УДК 519.145 DOI 10.25730/VSU.0536.19.030

Изучение геометрических преобразований в магистратуре в рамках дисциплины «Элементарная математика в контексте высшей»

Л. В. Тимшина
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. В статье рассматриваются особенности изучения геометрических преобразований в рамках дисциплины «Элементарная математика в контексте высшей», которая входит в обязательные дисциплины вариативной части учебного плана магистратуры для направления подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», профиль «Математика». Намечается проблема разработки соответствующих предметных и учебных задач, освоение которых является совместной деятельностью преподавателя и студента по достижению целей обучения. Представлены примеры учебных заданий для самостоятельной познавательной деятельности студентов.

Ключевые слова: геометрические преобразования, компетенция, магистратура, учебное задание.

В связи с принятием и утверждением новых образовательных стандартов высшего образования, реализующих компетентностно-ориентированный образовательный процесс, необходима существенная корректировка приоритетов и акцентов в содержании образования и способах его развертывания на разных ступенях обучения. Определяющими в современных условиях является набор компетенций как способностей выпускника образовательного учреждения использовать усвоенные знания, учебные умения и навыки, а также способы деятельности для решения практических и теоретических задач. Так, например, в ФГОС ВО по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование» (уровень магистратуры) отмечается, что для решения профессиональных задач у выпускника должны быть сформированы, в частности, следующие компетенции:

– способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу, способность совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень;

– готовность использовать знание современных проблем науки и образования при решении профессиональных задач;

– способность руководить исследовательской работой обучающихся;

– способность анализировать результаты научных исследований, применять их при решении конкретных научно-исследовательских задач в сфере науки и образования, самостоятельно осуществлять научное исследование;

– готовность использовать индивидуальные креативные способности для самостоятельного решения исследовательских задач.

Переход к компетентностной модели выпускника высшего учебного заведения намечен, например, в исследованиях [2; 8; 9].

Ключевые компетенции можно развивать средствами всех учебных дисциплин: как общеобразовательных, так и специальных. Большие возможности в формировании отмеченных компетенций имеют математические дисциплины, преподавание которых расширяет научный кругозор магистрантов педагогических направлений подготовки и ориентирует их на учебно-воспитательный, научно-методический и научно-исследовательский вид будущей профессиональной деятельности.

В учебном процессе средством развития указанных видов деятельности являются адекватные им предметные и учебные задачи, которые формулируются, как правило, в виде учебных заданий. При предъявлении содержания учебного задания необходимо учесть, что магистранты уже освоили первую ступень высшего образования (бакалавриат), имеют достаточную теоретическую подготовку и способны самостоятельно решать многие образовательные задачи.

В ВятГУ магистрантам-педагогам (профиль «Математика») читается курс «Элементарная математика в контексте высшей», в который, в частности, входит геометрический материал. Приведем здесь слова Ф. Клейна из введения ко второму тому «Элементарная математика с точки зрения высшей» [4], которые, на наш взгляд, задают определенную основу методологии преподаваемых геометрических разделов рассматриваемой дисциплины. Обращаясь к слушателям, он отмечает: «На первом плане должен стоять теперь … *энциклопедический момент*; вы должны получить *обзор всей области геометрии*, который даст вам готовые рамки для размещения в них всех отдельных сведений, приобретенных вами за время вашего обучения, чтобы держать их, таким образом, наготове для какого угодно употребления».

В рамках данного курса естественное продолжение получает линия геометрических преобразований, различные аспекты преподавания которой при подготовке учителя математики рассматривались нами ранее в публикации [7].

