УДК 517.982.2 DOI 10.25730/VSU.0536.19.029

О непрерывных соответствиях между топологическими пространствами*

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. В статье изучаются свойства типа непрерывности соответствий (бинарных отношений) между произвольными топологическими пространствами. Приведены примеры общего характера. В терминах топологических пространств даны критерии того, что: все соответствия между ними непрерывны; все непрерывные соответствия являются конепрерывными; свойства соответствий быть непрерывными, конепрерывными, открытыми, замкнутыми равносильны. Установлена двойственность между категорией топологических пространств со строго непрерывными соответствиями между ними и категорией топологических булеанов и их топологических гомоморфизмов.

Ключевые слова: топологическое пространство, соответствие, непрерывность, дуо-пространство, топологический булеан, двойственность.

Соответствия между множествами

Начнем с определений необходимых нам понятий.

Пусть ρ – *соответствие* (бинарное отношение) между множествами X и Y (из множества X во множество Y), определяемое как некоторое множество упорядоченных пар (x, y) элементов $x\in X$ и $y\in Y$. Точнее говоря, соответствие – это тройка $\langle X, \rho, Y\rangle$, причем $\rho\subseteq X\times Y$ называют также *графиком* соответствия ρ [см. 3].

Если элементы $x\in X$ и $y\in Y$ находятся в отношении ρ, то пишут $x\rho y$. Каждому подмножеству A множества X поставим в соответствие множество

$$\rho(A)=\{y\in Y\colon \exists x\in A\ x\rho y\},$$

называемое *образом множества A* при соответствии ρ.

Отношение равенства на множестве X обозначается 1_X и называется *тождественным отображением* множества X, или *диагональю* на X.

Соответствие ρ^{-1} между множествами Y и X называется *обратным* к соответствию ρ, если

$$\forall x\in X\forall y\in Y(y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y).$$

Для подмножества B множества Y множество $\rho^{-1}(B)=\{x\in X\colon \exists y\in B\ x\rho y\}$ называется *прообразом множества B* при соответствии ρ.

Областью определения соответствия ρ будет множество $D(\rho)=\rho^{-1}(Y)$, а *множеством значений*, или *образом* соответствия ρ, называется множество $\rho(X)=D(\rho^{-1})$.

Пусть наряду с соответствием ρ между множествами X и Y дано соответствие σ между множествами Y и Z. Тогда существует их *композиция* $\rho\sigma$, определяемая как соответствие между множествами X и Z по правилу:

$$x(\rho\sigma)z \Leftrightarrow \exists y\in Y(x\rho y\ \&\ y\sigma z) \text{ для любых } x\in X \text{ и } z\in Z.$$

Легко видеть, что $(\rho\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\rho^{-1}$, $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$, $1_X\rho=\rho$ и $\rho 1_Y=\rho$.

Соответствие ρ между множествами X и Y называется:

всюду определенным, если $D(\rho)=X$, т. е. $1_A\subseteq\rho\rho^{-1}$;

однозначным, если

$$\forall x\in X\forall y_1, y_2\in Y(x\rho y_1\&x\rho y_2 \Rightarrow y_1=y_2), \text{ т. е. } \rho^{-1}\rho\subseteq 1_Y;$$

инъективным,

$$\forall x_1, x_2\in X\forall y\in Y(x_1\rho y\&x_2\rho y \Rightarrow x_1=x_2), \text{ т. е. } \rho\rho^{-1}\subseteq 1_X;$$

* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

© Вечтомов Е. М., 2019

сюръективным, когда $\rho(X)=Y$, т. е. $1_Y \subseteq \rho^{-1}\rho$;

функциональным (функцией, отображением), когда оно всюду определенное и однозначное, т. е. $1_X \subseteq \rho\rho^{-1}$ и $\rho^{-1}\rho \subseteq 1_Y$;

биективным, если оно инъективно, сюръективно и функционально, т. е. $\rho\rho^{-1}=1_X$ и $\rho^{-1}\rho=1_Y$.

Очевидно, что имеют место следующие взаимосвязи:

ρ – всюду определенное $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} – сюръективное,

ρ – однозначное $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} – инъективное,

ρ – биективное $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} – биективное.

Условия типа непрерывности для соответствий между топологическими пространствами

Пусть X, Y –любые топологические пространства и ρ – произвольное соответствие между множествами X и Y. Соответствие ρ назовем:

непрерывным (*конепрерывным*), если прообразы при соответствии ρ открытых (замкнутых) в Y множеств открыты (замкнуты) в подпространстве $D(\rho)$ пространства X;

открытым (*замкнутым*), если образы при соответствии ρ открытых (замкнутых) в X множеств открыты (замкнуты) в подпространстве $\rho(X)$ пространства Y.

