УДК 517.2/.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.015

Неравенство Йенсена и его аналог для гармонически выпуклых функций

С. И. Калинин

доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Статья рассматривает неравенство Йенсена и его аналог для гармонически выпуклых функций. Аналогичные неравенства вводятся и для гармонически вогнутых функций. Приводится обоснование соотношения между весовыми средними арифметическим и гармоническим, а также его аналога посредством устанавливаемых в работе теорем.

Работа адресуется всем интересующимся вопросами выпуклых функций и тематикой неравенств.

Ключевые слова: выпуклые, вогнутые функции; гармонически выпуклые функции; неравенство Йенсена, аналог неравенства Йенсена.

Напомним определение понятия выпуклой на промежутке функции.

Пусть *l* – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на *l*.

Определение 1. $f(x)$ – *выпуклая* на рассматриваемом промежутке функция, если для любых $a, b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях данного определения для $a \ne b$ и $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то *f* – строго выпуклая на промежутке *l* функция.

Аналогично определяются понятия вогнутой и строго вогнутой функций, они описываются соответственно неравенствами (1)–(2) с использованием противоположных знаков неравенства.

Очевидно, строго выпуклая (строго вогнутая) функция является выпуклой (вогнутой).

Следует заметить, что если *f* – строго выпуклая или строго вогнутая на отрезке $[a;b]$ функция, то равенство в (1) (соответственно – в противоположном ему неравенстве) может достигаться только в случаях: $a = b$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$.

Для функции f, выпуклой на промежутке *l*, хорошо известно следующее неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad \big(x_k \in l; k = 1, \dots, n\big), \tag{3}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – положительные числа (связанные с числами $x_1, \dots, x_n$ весы), удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Если при этом f – строго выпуклая функция, то (3) может обращаться в равенство только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Неравенство (3) называется *неравенством Йенсена* для рассматриваемой функции.

Ясно, что для вогнутой на промежутке *l* функции f будет выполняться неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad \big(x_k \in l; k = 1, \dots, n\big), \tag{4}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – снова положительные весы, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Подчеркнем, что неравенство Йенсена для выпуклых и вогнутых функций позволяет обосновать ряд классических неравенств, включая неравенства Коши, Коши – Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана [см., например, 3]. Кроме того, это неравенство нередко применяется при решении уравнений и экстремальных задач, особенно при осмыслении математических задач олимпиадной тематики.

В сравнении с неравенством (3) в литературе менее известен его аналог – неравенство

$$f\left(a+b-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \le f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k), \tag{5}$$

где снова $f : l \to \mathbf{R}$ – выпуклая на промежутке *l* функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий *l*; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. Если при этом f – строго выпуклая функция, то (5) может обращаться в равенство только при условии, когда все числа $x_1,\ldots,x_n$ совпадают либо с *a*, либо с *b*.

По своей структуре записи неравенство (5) схоже с неравенством (3), потому в некоторых литературных источниках [напр., 3, 4] его называют *аналогом неравенства Йенсена*. Условимся следовать данной терминологии.

Если в (5) знак неравенства заменить знаком $\ge$, то будем иметь аналог неравенства Йенсена для вогнутой функции.

Аналог неравенства Йенсена для выпуклой (вогнутой) функции обстоятельно рассмотрен в статье [2].

О гармонически выпуклых функциях. В данном пункте мы приведем соответствующие сведения о гармонически выпуклых функциях, опираясь на нашу работу [3].

Пусть $l \subseteq (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – произвольный промежуток и $f : l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 2. Функцию *f* назовем *гармонически выпуклой* на *l*, если для любых $a,b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1}+(1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) \le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \tag{6}$$

Если в условиях определения 2 для $a \ne b$ и всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1}+(1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right) < \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b), \tag{7}$$

то функцию *f* будем называть *строго гармонически выпуклой* на рассматриваемом промежутке *l*.

Очевидно, строго гармонически выпуклая функция является гармонически выпуклой.

Аналогично определяются *гармонически вогнутая* и *строго гармонически вогнутая* функции – для этого в неравенствах (6)–(7) знак неравенства следует поменять на знак $\ge$ (>) соответственно.

В [3] показано, что на всяком промежутке $l \subseteq (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ функция $f(x)=c+\dfrac{\gamma}{x}$, где *c* и γ – вещественные константы, является как гармонически выпуклой, так и гармонически вогнутой; для нее неравенство (6) реализуется со знаком равенства. График такой функции мы условились называть гиперболической кривой (гиперболической дугой). В вопросе геометрической характеризации гармонически выпуклых и гармонически вогнутых функций гиперболическая кривая играет такую же роль, как невертикальная прямая в описании классической выпуклости / вогнутости функции.

