с англ. М. : Мир, 1969. 376 с.
37. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. 2-е изд., доп. М. : Наука, 1982. 160 с.
38. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика / пер. с англ. М. : Мир, 1990. 440 с.
39. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. М. : Наука, 1971. 256 с.
40. *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

Practical training on Ordered Sets and Lattices

E. M. Vechtomov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The theory of ordered sets and lattices is considered through a number of exercises and tasks. Basic ordered concepts are defined and important examples are shown. Series of tasks on five topics are given: binary relations, ordered sets, lattices, distributive lattices, and Boolean algebras.

The solving of educational and research tasks is a natural way of mastering math. Of particular importance are the tasks associated with the understanding of the basic structures of mathematics and human thinking, which include the ordinal structure. In the didactics of mathematics, along with the structural approach, the decisive role belongs to the approach through the tasks, that is, the teaching of mathematics through analysis, solving, and formulating of problems. From the 175 assignments given, the following groups of tasks can be distinguished: the use of Hasse diagrams in studying finite ordered sets; properties of linearly ordered spaces; representations of distributive lattices; interconnections of finite ordered sets, finite distributive lattices and finite topological spaces.

Keywords: task, mathematics training, binary relation, order structure, ordered set, lattice, distributivity, Boolean algebra.

References

1. *Aleksandrov P. S. Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to set theory and general topology]. M. Nauka. 1977. 368 p.
2. *Arhangel'skij A. V. Kantorovskaya teoriya mnozhestv* [Kantor set theory]. M. Moscow State University Publ. 1988. 112 p.
3. *Arhangel'skij A. V., Ponomarev V. I. Osnovy obshchej topologii v zadachah i uprazhneniyah* [Fundamentals of general topology in problems and exercises]. M. Nauka. 1974. 424 p.
4. *Beran L. Uporyadochennye mnozhestva* [Ordered sets]. M. Nauka. 1981. 64 p.
5. *Birkgof G. Teoriya reshetok* [Theory of gratings] / transl. from English. M. Nauka. 1984. 568 p.
6. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Linejno uporyadochennye mnozhestva* [Linearly ordered sets] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities of the Volga-Vyatka region. 2002, iss. 4, pp. 16–27.
7. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Zadachi v kurse «Uporyadochennye mnozhestva i reshetki» dlya magistrantov-matematikov* [Tasks in the course of "Ordered sets and lattices" for master students-mathematicians] // *Materialy II Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. «Zadachi v obuchenii matematike, fizike, informatike: teoriya, opyt, innovacii», posvyashchennoj 125-letiyu P. A. Laricheva* – Proceedings of II Intern. scientific – pract. conf. «Problems in teaching mathematics, physics, computer science: theory, experience, innovation», dedicated to the 125th anniversary of P. A. Larichev. Vologda. VoSU. 2017. Pp. 72–74.
8. *Vechtomov E. M. Annulyatornye harakterizacii bulevyh kolec i bulevyh reshetok* [Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1993, vol. 53, iss. 2, pp. 15–24.
9. *Vechtomov E. M. Teoriya reshetok: ucheb.-metod. razrabotka speckursa* [Theory of lattices: educational-method. development of a special course]. Kirov State Ped. In-t. 1995. 40 p.
10. *Vechtomov E. M. Distributivnye reshetki, funkcional'no predstavimye cepyami* [Distributive lattices functionally representable by chains]. // Fundamental and applied mathematics. 1996, vol.2, iss. 1, pp. 93–102.

11. *Vechtomov E. M. Pryamoj sposob vvedeniya otnosheniya poryadka v sisteme Peano* [Direct way of introducing the order relation in the Peano system] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes of the Volga-Vyatka region. 1998, iss. 1, pp. 6–14.

12. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca: posobie dlya studentov i aspirantov* [Introduction to semiring: a manual for students and postgraduates]. Kirov. VyatSU. 2000. 44 p.

13. *Vechtomov E. M. Uporyadochennye struktury v kurse matematiki* [Ordered structures in the course of mathematics] // *Matematika i obshchestvo. Matematicheskoe obrazovanie na rubezhe vekov» (Dubna) : sb. materialov Vseros. konf.* – Mathematics and society. Mathematical education at the turn of the century" (Dubna): materials of all-Russia conf. M. Moscow Center of Continuous Mathematical Education. 2000. Pp. 351–354.

14. *Vechtomov E. M. Uporyadochennye mnozhestva s diagrammoj Hasse* [The poset with the Hasse diagram] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2002, No. 6, pp. 13–15.

15. *Vechtomov E. M. Binarnye otnosheniya* [Binary relations] // *Matematika v obrazovanii* – Math education. 2007, iss. 3, pp. 41–51.

