

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

---

---

УДК 51-73:621.311

DOI 10.25730/VSU.0536.21.018

## Математическое и численное моделирование энергопреобразования при постоянном потокосцеплении электромеханических систем

**С. Н. Запольских**

кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики, Вятский государственный университет.  
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматриваются электромеханические системы с постоянным потокосцеплением, которые рассчитываются и анализируются с помощью математических и численных моделей, разрабатываемых на основе дифференциальных уравнений механики и электромагнетизма. Системы с постоянным потокосцеплением могут преобразовывать значительную энергию в несколько раз выше, чем традиционные электромеханические системы, величина которой определяется возможностями накопления электромагнитной системой магнитной энергии. Для переключения электрических цепей в таких системах могут использоваться вентили, работающие по сигналам датчиков положения или датчиков, выполняющих их функцию. Такие вентили широко используются в настоящее время в инверторных сварочных источниках. Электромеханические системы с постоянным потокосцеплением еще недостаточно изучены и исследованы. Чтобы глубже разобраться и понять такие системы, уменьшить объем громоздкой экспериментальной работы, особенно на начальных этапах исследований, возникает необходимость в разработке математических и численных моделей. Приводятся результаты исследования энергетических характеристик, полученных с помощью конкретной численной модели электромагнитного двигателя, которые сравниваются с характеристиками традиционных электрических двигателей. Получено повышение работы электромагнитной силы, мощности и КПД.

**Ключевые слова:** математические пакеты программ, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, численное моделирование, накопление магнитной энергии, постоянное потокосцепление.

В рассматриваемых электромеханических системах преобразование магнитной энергии в работу электромагнитной силы в электрических двигателях [9] и преобразование работы внешних сил в магнитную энергию в электрических генераторах [1] осуществляется при постоянном потокосцеплении. Достижения в силовой коммутирующей технике, позволившие повысить передаваемую мощность и частоту коммутации, а также достижения в микропроцессорных системах управления открывают новые возможности для разработки систем с постоянным потокосцеплением. Это связано с применением схемных решений, в которых переключение электрических цепей осуществляется с помощью вентиля по сигналам датчиков положения или датчиков, выполняющих их функцию. Электрический генератор, в котором используется такой принцип, был предложен французами Жак Анри Жаре и Жан Мари Батист Жаре (1984 г.) [7]. Затем был предложен электрический двигатель с постоянным потокосцеплением, который может работать от сети переменного тока и в котором остающаяся магнитная энергия в конце такта используется в последующем цикле работы (2015 г.) [8].

Электромеханические системы с постоянным потокосцеплением еще недостаточно изучены и исследованы. Первые экспериментальные результаты получены для электромагнита с удержанием якоря в начале такта [10]. В работе [6] были приведены исследования энергетических характеристик таких систем с помощью физической и математической модели, в которой дифференциальные уравнения были решены аналитическими методами. Было получено повышение энергетических характеристик. Но учет даже электрических потерь уже требует применения численных методов решения дифференциальных уравнений.

Возникает необходимость в подтверждении повышения энергетических характеристик, необходимость в исследовании и расчете других характеристик, в исследовании возможностей электромеханических систем с постоянным потокосцеплением с помощью математических и численных моделей. Кроме того, возникает необходимость для этих целей в оценке применимости математических программ высокого уровня, например, MathCAD.

Целью работы является разработка математических и численных моделей, пригодных для исследования систем с постоянным потокосцеплением.

Основные законы физики, в частности законы механики и электромагнетизма, представляются в виде дифференциальных и интегральных уравнений. Для описания механического движения используется второй закон Ньютона, представляемый дифференциальным уравнением второго порядка, который для электрического двигателя имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_M(t) - F_A(t), \tag{1}$$

где  $F_M(t)$  – электромагнитная сила;  $F_A(t)$  – внешние силы, действующие на вторичную часть;  $m$  – масса движущихся частей;  $t$  – время.