Нетрудно показать, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае для их ординат справедливо соотношение $y_1 = y_2$), то соединяющая данные точки гиперболическая дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции. Справедлива следующая

Теорема 1. Для функции f, гармонически выпуклой на промежутке *l*, выполняется неравенство

$$f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) \quad (x_k \in l; k=1,\ldots,n), \tag{8}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ – кортеж значений из промежутка *l*, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Если при этом f – строго гармонически выпуклая функция, то (8) может обращаться в равенство только при условии $x_1 = \ldots = x_n$.

Неравенство (8) условимся называть *неравенством Йенсена для гармонически выпуклой функции.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по *n*. База индукции (выполнение неравенства (8) при $n = 2$) обеспечивается определением гармонической выпуклости функции f на промежутке *l*, а также условиями достижения равенства в соотношении для случая строгой гармонической выпуклости данной функции.

Предположим, что теорема справедлива при $n = m$, $m \geq 2$, при этом если функция f является строго гармонически выпуклой на рассматриваемом промежутке, то равенство в неравенстве Йенсена для чисел $x_1, \ldots, x_m$ может достигаться только при условии $x_1 = \ldots = x_m$. Убедимся в том, что теорема будет верна и при $n = m + 1$.

Пусть числа $x_1, \ldots, x_{m+1}$ принадлежат промежутку *l*, $\lambda_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, m+1$ и $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k = 1$. Введем в рассмотрение величину $\widetilde{x}_m = \left(\dfrac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} x_m^{-1} + \dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} x_{m+1}^{-1} \right)^{-1}$ – взвешенное среднее гармоническое чисел x_m, x_{m+1} с весами $\dfrac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}}$, $\dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}}$. Очевидно, оно принадлежит *l*. В силу индукционного предположения и базы индукции имеем: $f\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k x_k^{-1} \right)^{-1} \right) =$

$$= f\left(\left(\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k x_k^{-1} + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \widetilde{x}^{-1} \right)^{-1} \right) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k f(x_k) + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) f(\widetilde{x}_m) \leq \tag{9}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k f(x_k) + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} f(x_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} f(x_{m+1}) \right) = \tag{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k f(x_k).$$

Таким образом, неравенство (8) выполняется и при $n = m + 1$. Выясним вопрос достижения равенства в нем при условии, когда f – строго выпуклая на рассматриваемом промежутке функция. Упоминаемое равенство будет иметь место только тогда, когда обратятся в равенства соотношения (9) и (10). В (9) будем иметь равенство лишь при условии $x_1 = \ldots = x_{m-1} = \widetilde{x}_m$, а в (10) – только при условии $x_m = x_{m+1}$. Но последнее равенство влечет $x_m = x_{m+1} = \widetilde{x}_m$, следовательно, при $n = m + 1$ в условиях строгой выпуклости f неравенство (8) обращается в равенство лишь тогда, когда $x_1 = \ldots = x_{m+1}$.

Теорема 1 полностью доказана.

Очевидно, теорему 1 можно сформулировать и для гармонически вогнутой на промежутке *l* функции f. Для такой функции неравенство (8) следует заменить противоположным неравенством

$$f\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1} \right)^{-1} \right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad (x_k \in l; k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Если в неравенстве (11) f – строго вогнутая функция, то оно может обратиться в равенство только при условии $x_1 = \ldots = x_n$.

Аналог неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции. В данном разделе мы рассмотрим неравенство, схожее по своей структуре записи с неравенством (8). Упоминаемое неравенство условимся *называть аналогом неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции*. Оно доставляется следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $f : l \to \mathbf{R}$ – гармонически выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий *l*; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – произвольный набор положительных чисел (весов), для которых $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. В данных условиях справедливо неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \le f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \qquad (12)$$

Если при этом f – строго гармонически выпуклая функция, то (12) может обращаться в равенство только тогда, когда все числа $x_1,\ldots,x_n$ совпадают либо с *a*, либо с *b*.

