УДК 519.175.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.014

О перечислении корневых деревьев с заданным числом листьев

В. А. Бызов[1], И. А. Пушкарев[2]

[1]кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3613-5949. E-mail: vbyzov@yandex.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3610-2872. E-mail: god_sha@mail.ru

Аннотация. Задачи перечисления деревьев (как графов) являются классическими, самые естественные из них давно решены [см. 8; 9]. Тем не менее, их классические решения получены и сформулированы в виде неявных функций от производящих функций, так что получить из них конкретную количественную информацию совсем не просто. В данной работе к решению этой задачи применяется агрессивно-примитивный подход, основанный на классической теореме Пойа, позволяющий получать конкретные числовые ответы намного быстрее и легче.

Ключевые слова: корневое дерево, производящая функция, теорема Пойа, симметрическая группа, циклический индекс.

В данной работе объектом исследования выступают корневые деревья. Корневым деревом называется граф, являющийся деревом, с одной выделенной вершиной – корнем. Естественно возникают многообразные задачи перечисления корневых деревьев специальных видов.

Пусть, например, $t(n)$ – количество всех корневых деревьев на n вершинах. Тогда для производящей функции $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n)x^n$ справедливо следующее равенство:

$$T(x) = x \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T(x^m)}{m}\right). \quad (1)$$

Данное соотношение было получено Д. Пойа (G. Pólya) в работе [9]. Кроме того, в [9] приводится асимптотическая оценка последовательности $t(n)$.

Можно рассмотреть задачи более специального вида. Например, Ф. Харари (F. Harary) в статье [8] рассматривал задачу перечисления корневых деревьев с данным числом листьев.

Пусть $t(n, k)$ – количество корневых деревьев на n вершинах, имеющих ровно k листьев. Харари показал, что для двумерной производящей функции $P(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t(n, k)x^n y^k$ выполняется аналогичное соотношение

$$P(x, y) = xy - x + x \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(x^n, y^n)}{n}\right). \quad (2)$$

Тем самым, на данный момент соответствующие перечислительные задачи решены. Однако соотношения (1) и (2) задают функции $T(x)$ и $P(x, y)$ в неявном виде.

В данной работе обсуждается простой метод вычисления в явной форме производящих функций для количества деревьев с заданным числом листьев.

Перечисление корневых деревьев с заданным числом листьев

Приведем точные формулировки определений, необходимых для изложения основного результата.

Выделенную в дереве вершину называют *корнем*.

От корня дерева до произвольной некорневой вершины v существует единственный путь. Все вершины этого пути, кроме самой вершины v, называют *предками* вершины v. Вершину p, которая смежна с v и является ее предком, называют *родителем* вершины v. В этом случае вершина v является *сыном* вершины p. Вершины корневого дерева, не имеющие сыновей, называются *листьями* дерева. На иллюстрациях для простоты будем изображать корневое дерево «сверху вниз»: вершину-родитель выше вершины-сына. Отметим также, что корень дерева – единственная вершина, не имеющая предков.

Символом $t(n,k)$ обозначим количество корневых деревьев на n вершинах, среди которых ровно k листьев. Рассмотрим производящую функцию для последовательности $t(n,k)$ при фиксированном k: $F_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty} t(n,k)x^n$. Для удобства будем считать, что $t(1,1)=1$. Заметим, что при любом фиксированном количестве вершин существует ровно одно корневое дерево с одним листом, откуда $F_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$.

Рассмотрим корневое дерево T с k листьями при $k>1$. Пусть степень корня этого дерева равна m, а $T_1, T_2, ..., T_m$ – поддеревья, корнями которых являются сыновья корня дерева T.

Случай 1. Если $m=1$, то корень дерева соединен с одним поддеревом T_1, у которого тоже k листьев, но на единицу меньше вершин, чем у T.

Случай 2. Если $m>1$, то у каждого из деревьев T_i $(1\le i\le m)$ меньше k листьев, а суммарное количество вершин в деревьях T_i на единицу меньше количества вершин в дереве T. В этом случае дерево T может быть сформировано путем следующих операций. Возьмем произвольное разбиение числа k на m слагаемых. Пусть это разбиение $k=i_1+2i_2+3i_3+\cdots+(k-1)i_{k-1}$, где i_1 – количество слагаемых, равных 1, i_2 – количество слагаемых, равных 2, ..., i_{k-1} – количество слагаемых, равных $k-1$. Выберем i_1 деревьев с одним листом, i_2 деревьев с двумя листьями, ..., i_{k-1} деревьев с $k-1$ листом; при этом для каждого i_s $(1\le s\le k-1)$ выбор осуществляется с возможными повторениями. Сыновьями корня дерева T сделаем корни выбранных поддеревьев.