Электромагнитные процессы описываются законами Ома, законом электромагнитной индукции Фарадея и законом полного тока, которые представлены в виде уравнений электрических и магнитных цепей:

$$i(t)R = U(t) - \frac{d\Psi}{dt}, \tag{2}$$

$$R_M(t)\Phi = wi(t), \tag{3}$$

где  $U(t)$  – напряжение на зажимах обмотки;  $i(t)$  – электрический ток;  $\Psi = w\Phi$  – потокосцепление;  $w$  – число витков;  $R$  – активное сопротивление;  $R_M(t)$  – магнитное сопротивление.

Конструктивная схема численной модели приведена на рис. 1. Из таких элементов могут быть построены любые многополюсные электромеханические преобразователи энергии, линейного или вращательного движения.

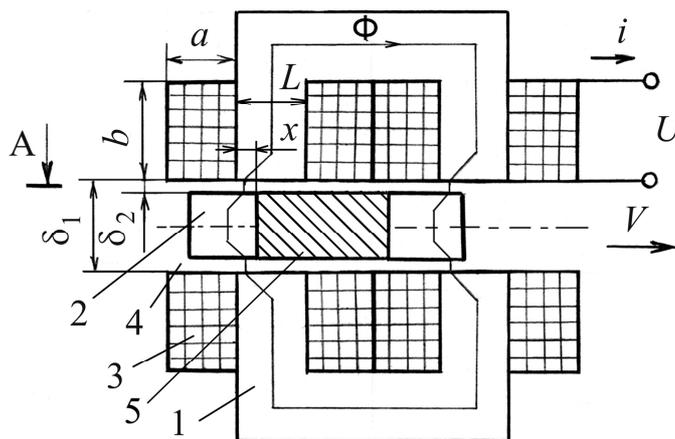


Рис. 1. Конструктивная схема: 1 – первичная часть; 2 – вторичная часть; 3 – обмотка; 4 – рабочий зазор; 5 – электропроводящий элемент.

В математической модели учитываются: электрические и магнитные потери, нелинейность кривой намагничивания, магнитные потоки рассеяния. Интегральные уравнения энергетических характеристик преобразованы в дифференциальные уравнения. Вывод и обоснование расчетных формул сделан в работах [3; 5]. Формулы представлены в виде системы уравнений, пригодные для их решения с помощью современных математических пакетов программ высокого уровня MathCAD [2]:

$$u(x, \Phi) = \frac{1}{w} \cdot (U(x) - R \cdot i(x, \Phi)), \tag{4}$$

$$r(x, \Phi) = 1 + \frac{R_{M\delta}(x) + R_{MM}(\Phi)}{4 \cdot R_{M2}} + \frac{\Phi}{4 \cdot R_{M2}} \cdot \frac{dR_{MM}(\Phi)}{d\Phi}, \tag{5}$$

$$G_F = \frac{a_F \cdot l_M}{4 \cdot \rho_{Fe} \cdot n_F \cdot L}, \tag{6}$$

$$V(K) = \left( \frac{2 \cdot K}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$i(x, \Phi) = (R_{M\delta}(x) + R_{MM}(\Phi)) \cdot \frac{\Phi}{w}, \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = V(K), \quad (9)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{r(x, \Phi)} \cdot \left( u(x, \Phi) - \frac{1}{4 \cdot R_{M2}} \cdot \Phi \cdot V(K) \cdot \frac{dR_{M\delta}(x)}{dx} \right), \quad (10)$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{dR_{M\delta}(x)}{dx} \cdot V(K) + \frac{dR_{MM}(\Phi)}{dx} \cdot \frac{d\Phi(x, K, \Phi)}{dt} \right) \cdot \Phi^2 - F_A(x) \cdot V(K), \quad (11)$$

$$\frac{dW_E}{dt} = U(x) \cdot i(x, \Phi), \quad (12)$$

$$\frac{dW_A}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{dR_{M\delta}(x)}{dx} \cdot V(K) + \frac{dR_{MM}(\Phi)}{dx} \cdot \frac{d\Phi(x, K, \Phi)}{dt} \right) \cdot \Phi^2, \quad (13)$$

$$\frac{dW_D}{dt} = R \cdot i(x, \Phi)^2, \quad (14)$$

$$\frac{dW_F}{dt} = G_F \cdot \left( \frac{d\Phi(x, K, \Phi)}{dt} \right)^2, \quad (15)$$