Сразу отметим, что если *f* – гармонически вогнутая на промежутке *l* функция, то для нее будет иметь место неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \ge f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \qquad (13)$$

$$[a;b] \in l;\ x_k \in l,\ \lambda_k > 0\ (k = 1,\ldots,n);\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Условия достижения равенства в (13) в случае строгой гармонической вогнутости функции f будут те же, что и для (12), то есть при совпадении чисел $x_1,\ldots,x_n$ либо с *a*, либо с *b*.

Для доказательства теоремы 2 установим сначала следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. Если функция *f* гармонически выпуклая на отрезке $[a;b]$, не содержащем нуля, то для любого *x*, принадлежащего этому отрезку, будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}\right) \le f(a) + f(b) - f(x). \qquad (14)$$

Если при этом *f* – строго гармонически выпуклая функция, то неравенство (14) обращается в равенство только тогда, когда $x \in \{a, b\}$.

Доказательство. Отметим, что неравенство (14) корректно по записи, поскольку точка $\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}$ принадлежит отрезку $[a;b]$. Это следует из цепочки неравенств:

$$a \le x \le b \Leftrightarrow a^{-1} \ge x^{-1} \ge b^{-1} \Leftrightarrow -a^{-1} \le -x^{-1} \le -b^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} \le a^{-1} + b^{-1} - x^{-1} \le a^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b \ge \left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1} \ge a.$$

Из включения $x \in [a;b]$ следует, что существует $\lambda,\ \lambda \in [0;1]$, такое, что будет иметь место представление $x = \left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda) b^{-1}\right)^{-1}$. Выразим через λ величину $\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}$:

$$\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1} = \left((1-\lambda) a^{-1} + \lambda b^{-1}\right)^{-1}.$$

Тогда в силу гармонической выпуклости функции *f* будем иметь:

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}\right) = f\left(\left((1-\lambda) a^{-1} + \lambda b^{-1}\right)^{-1}\right) \le (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b) = \qquad (15)$$

$$= f(a) + f(b) - \lambda f(a) - (1-\lambda) f(b) \le f(a) + f(b) - f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda) b^{-1}\right)^{-1}\right) = \qquad (16)$$
$$= f(a) + f(b) - f(x).$$

Неравенство (14) доказано.

Выясним условия достижения равенства в нем при том условии, что *f* – строго гармонически выпуклая функция. Для этого следует осмыслить условия достижения равенства в (15) и (16). Такие условия сводятся к тому, что должны иметь место равенства $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, то есть *x* должно совпадать или с *b*, или с *a*.

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Установим неравенство (12). Сначала отметим, что значение

$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)$ существует, поскольку весовое среднее арифметическое $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}$ чисел $x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}$ есть точка из отрезка $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$. Оценим это значение сверху, используя неравенство Йенсена (8) для гармонически выпуклых функций. Будем иметь:

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)=f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)\right)^{-1}\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)^{-1}\right). \tag{17}$$

Но в силу леммы 1

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le f(a)+f(b)-f(x_k),\ k=1,\ldots,n, \tag{18}$$

значит,

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(f(a)+f(b)-f(x_k)\right)=f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k),$$

то есть неравенство (12) установлено.

Ясно, что равенство в нем будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (17), и в неравенствах (18). Если функция *f* является строго гармонически выпуклой, то в (17) равенство может достигаться только при условии $x_1=\ldots=x_n$, а в неравенствах (18) – при условии $x_k\in\{a,b\}$, $k=1,\ldots,n$. Следовательно, в условиях строгой гармонической выпуклости *f* должно быть: или $x_1=\ldots=x_n=a$, или $x_1=\ldots=x_n=b$. Теорема 1 полностью доказана.

Приведем одно следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $f:l\to\mathbf{R}$ – гармонически выпуклая на промежутке *l* функция; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный набор чисел из этого промежутка, перенумерованных в порядке неубывания; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(\left(x_1^{-1}+x_n^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le f(x_1)+f(x_n)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k). \tag{19}$$

Если при этом функция *f* является строго гармонически выпуклой, то неравенство (19) обращается в равенство только при условии $x_1=\ldots=x_n$.

Доказательство этого утверждения, легко видеть, следует из теоремы 2, если в ней положить $a=x_1, b=x_n$.

Замечание 1. Требование монотонности последовательности $x_1,\ldots,x_n$ в условиях следствия 1, очевидно, можно заменить таким: в данной последовательности $x_1=\min_{1\le k\le n}\{x_k\}$, $x_n=\max_{1\le k\le n}\{x_k\}$.