Понятия непрерывности, открытости и замкнутости соответствий несколько обобщают аналогичные понятия в случае отображений топологических пространств.

Поскольку $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$, то для соответствий имеет место определенный дуализм, проявляющийся в частности в следующих наблюдениях:

соответствие ρ непрерывно $\Leftrightarrow$ обратное соответствие ρ^{-1} открыто;

ρ конепрерывно $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} замкнуто.

Топологическое пространство назовем *дуо-пространством*, если все его открытые множества замкнуты, равносильно: все замкнутые множества открыты, семейства открытых и замкнутых множеств совпадают, каждое открытое (замкнутое) множество открыто-замкнуто. Дискретные пространства и антидискретные пространства являются дуо-пространствами. В свою очередь, дуо-пространства являются *симметрическими*, т. е. в них замкнутые множества образуют свою топологию, другими словами, пересечение любого семейства открытых множеств симметрического пространства открыто. Отметим также, что только одноточечные топологические пространства являются одновременно дискретными и антидискретными. Общетопологические понятия можно найти в книге [5].

Пример 1. Возьмем недискретное топологическое пространство X и неантидискретное топологическое пространство Y. Это означает, что в пространстве X найдется точка a, для которой множество $\{a\}$ не открыто, и в пространстве Y существует непустое собственное открытое множество B. Определим соответствие ρ между пространствами X и Y, полагая:

$$\rho=(\{a\}\times B)\cup((X\setminus\{a\})\times(Y\setminus B)).$$

Получаем всюду определенное сюръективное соответствие ρ между топологическими пространствами X и Y, не являющееся ни непрерывным, ни конепрерывным. При этом соответствие ρ^{-1} между пространствами Y и X не открыто и не замкнуто.

Предложение 1. *Для произвольных топологических пространств X и Y равносильны следующие утверждения:*

1) *все соответствия между пространствами X и Y непрерывны;*
2) *все соответствия между пространствами X и Y конепрерывны;*
3) *пространство X дискретно или пространство Y антидискретно.*

Доказательство. В силу общего примера 1 каждое из утверждений 1), 2) влечет утверждение 3). Импликации 3)$\Rightarrow$1) и 3)$\Rightarrow$2) очевидны.

Имеет место двойственный результат:

Предложение 2. *Для произвольных топологических пространств X и Y равносильны следующие утверждения:*

1) *все соответствия между пространствами X и Y открытые;*
2) *все соответствия между пространствами X и Y замкнутые;*
3) *пространство X антидискретно или пространство Y дискретно.*

Из предложений 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Для топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) *верны одно из утверждений* 1), 2) *предложения* 1 *и одно из утверждений* 1), 2) *предложения* 2;

2) *все соответствия между X и Y обладают свойствами непрерывности, конепрерывности, открытости и замкнутости;*

3) *выполняется одно из условий: X – одноточечное и Y – любое, Y – одноточечное и X –любое, X и Y дискретны, X и Y антидискретны.*

Предложение 3. *Пусть X и Y – произвольные дуо-пространства. Тогда для соответствий между пространствами X и Y эквивалентны свойства непрерывности и конепрерывности, а также открытости и замкнутости.*

Доказательство очевидно.

Замечание 1. Для однозначных соответствий между топологическими пространствами X и Y понятия непрерывности и конепрерывности эквивалентны. Поэтому примеры непрерывных, но не конепрерывных соответствий и конепрерывных, но не непрерывных соответствий следует искать среди многозначных (не однозначных) соответствий. Заметим еще, что понятия открытости и замкнутости равносильны для инъективных соответствий между пространствами X и Y.

Пример 2. Рассмотрим произвольные топологические пространства X и Y, такие, что X не является дуо-пространством и Y не антидискретно. Это означает, что в пространстве X найдется незамкнутое открытое множество A, а в пространстве Y существует непустое собственное открытое множество B. Положим,

$$\rho=(X\times B)\cup(A\times(Y\setminus B)).$$

Получаем непрерывное открытое всюду определенное сюръективное соответствие ρ между топологическими пространствами X и Y, не являющееся конепрерывным. Действительно, $\rho(C)=B$ или $\rho(C)=X$ для любого подмножества C пространства X. Поэтому ρ открытое. Если U – непустое открытое подмножество пространства Y, то $\rho^{-1}(U)=X$ в случае $U\cap B\neq\varnothing$ и $\rho^{-1}(U)=A$ в случае $U\subseteq Y\setminus B$, значит, ρ непрерывное. Поскольку $\rho^{-1}(Y\setminus B)=A$, то соответствие ρ не конепрерывно. Если же множество B не замкнуто, то $\rho(X\setminus A)=B$ и, стало быть, ρ не замкнуто.