где  $u(x, \Phi)$  и  $r(x, \Phi)$  – вспомогательные функции;  $x$  – координата положения вторичной части;  $\Phi$  – магнитный поток;  $U(x)$  – напряжение на зажимах обмотки;  $R$  – активное сопротивление;  $i(x, \Phi)$  – электрический ток;  $w$  – число витков;  $R_{M\delta}(x)$  – магнитное сопротивление рабочих зазоров;  $R_{MM}(\Phi)$  – магнитное сопротивление стальных сердечников магнитопровода;  $R_{M2}$  – магнитное сопротивление магнитных потоков рассеяния;  $G_F$  – коэффициент потерь в стали сердечников магнитопровода;  $a_F, l_M$  и  $L$  – толщина, длина и ширина листа электротехнической стали;  $\rho_{Fe}$  – удельное сопротивление электротехнической стали;  $n_F$  – число листов в пакете;  $V(K)$  и  $K$  – скорость и кинетическая энергия вторичной части;  $m$  – масса подвижных частей;  $F_A(x)$  – электромагнитная сила;  $W_E$  – работа источника питания;  $W_A$  – работа электромагнитной силы;  $W_D$  – энергия потерь в проводниках обмотки;  $W_F$  – энергия потерь в сердечниках магнитопровода.

Дифференциальные уравнения, входящие в систему уравнений (4–15), представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, приведенных к нормальному виду. Независимой переменной является время, зависимыми переменными – координата положения вторичной части, кинетическая энергия, магнитный поток, работа источника питания, работа электромагнитной силы, энергии потерь в проводниках обмотки, энергии потерь в сердечниках магнитопровода. Для решения такой системы уравнений и разработки численных моделей используются компьютерные математические пакеты программ высокого уровня, которые могут решать дифференциальные уравнения в численном виде, MathCAD [2–5].

Результаты решения получаются в дискретном виде, которые с помощью функций интерполяции и регрессии могут быть преобразованы в непрерывные функции или представлены в виде комбинации элементарных функций, которые можно затем дифференцировать, интегрировать и использовать в других последующих дифференциальных уравнениях. В результате решения получаются зависимости между переменными, а также посредством численных экспериментов могут быть получены зависимости между параметрами, входящими в систему уравнений. На Рис. 2 приведены графики зависимости энергетических характеристик от времени движения вторичной части для одного из вариантов расчета. Для этого варианта и был проведен численный расчет энергетических характеристик.