Метод геометрических преобразований является важнейшим из методов геометрии. Прежде всего, он позволяет оригинально и красиво решать многие геометрические задачи на доказательство, нахождение множеств точек, построение [5; 6]. Этот аспект активно изучается на первой ступени высшего педагогического образования – бакалавриате. Изучаются движения, преобразования подобия и аффинные преобразования. В магистратуре это направление нужно поддерживать, предлагая студентам соответствующие учебные задания. Здесь они могут быть сформулированы в виде методических задач, являющихся основным средством формирования методических умений будущих педагогов. В статье [3] приведен обзор классификаций методических задач и сформулированы требования для проектирования системы таких задач, способствующей профессиональной подготовке учителя. Результат решения методической задачи – это получение педагогических фактов: перечня проблемных вопросов по конкретной теме, тестов для определения уровня знаний учащихся, последовательности операций при показе демонстрационного эксперимента и т. д. Хорошей основой выступают математические задачи, «обрастающие» серией заданий методического характера.

В качестве примера приведем набор геометрических задач, имеющих сходную геометрическую конфигурацию.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC CM-медиана. На катетах AC и BC вне треугольника построены квадраты ACPK и BCДE. Доказать, что прямые CM и ДP перпендикулярны.*

Задача 2. *На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ABGF и BCED. Точка H – середина стороны AC. Докажите, что точка H равноудалена от центров S и Q квадратов.*

Задача 3. *Два квадрата BCDA и BKMN имеют общую вершину B. Доказать, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой (вершины квадратов перечислены по часовой стрелке).*

Решение предложенных задач возможно методом поворота. Рассмотрим решение второй задачи (рис. 1) из предложенного списка. Отметим, что данная задача предлагалась в тренировочном варианте ЕГЭ 2018–2019 учебного года, что подтверждает актуальность изучения метода геометрических преобразований.

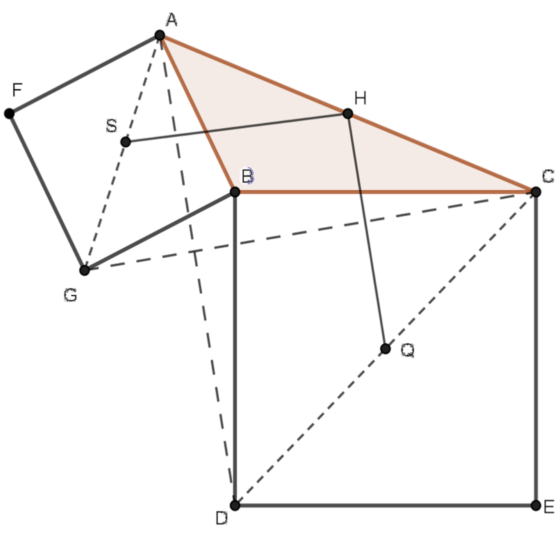

Рис. 1

Решение. Поворот вокруг точки B на угол $90°$ переводит отрезок AD в отрезок GC и тем самым устанавливает равенство и перпендикулярность этих отрезков. Далее из треугольников CAD и AGC, основаниями которых являются рассмотренные отрезки, получаем равенство их средних линий HQ и HS, что и доказывает требование задачи.

Дополнительно получаем тот факт, что отрезки HQ и HS перпендикулярны.

При работе с геометрическими задачами, которые решаются на основе какого-либо геометрического преобразования, можно предложить магистрантам подобрать цепочку взаимосвязанных задач, работа с которыми подводит к решению сформулированной проблемы, обобщить полученный результат, составить новую задачу и т. д. Выполнение студентами методических заданий способствует более глубокому осмыслению изучаемого математического материала, формированию у них профессиональных умений и навыков.

Для самостоятельного осуществления научного исследования и способности руководить исследовательской работой учеников будущим педагогам необходимы умения подбирать и работать с научной литературой, обобщать теоретические знания в докладах, аннотациях, сообщениях, рефератах; умения наблюдать, изучать, анализировать, обобщать опыт учителей с целью применения в собственной педагогической деятельности; умения формулировать гипотезу, проводить эксперимент, применять полученные знания в новых ситуациях, интегрировать знания из различных учебных дисциплин, ставить новые задачи на базе решенной, представлять результаты в форме сообщений, статей, докладов. Все перечисленные виды деятельности необходимо предусмотреть при подготовке учебных заданий.

Следующий пример, на наш взгляд, демонстрирует ценность использования аффинных преобразований евклидовой плоскости в ситуации получения нового геометрического факта.