16. *Vechtomov E. M. Izuchenie poryadkovoj struktury* [Study of sequence structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2010, No. 2 (1), pp. 111–120.

17. *Vechtomov E. M. Kurs «Uporyadochennye mnozhestva i reshetki» dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for undergraduates-mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region. 2011, iss. 13, pp. 169–186.

18. *Vechtomov E. M. O binarnyh otnosheniyah dlya matematikov i informatikov* [Binary relations to mathematicians and computer science students] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanities University. 2012, No. 1 (3), pp. 51–58.

19. *Vechtomov E. M. Natural'nyj ryad* [Natural series] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2012, No. 10, pp. 15–34.

20. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : ucheb. posobie dlya akadem. bakalavriata* [Mathematics: basic mathematical structures: educational manual for academ. baccalaureate's]. 2nd publ. M. Yurayt. 2018. 296 p.

21. *Vechtomov E. M. Filosofiya matematiki : ucheb. posobie dlya bakalavriata i magistratury* [Philosophy of mathematics: educational manual for undergraduate and graduate]. 2nd publ. M. Yurayt. 2018. 317 p.

22. *Vechtomov E. M., Varankina V. I. Uporyadochennye mnozhestva s konechnym usloviem minimal'nosti* [Ordered sets with a finite minimality condition] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – Herald of Vyatka State Pedagogical University. 2000, No 3–4, pp. 11–12.

23. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., CHuprakov D. V. EHlementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 1* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol. Vol. 1]. Kirov, Russia. «Publ. "Raduga-PRESS LLC». 2016. 384 p.

24. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., CHuprakov D. V. EHlementy funkcional'noj algebry : monografiya : v 2 t. T. 2* [Elements of functional algebra: monograph: in 2 vol. Vol. 2]. Kirov, Russia. «Publ. "Raduga-PRESS LLC». 2016. 316 p.

25. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., CHermnyh V. V. EHlementy teorii polukolec: monografiya* [Elements of the theory of semirings: monograph]. Kirov. Publishing house «Raduga-PRESS LLC». 2012. 228 p.

26. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication: monograph]. Kirov. Publishing house «Raduga-PRESS LLC». 2015. 144 p.

27. *Vechtomov E. M., CHermnyh V. V. Polukol'ca, blizkie k distributivnym reshetkam* [Semi-rings close to distributive lattices] // *Mezhdunarodnaya konferenciya «Polugruppy i ih prilozheniya, vklyuchaya polugruppovye kol'ca» : tez. dokl.* – International conference «Semigroups and their applications, including semigroup rings» : abstr. of reports. SPb. RSHU. 1995. Pp. 90–91.

28. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok* [General theory of lattices] / transl. from Eng. M. Mir. 1982. 456 p.

29. *Korobkov S. S. Vvedenie v teoriyu reshetok : ucheb. posobie po speckursu* [Introduction to the theory of lattices : educational manual for spec. course]. Yekaterinburg. Ural State Ped. University. 1996. 64 p.

30. *Kurosh A. G. Lekcii po obshchej algebre* [Lectures on general algebra]. 2nd publ. M. Nauka. 1973. 400 p.

31. *Obshchaya algebra* – General algebra. Vol. 1 / under the general editorship of L. A. Skornyakova. M. Nauka. 1990. 592 p.

32. *Obshchaya algebra* – General algebra. Vol. 2 / under the general editorship of L. A. Skornyakova. M. Nauka. 1991. 480 p.

33. *Ore O. Teoriya grafov* [Theory of graphs] / transl. from English. 2nd publ. M. Nauka. 1980. 336 p.

34. *Raseva E., Sikorskij R. Matematika metamatematiki* [Mathematics of metamathematics] / transl. from English. M. Nauka. 1972. 592 p.

35. *Salij V. N. Reshetki s edinstvennymi dopolneniyami* [Lattices with singular additions]. M. Nauka. 1984. 128 p.

36. *Sikorskij R. Bulevy algebry* [Boolean algebras] / transl. from English. M. Mir. 1969. 376 p.

37. *Skornyakov L. A. EHlementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. 2nd publ. M. Nauka, 1982. 160 p.

38. *Stenli R. Perechislitel'naya kombinatorika* [Enumerative combinatorics] / transl. from English. M. Mir. 1990. 440 p.

39. *SHrejder YU. A. Ravenstvo, skhodstvo, poryadok* [Equality, similarity, order]. M. Nauka. 1971. 256 p.

40. *Engelking R. Obshchaya topologiya* [General topology] / translated from English. M. Mir. 1986. 752 p.