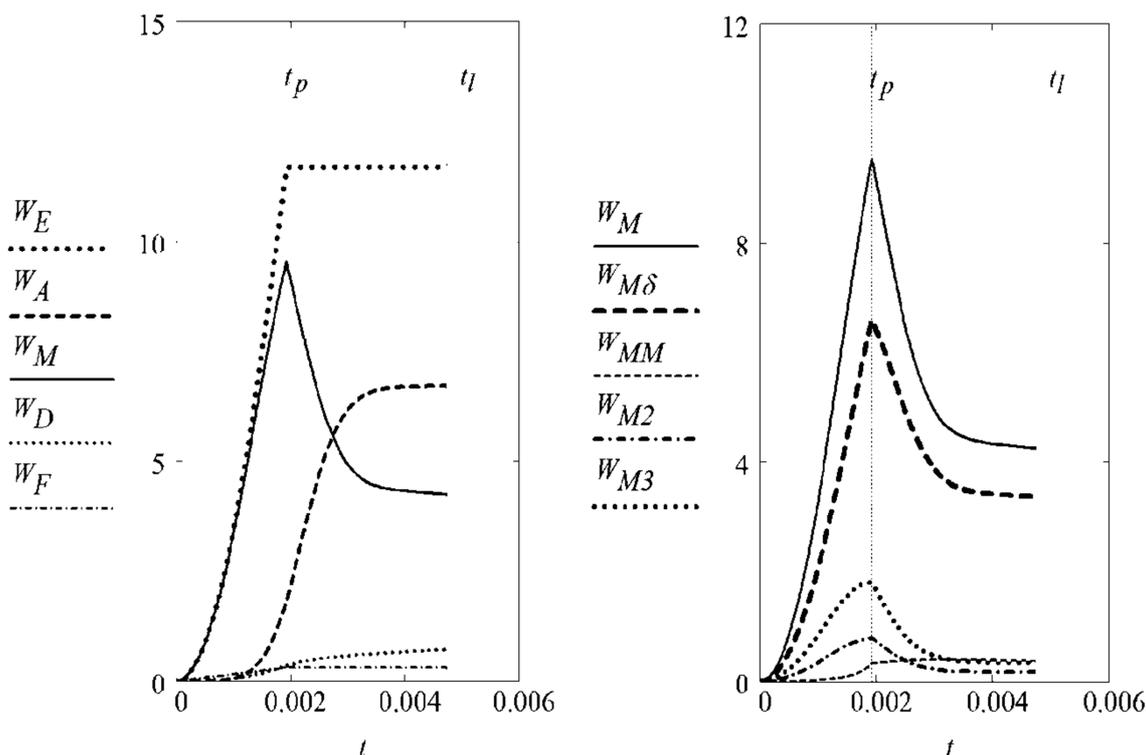


Рис. 2. Зависимость энергетических характеристик от времени:  $W_M$  – полная магнитная энергия;  $W_{M\delta}$  – магнитная энергия в рабочих зазорах;  $W_{MM}$  – магнитная энергия в стальных сердечниках магнитопровода;  $W_{M2}$  – магнитная энергия магнитных потоков рассеяния;  $W_{M3}$  – магнитная энергия боковых магнитных потоков;  $t_p$  – длительность импульса питающего напряжения;  $t_l$  – длительность такта работы.

Прямоугольный импульс напряжения длительностью  $t_p$  подключается в начале такта, когда магнитное сопротивление рабочих зазоров максимальное. В результате этого накапливается магнитная энергия. При подключении источника питания можно считать, что обмотка через источник питания уже замкнута «накоротко». И в этом случае в конце импульса напряжение нужно положить равным нулю. То есть процесс подключения и замыкания обмотки накоротко достаточно было описать функцией напряжения в виде:

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq x \leq x_p \\ 0, & x > x_p \end{cases}, \quad (16)$$

где  $x_p$  – координата, соответствующая окончанию действия импульса напряжения;  $U_0$  – амплитудное значение напряжения.

Удобнее было вначале задать напряжение как функцию координаты положения вторичной части. Временная зависимость напряжения  $U(t)$  получается после решения системы уравнений.

Наименее точным является расчет магнитных потоков рассеяния [5]. Для вывода расчетных формул магнитного сопротивления использовалась формула:

$$R_M = \frac{l_a}{\mu_0 \cdot S_a}, \quad (17)$$

где  $l_a$  – среднее значение длины силовой линии магнитного поля;  $S_a$  – среднее значение площади поперечного сечения, через которую проходят силовые линии.