Аналогично, соответствие $\sigma=(X\times(Y\setminus B))\cup((X\setminus A)\times B)$ будет конепрерывным замкнутым всюду определенным сюръективным соответствием между пространствами X и Y, но не непрерывным.

Обратные соответствия ρ^{-1} и σ^{-1} между пространствами Y и X являются всюду определенными сюръективными соответствиями, при этом ρ^{-1} открыто, непрерывно и не замкнуто, а σ^{-1} замкнуто, конепрерывно и не открыто.

Пример 3. Пусть X – недискретное дуо-пространство и Y – топологическое пространство, не являющееся дуо-пространством. Тогда в X существует непустое собственное множество A, не являющееся ни открытым, ни замкнутым, а Y содержит незамкнутое открытое множество B. Рассмотрим всюду плотное открытое в Y множество $C=B\cup(Y\setminus[B])=Y\setminus([B]\setminus B)$, где $[B]$ есть замыкание в Y множества B. Положим,

$$\rho=(X\times C)\cup(A\times(Y\setminus C)).$$

Получаем непрерывное открытое всюду определенное сюръективное соответствие ρ между топологическими пространствами X и Y, не являющееся конепрерывным. Как и в примере 2, соответствие ρ^{-1} между пространствами Y и X будет незамкнутым открытым непрерывным всюду определенным сюръективным соответствием.

Пример 4. Пусть даны неантидискретное дуо-пространство X и недискретное топологическое пространство Y. Это значит, что в пространстве X найдется непустое собственное открыто-замкнутое множество A, а в пространстве Y имеется неоткрытое множество B. Зададим соответствие ρ между пространствами X и Y формулой:

$$\rho=(A\times B)\cup((X\setminus A)\times(Y\setminus B)).$$

Легко видеть, что соответствие ρ непрерывно и конепрерывно, но не открыто и не замкнуто. При этом соответствие ρ^{-1} между пространствами Y и X открыто и замкнуто, но не является ни непрерывным, ни конепрерывным.

Предложение 4. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) *каждое непрерывное соответствие между пространствами X и Y конепрерывно;*
2) *свойства непрерывности и конепрерывности соответствий между X и Y равносильны;*
3) *выполняется одно из условий: X дискретно и Y – любое, Y антидискретно и X – любое, X и Y являются дуо-пространствами.*

Доказательство. Импликация 2)$\Rightarrow$1) очевидна. В силу общих примеров 2 и 3 утверждение 1) влечет утверждение 3). В силу предложений 1 и 3 из утверждения 3) следует утверждение 2).

Справедливо двойственное предложение:

Предложение 5. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) *каждое открытое соответствие между пространствами X и Y будет замкнутым;*
2) *свойства открытости и замкнутости соответствий между X и Y равносильны;*

3) *выполняется одно из условий: X антидискретно и Y – любое, Y дискретно и X – любое, X и Y – дуо-пространства.*

Предложения 4 и 5 влекут

Следствие 2. *Для топологических пространств X и Y свойства непрерывности и конепрерывности, открытости и замкнутости соответствий между X и Y попарно равносильны тогда и только тогда, когда имеет место одно из условий: X – одноточечное и Y – любое, Y – одноточечное и X – любое, X и Y будут дуо-пространствами.*

Задача 1. Верно ли, что утверждение о том, что каждое конепрерывное (замкнутое) соответствие между топологическими пространствами X и Y непрерывно (открыто), эквивалентно утверждениям предложения 4 (соответственно, предложения 5)?

Из следствия 2 и примера 4 вытекает

Следствие 3. *Свойства непрерывности, конепрерывности, открытости и замкнутости соответствий между топологическими пространствами X и Y равносильны друг другу тогда и только тогда, когда верно одно из условий: X – одноточечное и Y – любое, Y – одноточечное и X – любое, X и Y дискретны, X и Y антидискретны.*

Интересно сравнить следствия 1 и 3.

Задача 2. Для каких топологических пространств X и Y все непрерывные соответствия между X и Y будут открытыми; замкнутыми?

Двойственности для категории топологических пространств и их непрерывных соответствий

Далее введем понятия топологического булеана и топологического гомоморфизма топологических булеанов.