Так как при перестановке поддеревьев T_i $(1\le i\le m)$ мы получаем дерево, изоморфное исходному, то по теореме Пойа [см., например, 1]:

$$F_k(x)=x\sum\left(Z_{S_{i_1}}(F_1(x),F_1(x^2),\dots)\cdot\ldots\cdot Z_{S_{i_{k-1}}}(F_{k-1}(x),F_{k-1}(x^2),\dots)\right)+xF_k(x), \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям числа k на более чем одно слагаемое: $k=i_1+2i_2+3i_3+\cdots+(k-1)i_{k-1}$. Первое слагаемое в формуле (3) соответствует описанному выше случаю $m>1$, второе слагаемое – случаю $m=1$. В этой формуле применяется обозначение Z_{S_l} для циклового индекса симметрической группы S_l.

Выразив $F_k(x)$ из формулы (3), получим рекуррентное соотношение для последовательности функций $F_1(x), F_2(x), ..., F_k(x), ...$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1. $F_1(x)=\frac{x}{1-x}$;
2. при $k\ge 2$ верно, что

$$F_k(x)=\frac{x}{1-x}\sum\left(Z_{S_{i_1}}(F_1(x),F_1(x^2),\dots)\cdot\ldots\cdot Z_{S_{i_{k-1}}}(F_{k-1}(x),F_{k-1}(x^2),\dots)\right), \tag{4}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям k на более чем одно слагаемое.

Ниже в таблице 1 приведены результаты использования теоремы 1 для получения производящих функций $F_k(x)$ при $2\le k\le 5$. Также в данной таблице приведены номера соответствующих числовых последовательностей в онлайн-энциклопедии OEIS [см. 2–5].

Таблица 1

Производящие функции $\mathbf{F_k(x)}$

k	$F_k(x)$	Номер
2	$\frac{x^3}{(1-x)^3(1+x)}$	A002620
3	$\frac{x^4(1+x^2+x^3)}{(1-x)^5(1+x)(1+x+x^2)}$	A055278
4	$\frac{x^5(1+x+3x^2+5x^3+7x^4+5x^5+5x^6+2x^7+x^8)}{(1-x)^7(1+x)^3(1+x^2)(1+x+x^2)}$	A055279
5	$\frac{x^6(1+4x^2+7x^3+7x^4+12x^5+13x^6+9x^7+10x^8+4x^9+2x^{10}+x^{11})}{(1-x)^9(1+x)^3(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)}$	A055280

Перечисление корневых деревьев с заданным количеством нелистьев

Рассмотрим задачу перечисления корневых деревьев с другой точки зрения. В отличие от предыдущего раздела зафиксируем не количество листьев в деревьях, а количество нелистовых вершин (другими словами, – разницу между количествами вершин и листьев). Во введенных выше обозначениях это приводит к рассмотрению последовательности производящих функций $\hat{F}_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty} t(n+k,n)x^n$. Так как при фиксированном количестве листьев n существует ровно одно корневое дерево, у которого количество вершин равно $n+1$, то $t(n+1,n)=1$. Поэтому $\hat{F}_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$.

Рассмотрим некорневое дерево T на $n+k$ вершинах, в котором k нелистьев, где $k \geq 2$. Представим его в виде, изображенном на рисунке 1.

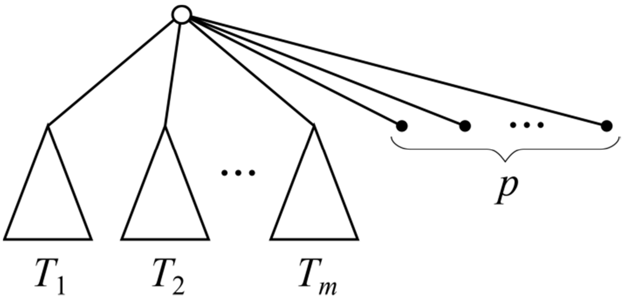

Рис. 1. Иллюстрация к теореме 2

На этом рисунке корень дерева T соединен с m деревьями T_1, T_2, ..., T_m, в каждом из которых больше одной вершины, и с p одиночными вершинами. Суммарно в деревьях T_1, T_2, ..., T_m содержится $k-1$ нелистовая вершина (нелистом является корень дерева T). Общее количество листьев в деревьях T_1, T_2, ..., T_m равно $n-p$, то есть, в зависимости от параметра p, может меняться от 1 до n.