Магнитные потоки рассеяния и боковые магнитные потоки в начальном положении вторичной части получаются большими. Боковые магнитные потоки включены в общий основной магнитный поток  $\Phi$  [5]. Суммарная магнитная энергия магнитного поля боковых магнитных потоков и потоков рассеяния в конце действия импульса напряжения почти равна половине магнитной энергии, накапливаемой в рабочих зазорах (Рис. 2). В режиме работы с постоянным потокоцеплением в нейтральном положении вторичной части эта энергия уменьшается почти до нуля. Это означает, что в магнитном поле боковых магнитных потоков и потоков рассеяния накопленная магнитная энергия преобразуется в работу электромагнитной силы, что уменьшает «вредное» влияние этих магнитных потоков.

В численных моделях длительность импульса может меняться в широких пределах. Короткий импульс соответствует режиму накопления магнитной энергии в начале такта и дальнейшему преобразованию накопленной магнитной энергии в работу электромагнитной силы при почти постоянном потокосцеплении. Магнитный поток все-таки немного снижается из-за электрических и магнитных потерь. Длинный импульс, равный длительности такта, соответствует непрерывному режиму работы традиционных электрических двигателей. Это дает возможность сравнить режим работы систем с постоянным потокосцеплением и традиционный режим. Коэффициент модуляции магнитного сопротивления был подобран равным четырем (для обычных, самых простых электромагнитов он равен трем). Известно, что электромагнитные двигатели имеют самые низкие энергетические показатели, но они просты по конструкции, имеется большая потребность в их функциональных возможностях, поэтому они очень широко используются в технике.

Электрический двигатель численной модели (Рис. 1) имеет размеры  $0,12 \times 0,11 \times 0,096$  м. Для непрерывного традиционного режима работы работа электромагнитной силы за такт составила 1,59 Дж, мощность 80,1 Вт, КПД 0,245. Для того же двигателя, но работающего в режиме постоянного потокосцепления (Рис. 2), работа электромагнитной силы составила 6,39 Дж, мощность 675 Вт, а КПД 0,548. Таким образом, было получено увеличение работы электромагнитной силы в 4,02 раза, КПД – в 2,24 раза, что сопоставимо с опытными результатами для двигателя с удержанием якоря в начале такта [10], для которого было получено увеличение энергии удара в четыре раза, КПД более чем в два раза. Результаты также сопоставимы и с теоретическими исследованиями [6; 9].

Мощность двигателя возросла значительно больше, в 8,43 раза. Это связано с тем, что электромагнитная сила и работа электромагнитной силы для двигателя с постоянным потокосцеплением возрастает, скорость движения вторичной части увеличивается, время такта уменьшается. Это и приводит к тому, что двигатель в единицу времени будет совершать больше циклов преобразования энергии, поэтому мощность возрастает сильнее, чем работа электромагнитной силы за такт.

При использовании остающейся магнитной энергии в последующем цикле работы [8] КПД дополнительно повышается до 0,861, что уже приближается к асинхронным двигателям, повышение мощности при этом получается даже выше. Для двигателя с коэффициентом модуляции магнитного сопротивления рабочих зазоров равным двадцати получаются более высокие энергетические показатели [4].

Характеристики численной модели двигателя, работающего в непрерывном режиме, сравнивались с характеристиками известного традиционного электромагнитного двигателя насоса «Малыш-М», предназначенного для перекачивания жидкости [11]. Насос имеет размеры: диаметр 0,099 м и длину 0,25 м, а его двигатель занимает почти половину его объема, что приблизительно соответствует размерам численной модели двигателя. Электрический двигатель насоса потребляет мощность 300 Вт. Известно, что КПД электромагнитных двигателей составляет (20 ÷ 35) %, полезная мощность двигателя насоса должна быть равна (60 ÷ 105) Вт, что сопоставимо с мощностью численной модели двигателя, работающего в непрерывном режиме, 80,1 Вт.