О неравенстве между взвешенными средними гармоническим и арифметическим и его аналоге. Пусть промежуток *l* есть интервал $(0;+\infty)$. Легко проверить, что функция $f(x)=x$ является строго гармонически выпуклой на нем [2]. Следовательно, для нее справедливо неравенство Йенсена (8):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \tag{20}$$

где $x_k > 0, \lambda_k > 0,\ k = 1,\ldots,n$; $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

В неравенстве (20) левая часть есть взвешенное среднее гармоническое чисел $x_1,\ldots,x_n$ с весами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, а правая – аналогичное взвешенное среднее арифметическое данных чисел. Ясно, что равенство в (20) может достигаться только при условии $x_1 = \ldots = x_n$.

В тематике средних величин соотношение (20) обычно кратко записывают в виде

$$H_n \le A_n, \tag{21}$$

памятуя об обозначениях $H_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1} \right)^{-1}$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Применим сейчас к функции $f(x) = x$ теорему 2. Пусть $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий положительному лучу; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – тот же набор весов, что и выше. Введем в рассмотрение величины

$$\widehat{H}_n = \left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1} \right)^{-1},\ \widehat{A}_n = a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ -$$

своеобразные аналоги величин H_n и A_n. Нетрудно видеть, что в силу теоремы 2 для них справедливо неравенство

$$\widehat{H}_n \le \widehat{A}_n. \tag{22}$$

Так как $f(x) = x$ – строго гармонически выпуклая функция, то неравенство (22) может обратиться в равенство лишь тогда, когда либо $x_1 = \ldots = x_n = a$, либо $x_1 = \ldots = x_n = b$.

Список литературы

1. *Калинин С. И.* Аналоги неравенства Йенсена для выпуклых и логарифмически выпуклых функций, их некоторые применения // Advanced science. VyatSU, 2017. № 4.

2. *Калинин С. И.* Геометрическая характеризация гармонически выпуклых функций // Актуальные проблемы физико-математического образования : мат-лы II Международной научно-практической конференции. Наб. Челны : НГПУ, 2017. С. 24–27.

3. *Калинин С. И.* Метод неравенств решения уравнений: учеб. пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М. : Московский Лицей, 2013. 112 с.

4. *Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M., Pečarić J.* A variant of Jensen-Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, J. // Math. Anal. Applics. 2005. N. 307. Pp. 370–385.

5. *Mercer A.* McD. A variant of Jensen's inequality. J. Inequal. In Pure and Appl. // Math. 2003. Vol. 4. Is. 4. Article 73. Pp. 1–2.

Jensen's inequality and its analogue for harmoniously convex functions

S. I. Kalinin

Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The article considers Jensen's inequality and its analogue for harmonically convex functions. Similar inequalities are introduced for harmonically concave functions. The substantiation of the relation between the arithmetic and harmonic weight averages, as well as its analogue by means of the theorems established in the work, is given.

The work is addressed to all those interested in convex functions and the topic of inequalities.

Keywords: convex, concave functions, harmonically convex functions, Jensen's inequality, an analogue of Jensen's inequality.

References

1. *Kalinin S. I. Analogi neravenstva Jensena dlya vypuklyh i logarifmicheski vypuklyh funkcij, ih nekotorye prime-*

neniya [Analogs of Jensen's inequality for convex and logarithmically convex functions, their some applications] // Advanced science. VyatSU. 2017. No. 4.

2. *Kalinin S. I. Geometricheskaya harakterizaciya garmonicheski vypuklyh funkcij* [Geometric characterization of harmoniously convex functions] // *Aktual'nye problemy fiziko-matematicheskogo obrazovaniya : mat-ly II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* – Actual problems of physical and mathematical education : materials of the II International scientific and practical conference. Naberezhnye Chelny. NSPU. 2017. Pp. 24–27.

3. *Kalinin S. I. Metod neravenstv resheniya uravnenij: ucheb. posobie po elektivnomu kursu dlya klassov fiziko-matematicheskogo profilya* [Method of inequalities for solving equations: textbook on the elective course for classes of physical and mathematical profile]. M. Moskovsky licey (Moscow lyceum). 2013. 112 p.

4. *Abramovich S., KlaričićBakula M., Matić M., Pečarić J.* A variant of Jensen-Steffensen’s inequality and quasi-arithmetic means, J. // Math. Anal. Applics. 2005. N. 307. Pp. 370–385.

5. *Mercer A.* McD. A variant of Jensen’s inequality. J. Inequal. In Pure and Appl. // Math. 2003. Vol. 4. Is. 4. Article 73. Pp. 1–2.