Задача 4. *Геометрическая интерпретация теоремы Пифагора утверждает, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах (рис. 2). Какую теорему можно получить, подвергнув выражающий теорему Пифагора чертеж произвольному аффинному преобразованию?* [10]

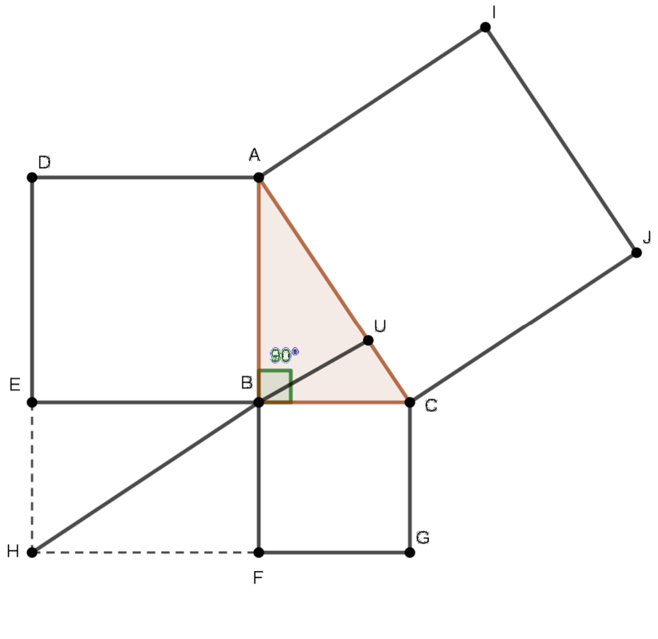

Рис. 2

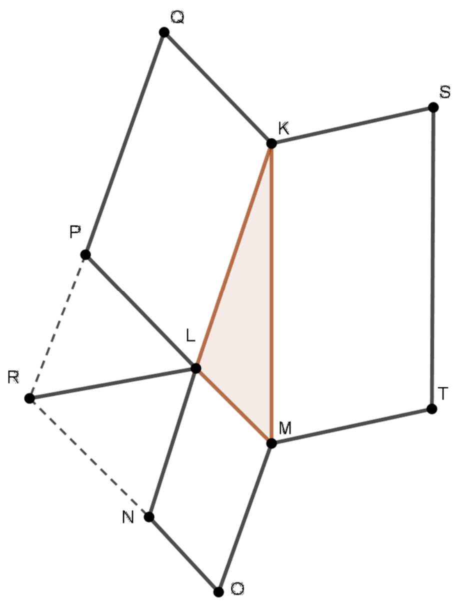

Рис. 3

Решение. На рисунке 3 представлен вид преобразованного чертежа при произвольном аффинном преобразовании. Образом прямоугольного треугольника *ABC* является произвольный треугольник *KLM*. Квадраты преобразуются в параллелограммы. В задаче достаточно просто строятся образы квадратов *ABED* и *BCGF*, так как сохраняется отношение параллельных отрезков. Для построения образа квадрата *AIJC* необходимо заметить, что его сторона *AI* параллельна диагонали *BH* прямоугольника *BFHE* и равна ей по длине. Значит, в новой конфигурации направление стороны *KS* квадрата *KSTM* и ее длина задаются направлением и длиной диагонали *LR* параллелограмма *LNRP*. Вновь полученный чертеж наследует аффинные свойства первоначального чертежа. Как известно, при аффинных преобразованиях площади фигур изменяются в одно и то же число раз. Данный инвариант позволяет сформулировать новое утверждение.

Пусть на сторонах треугольника KLM построены параллелограммы KLPQ, LMON и KSTM (рис. 3). *При условии, что KL : LN = LP : ML и KS = LR и KS параллельна LR, площадь параллелограмма KSTM равна сумме площадей параллелограммов KLPQ и LMON.*

Результатом решения предложенного учебного задания является не только конкретная теорема, но одновременно и метод получения новых теорем.

Применение геометрических преобразований в различных ситуациях, имеющих практическую ценность, повышает учебную мотивацию магистрантов, формирует и развивает интеллектуальные и практические умения.