Напомним, что *булеаном множества X* называется множество $\mathbf{B}(X)$ всех подмножеств в X, рассматриваемое с отношением включения $\subseteq$. При этом наименьшим элементом $\mathbf{B}(X)$ служит пустое множество $\varnothing$, которое будем называть нулем 0, а наибольшим элементом $\mathbf{B}(X)$ является само множество X, называемое единицей 1 булеана $\mathbf{B}(X)$. Булеан $\mathbf{B}(X)$ является полной атомной булевой решеткой, атомы которой совпадают с одноэлементными подмножествами в X.

Возьмем произвольное соответствие ρ между множествами X и Y. Рассмотрим отображение взятия образов при действии ρ:

$$\boldsymbol{\rho}\colon \mathbf{B}(X)\to\mathbf{B}(Y),\ \boldsymbol{\rho}(A)=\rho(A) \text{ для любого } A\subseteq X,$$

булеана $\mathbf{B}(X)$ множества X в булеан $\mathbf{B}(Y)$ множества Y. Легко видеть, что $\boldsymbol{\rho}$ является *полным $\vee$-гомоморфизмом* булеанов: $\boldsymbol{\rho}(\varnothing)=\varnothing$ и $\boldsymbol{\rho}(\cup A_i)=\cup\boldsymbol{\rho}(A_i)$ для любого непустого семейства $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств A_i множества X.

Если α – полный $\vee$-гомоморфизм булеана $\mathbf{B}(A)$ в булеан $\mathbf{B}(B)$, то задаем соответствие $\rho(\alpha)$ между множествами A и B по формуле:

$$a\rho(\alpha)b \Leftrightarrow b\in\alpha(\{a\}) \text{ для любых } a\in A \text{ и } b\in B.$$

Имеет место

Предложение A [1, предложение 1]. *Для любых множеств X и Y переходы $\rho\to\boldsymbol{\rho}$ и $\alpha\to\rho(\alpha)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между соответствиями ρ между множествами X и Y и полными $\vee$-гомоморфизмами α булеана $\mathbf{B}(X)$ в булеан $\mathbf{B}(Y)$, при этом $\alpha=\boldsymbol{\rho}$.*

Наряду с отображением $\boldsymbol{\rho}$ взятия образов при соответствии ρ определяется отображение взятия прообразов:

$$\rho^{-1}(B)=\{x\in X\colon \exists y\in B\ x\rho y\} \text{ для всех } B\subseteq Y.$$

Получаем полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ булеана $\mathbf{B}(Y)$ в булеан $\mathbf{B}(X)$, отвечающий обратному соответствию ρ^{-1} между множествами Y и X.

Предложение B [1, теорема 1]. *Категория всех множеств с бинарными отношениями между множествами в качестве морфизмов эквивалентна категории булеанов всевозможных множеств и их полных $\vee$-гомоморфизмов.*

Замечание 2. Отметим, что отображения $A\to A$ и $\rho\to\rho^{-1}$ индуцирует антиэквивалентность категории всех множеств A с соответствиями ρ между множествами на саму себя.

Соответствие ρ между топологическими пространствами X и Y назовем:

строго непрерывным, если ρ непрерывно и $D(\rho)$ открыто в X;

строго открытым, если ρ открыто и $\rho(X)$ открыто в Y.

Ясно, что: ρ строго непрерывно $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ строго открыто; всюду определенные непрерывные соответствия строго непрерывны; сюръективные открытые соответствия строго открыты.

Определим двойственность между категорией всех топологических пространств со строго непрерывными соответствиями между ними в качестве морфизмов и категорией топологических булеанов и их топологических гомоморфизмов.

Пусть теперь X – произвольное топологическое пространство. Через $\tau(X)$ обозначим решетку всех открытых множеств пространства X; она является подрешеткой булеана $\mathbf{B}(X)$. Следуя [4, глава III], булеан $\mathbf{B}(X)$ с выделенной подрешеткой $\tau(X)$ назовем *топологическим булеаном* топологического пространства X; можно считать, что в $\mathbf{B}(X)$ задана унарная операция взятия внутренности подмножеств пространства X.

Для топологических пространств X, Y полный $\vee$-гомоморфизм α топологического булеана $\mathbf{B}(X)$ в топологический булеан $\mathbf{B}(Y)$ назовем их *топологическим гомоморфизмом*, если $\alpha(\tau(X))\subseteq \tau(Y)$.