Таким образом, в соответствии с теоремой Пойа можно сформулировать рекуррентное соотношение для последовательности функций $\widehat{F}_k(x)$.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

1. $\widehat{F}_1(x) = \frac{x}{1-x}$;

2. при $k \geq 2$ верно, что

$$\widehat{F}_k(x) = \frac{1}{1-x} \sum \left(Z_{S_{i_1}}\left(\widehat{F}_1(x), \widehat{F}_1(x^2), \dots\right) \cdot \ldots \cdot Z_{S_{i_{k-1}}}\left(\widehat{F}_{k-1}(x), \widehat{F}_{k-1}(x^2), \dots\right) \right), \qquad (5)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям числа $k-1$:

$$k-1 = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \cdots + (k-1)i_{k-1}.$$

Множитель $\frac{1}{1-x}$ в формуле (5) объясняется тем, что, как сказано выше, суммарное количество листьев в деревьях T_1, T_2, ..., T_m может меняться от 1 до n, при этом несложно показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{n} f_s\right) x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ для произвольной последовательности f_n. Стоит также отметить, что, в отличие от теоремы 1, суммирование в формуле (5) происходит по всем разбиениям числа $k-1$, в том числе и по одноэлементному: $k-1 = k-1$.

В таблице 2 приведены производящие функции $\widehat{F}_k(x)$ при $2 \leq k \leq 5$, которые были получены при помощи теоремы 2. Приведены номера соответствующих числовых последовательностей в энциклопедии OEIS [см. 6–7]. Последовательности с производящими функциями $\widehat{F}_4(x)$ и $\widehat{F}_5(x)$ отсутствуют в OEIS.

Таблица 2

Производящие функции $\widehat{F}_k(x)$

k	$\widehat{F}_k(x)$	Номер
2	$\frac{x}{(1-x)^2}$	A000027
3	$\frac{x(1+2x)}{(1-x)^3(1+x)}$	A006578
4	$\frac{x(1+x)^3}{(1-x)^4(1+x+x^2)}$	–
5	$\frac{x(1+7x+17x^2+28x^3+29x^4+25x^5+13x^6+5x^7)}{(1-x)^5(1+x)^2(1+x^2)(1+x+x^2)}$	–

Раскладывая найденные производящие функции в ряд Тейлора, можно найти числа $t(n,k)$. Представим эти числа в виде треугольника: параметр n – номер строки, параметр k – номер столбца (Таблица 3).

Таблица 3

Треугольник чисел $t(n, k)$

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1								
3	1	1							
4	1	2	1						
5	1	4	3	1					
6	1	6	8	4	1				
7	1	9	18	14	5	1			
8	1	12	35	39	21	6	1		
9	1	16	62	97	72	30	7	1	
10	1	20	103	212	214	120	40	8	1

Список литературы

1. *Беккенбах Э. Ф.* Прикладная комбинаторная математика. М. : Мир, 1968. 363 с.
2. A002620 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A002620.
3. A055278 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055278.
4. A055279 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055279.
5. A055280 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055280.
6. A000027 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A000027.
7. A006578 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A006578.
8. *Harary F.* Recent results on graphical enumeration // Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 406. Pp. 29–36.
9. *Pólya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Mathematica. 1937. Vol. 68. Pp. 145–254.

On the enumeration of root trees with a given number of leaves

V. A. Byzov[1], I. A. Pushkarev[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3613-5949. E-mail: vbyzov@yandex.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3610-2872. E-mail: god_sha@mail.ru

Abstract. The problems of enumerating trees (as graphs) are classical, the most natural of them have long been solved [see 8; 9]. Nevertheless, their classical solutions are obtained and formulated in the form of implicit functions from generating functions, so it is not at all easy to get concrete quantitative information from them. In this paper, an aggressively primitive approach is applied to solving this problem, based on the classical Poya theorem, which makes it possible to obtain specific numerical answers much faster and easier.

Keywords: root tree, generating function, Poya's theorem, symmetric group, cyclic index.

References

1. *Beckenbach E. F. Prikladnaya kombinatornaya matematika* [Applied combinatorial mathematics]. M. Mir (World). 1968. 363 p.
2. A002620 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A002620.
3. A055278 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055278.
4. A055279 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055279.
5. A055280 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055280.
6. A000027 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A000027.
7. A006578 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A006578.
8. *Harary F.* Recent results on graphical enumeration // Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 406. Pp. 29–36.
9. *Pólya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Mathematica. 1937. Vol. 68. Pp. 145–254.