Особо в теории геометрических преобразований можно выделить преобразования проективные. Расширенная евклидова плоскость является одной из моделей проективной плоскости, что позволяет с новых позиций оценить уже известные факты евклидовой геометрии. Здесь можно выделить два направления. Первое связано с изучением гомологий, второе – с использованием проективных преобразований в решении геометрических задач на доказательство и построение.

Продемонстрируем на примере понятия гомологии приложения проективных преобразований к элементарной геометрии. Гомологией называется проективное преобразование проективной плоскости, имеющее прямую неподвижных точек. Более подробно со свойствами гомологии можно познакомиться, например, в [1]. Особый интерес для приложений к элементарной геометрии представляют такие гомологии расширенной плоскости, которые имеют несобственные центр или/и ось.

Задача 5. *Какие аффинные преобразования порождаются гомологиями расширенной плоскости, имеющими несобственные центр или/и ось?*

Метод решения задачи состоит в том, чтобы выполнить построение образа точки для данного конкретного случая и посмотреть, какому аффинному преобразованию оно соответствует. Рассматривая некоторые частные случаи гомологии (несобственный центр или/и ось) на расширенной евклидовой плоскости, можно установить скрытую связь между такими, казалось бы, разными преобразованиями, как перспективно-аффинное преобразование, гомотетия и параллельный перенос. Тот факт, что гомотетию можно рассматривать как гомологию с несобственной осью и собственным центром, применяется, например, для решения следующей задачи.

Задача 6. *Докажите, что композиция двух гомотетий на евклидовой плоскости есть либо гомотетия, либо параллельный перенос, причем в первом случае центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой, а во втором вектор переноса параллелен прямой, соединяющей центры данных гомотетий.*

Гомология может быть применена в решении задач на построение. Приведем примеры таких задач.

Задача 7. *Постройте прямую, проходящую через данную точку и недоступную точку пересечения двух данных прямых.*

Задача 8. *На чертеже ограниченных размеров даны прямые a и b, пересекающиеся в недоступной точке A, и прямые m и n, пересекающиеся в недоступной точке B. Построить прямую AB.*

Общий подход к решению таких задач состоит в том, чтобы сконструировать некоторую геометрическую конфигурацию, в которой данные и искомые элементы имеют определенный смысл. Например, для решения задачи 7 одну из данных прямых можно принять за ось гомологии, центр которой выбирается произвольно. Данная точка рассматривается как образ некоторой точки на второй данной прямой. Образом этой прямой при выбранной гомологии и будет искомая прямая.

Таким образом, проективные преобразования можно применять для решения задач элементарной геометрии.

Как видно из материалов статьи, изучаемые в вузе теории позволяют иначе взглянуть на решение школьных задач, обосновать решение с новых позиций. Кроме того, предъявление соответствующей системы предметных и учебных заданий формирует компетенции как способность выпускника учебного заведения самостоятельно действовать в различных, в том числе профессиональных, ситуациях.

Список литературы

1. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов : в 2 ч. Ч. 2. М. : Просвещение, 1987. 352 с.

2. *Епишева О. Б.* Формирование профессиональной компетентности выпускника и преподавателя профессионального учебного заведения: вопросы теории и практики : учеб. пособие. Тюмень : ТюмГНГУ, 2010. 300 с.

3. *Игна О. Н.* Методические задачи в профессиональной подготовке учителя: содержание и классификации // Вестник ТГПУ. 2009. Выпуск 7. С. 20–23.

4. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2-х т. Т. 2. Геометрия / пер. с нем. ; под ред. В. Г. Болтянского. 2-е изд. М. : Наука, 1987. 416 с.

5. *Понарин Я. П.* Геометрия : учеб. пособие. Ростов-на-Дону : Феникс, 1997. 512 с.

6. *Рубанов И. С.* Восемь ремней для мотора, или Как применять геометрические преобразования к решению задач // Математический вестник педвузов Волго-Вятского региона. Вып. 2. Киров : Изд-во Вятского госпедуниверситета, 2000.