Из предложения А и замечания 2 вытекает

Предложение 6. *Для любых топологических пространств X и Y переходы $\rho\to\boldsymbol{\rho}^{-1}$ и $\alpha\to\rho(\alpha)^{-1}$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между строго непрерывными соответствиями ρ между X и Y и топологическими гомоморфизмами α булеана $\mathbf{B}(Y)$ в булеан $\mathbf{B}(X)$.*

Предложение 7. Рассмотрим следующие категории:

(1) *категория всех топологических пространств X со строго непрерывными соответствиями ρ между топологическими пространствами X и Y в качестве морфизмов;*

(2) *категория всех топологических пространств X и строго открытых соответствий σ между топологическими пространствами Y и X;*

(3) *категория всевозможных топологических булеанов $\mathbf{B}(X)$ и их топологических гомоморфизмов $\boldsymbol{\sigma}$: $\mathbf{B}(Y)\to\mathbf{B}(X)$ при строго открытых соответствиях σ между топологическими пространствами Y и X;*

(4) *категория всевозможных топологических булеанов $\mathbf{B}(X)$ и их топологических гомоморфизмов $\boldsymbol{\rho}^{-1}$: $\mathbf{B}(Y)\to\mathbf{B}(X)$ при строго непрерывных соответствиях ρ между топологическими пространствами X и Y.*

Тогда категория (1) *антиэквивалентна эквивалентным друг другу категориям* (2)–(4).

Доказательство. Полагаем $\sigma=\rho^{-1}$ и применяем предложения 6 и В и замечание 2.

Дополнение

Обозначим через $SCR(X)$ полугруппу всевозможных непрерывных соответствий на топологическом пространстве X (между X и X), рассматриваемую с операцией композиции соответствий. Тождественное отображение 1_X является единицей полугруппы $SCR(X)$. Полугруппа $S(X)$ всех непрерывных отображений $X\to X$ (преобразований пространства X) служит подполугруппой полугруппы $SCR(X)$. Автогомеоморфизмы пространства X образуют подполугруппу в $S(X)$ – группу $G(X)$ обратимых элементов полугруппы $SCR(X)$. Полугруппа $S(X)$ и группа $G(X)$ изучались ранее [2, параграф 4].

Мы анонсируем следующий результат об определяемости топологических пространств:

Теорема. *Произвольные топологические пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы $SCR(X)$ и $SCR(Y)$ их непрерывных соответствий. Более того, изоморфизмы полугрупп $SCR(X)$ и $SCR(Y)$ индуцируются гомеоморфизмами пространств X и Y.*

Отметим, что доказательство данной теоремы будет опубликовано в готовящейся к печати статье Е. М. Вечтомова «Полугруппа непрерывных соответствий на топологическом пространстве».

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Бинарные отношения и гомоморфизмы булеанов // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 3–15.
2. *Вечтомов Е. М.* Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Т. 28. С. 3–46.
3. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
4. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики / пер. с англ. М. : Наука, 1972. 592 с.
5. *Энгелькинг Р.* Общая топология / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

On continuous correspondences between topological spaces

E. M. Vechtomov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of fundamental mathematics,
Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article studies the properties of the continuity type of correspondences (binary relations) between arbitrary topological spaces. General examples are given. In terms of topological spaces, the following criteria are given: all correspondences between them are continuous; all continuous correspondences are contiguous; the

properties of correspondences are to be continuous, contiguous, open, closed are equivalent. The duality between the category of topological spaces with strictly continuous correspondences between them and the category of topological Booleans and their topological homomorphisms is established.

Keywords: topological space, correspondence, continuity, Duo-space, topological Boolean, duality.

References

1. *Vechtomov E. M. Binarnye otnosheniya i gomomorfizmy buleanov* [Binary relations and Boolean homomorphisms] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika, mekhanika, informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics, mechanics, computer science. 2019. Vol. 1 (30). Pp. 3–15.

2. *Vechtomov E. M. Voprosy opredelyaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij* [Issues of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR. Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. All-Russian Institute of Scientific and Technical Information, AS USSR. Algebra. Topology. Geometry. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.

3. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : uchebnoe posobie dlya akademicheskogo bakalavriata* [Mathematics: basic mathematical structures : textbook for academic undergraduate]. 2nd publ. M. Yurait. 2018. 296 p.

4. *Raseva E., Sikorskij R. Matematika metamatematiki* [Mathematics of metamathematics] / transl. from English. M. Nauka. 1972. 592 p.

5. *Engel'king R. Obshchaya topologiya* [General topology] / transl. from Eng. M. Mir. 1986. 752 p.