7. *Тимшина Л. В.* Профессиональная подготовка учителя математики к преподаванию геометрических преобразований в средней школе // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2008. № 4 (1). С. 51–54.

8. *Хуторской А. В.* Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. 2003. № 2. С. 59–68.

9. *Шадриков В. Д.* Новая модель специалиста: инновационная подготовка и компетентностный подход // Высшее образование сегодня. 2004. № 8. С. 26–31.

10. *Яглом И. М., Ашкинузе В. Г.* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М., 1962. Ч. I. 247 с.

The study of geometric transformations in the magistracy within the discipline "Elementary mathematics in the context of the higher mathematics"

L. V. Timshina
senior lecturer, Department of fundamental mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The article deals with the features of the study of geometric transformations within the discipline "Elementary mathematics in the context of higher mathematics", which is included in the compulsory disciplines of the variable part of the master's plan for the direction of training 44. 04. 01 "Pedagogical education", profile "Mathematics". The problem of development of the corresponding subject and educational tasks which development is a joint activity of the teacher and the student on achievement of the purposes of training is outlined. Examples of educational tasks for independent cognitive activity of students are presented.

Keywords: geometric transformations, competence, magistracy, educational task.

References

1. *Atanasyan L. S., Bazylev V. T. Geometriya : ucheb.posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov: v 2 ch. Ch. 2* [Geometry : textbook for students of physical and mathematical faculties of ped. institutions: in 2 parts. Part 2]. M. Prosveshchenie. 1987. 352 p.

2. *Episheva O. B. Formirovanie professional'noj kompetentnosti vypusknika i prepodavatelya professional'nogo uchebnogo zavedeniya: voprosy teorii i praktiki : ucheb. posobie* [Formation of professional competence of a graduate and teacher of a professional educational institution: theory and practice : tutorial]. Tyumen. TSOGU. 2010. 300 p.

3. *Igna O. N. Metodicheskie zadachi v professional'noj podgotovke uchitelya: soderzhanie i klassifikacii* [Methodological tasks in teacher training: content and classifications] // *Vestnik TGPU* – Herald of TSPU. 2009. Issue 7. Pp. 20–23.

4. *Klein F. Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshej: v 2-h t. T. 2. Geometriya* [Elementary mathematics from the point of view of the higher mathematics: in 2 volumes. Vol. 2. Geometry] / transl. from Germ.; under the editorship of V. G. Boltyansky. 2nd publ. M. Nauka. 1987. 416 p.

5. *Ponarin Ya. P.Geometriya : ucheb. posobie* [Geometry : tutorial]. Rostov-on-Don. Phoenix. 1997. 512 p.

6. *Rubanov I. S. Vosem' remnej dlya motora, ili Kak primenyat' geometricheskie preobrazovaniya k resheniyu zadach* [Eight belts for a motor, or How to apply geometric transformations to solving problems] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of Pedagogical Universities of the Volga-Vyatka Region. Vol. 2. Kirov. Vyatka State University. 2000.

7. *Timshina L. V. Professional'naya podgotovka uchitelya matematiki k prepodavaniyu geometricheskih preobrazovanij v srednej shkole* [Vocational training of a mathematics teacher for teaching geometric transformations in high school] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of the Vyatka State Humanitarian University. 2008. No. 4 (1). Pp. 51–54.

8. *Hutorskoj A. V. Klyuchevye kompetencii kak komponent lichnostno-orientirovannoj paradigmy obrazovaniya* [Key competencies as a component of a personality-oriented education paradigm] // *Narodnoe obrazovanie* – Public Education. 2003. No. 2. Pp. 59–68.

9. *Shadrikov V. D. Novaya model' specialista: innovacionnaya podgotovka i kompetentnostnyj podhod* [New model of a specialist: innovative training and competency-based approach] // *Vysshee obrazovanie segodnya* – Higher education today. 2004. No. 8. Pp. 26–31.

10. Yaglom I. M., Ashkinuse V. G. [Ideas and methods of affine and projective geometry]. M. 1962. Part I. 247 p.