При проектировании конкретных образцов также необходимо будет учитывать множество других технических факторов, влияющих на работу двигателя, например, таких как прочностные характеристики используемых материалов, вибрации, уменьшение индукции магнитного поля при использовании ферритов для сердечников магнитопровода при переходе к более высоким частотам энергопреобразования и так далее. Это приведет к поиску различных компромиссных решений и, как следствие этого, к некоторому снижению возможностей, даваемых электромеханическими системами с постоянным потокосцеплением.

Разработка численных моделей является многоэтапным процессом. После получения новых данных как с помощью численных моделей, так и из других источников, и также при учете других факторов, влияющих на работу исследуемой системы, и при более точном учете параметров, модель может уточняться и дополняться. При этом разработку численных моделей целесообразно начинать с моделей, для которых решения дифференциальных уравнений можно вначале получить в аналитическом виде.

Таким образом, разработана математическая и численная модель для систем с постоянным потокосцеплением. Полученные результаты подтверждают повышение энергетических характеристик электромеханических систем с постоянным потокосцеплением. Получено дополнительное повышение мощности. Из полученных результатов можно заключить, что магнитные потоки рассеяния и боковые магнитные потоки тоже накапливают магнитную энергию, которая в системах с постоянным потокосцеплением тоже преобразуется в работу электромагнитной силы. Численная модель также позволит получить и другие характеристики. Система MathCAD оказалась очень удобной, достаточно быстродействующей для численного моделирования систем с постоянным пото-

косцеплением. Математические и численные модели и результаты исследований могут быть использованы при проведении опытно-конструкторских работ, для разработки методик расчета, также использованы в учебных целях.

### Список литературы

1. Бут Д. А., Алиевский Б. Л., Мизюрин С. П., Васюкевич П. В. Накопители энергии. Электродинамические накопители энергии. М. : Энергоатомиздат, 1991. 394 с.
2. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Вычисление в Mathcad. СПб : Питер, 2006. 554 с.
3. Запольских С. Н., Борисов А. А., Бобров А. С. Физические принципы преобразования энергий в электромагнитных системах с предварительным накоплением магнитной энергии // Advanced science. 2017. № 1. Физико-математические науки.
4. Запольских С. Н., Борисов А. А., Хлебов А. Г. Исследование энергетических характеристик электромагнитных систем с предварительным накоплением магнитной энергии на численных моделях // Advanced science. 2017. № 2. Физико-математические науки.
5. Запольских С. Н. Импульсные системы с индуктивными накопителями энергии. Киров : ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012. 121 с.
6. Запольских С. Н. Исследование и анализ электромагнитных систем с постоянным потокосцеплением с помощью физической модели // Advanced science. 2019. № 4. Физико-математические науки.
7. Патент № 1066469 СССР. Генератор возвратно поступательного движения / Жак Анри Жарре, Жан Мари Батист Жарре (Франция). БИ, 1984, № 1.
8. Патент № 2560079 РФ. Электрический двигатель / С. Н. Запольских, А. А. Борисов. БИ, 2015, № 23.
9. Ряшенцев Н. П., Ряшенцев А. Н. Электромагнитный привод линейных машин. Новосибирск : Наука, 1985. 153 с.
10. Ряшенцев Н. П., Угаров Г. Г., Львицин А. В. Электромагнитные прессы. Новосибирск : Наука, Сиб. отделение, 1989. 216 с.
11. Электронасос «Малыш-М». Руководство по эксплуатации 70ТНП.РЭ.

## Mathematical and numerical modeling of energy conversion with constant flow coupling of electromechanical systems

S. N. Zapolskih

PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

**Abstract.** Electromechanical systems with a constant flow coupling, which are calculated and analyzed using mathematical and numerical models developed on the basis of differential equations of mechanics and electromagnetism. Systems with constant flow coupling can convert significant energy several times higher than traditional electromechanical systems, the value of which is determined by the possibilities of accumulation of magnetic energy by the electromagnetic system. To switch electrical circuits in such systems, valves operating on the signals of position sensors or sensors performing their function can be used. Such valves are widely used nowadays in inverter welding sources. Electromechanical systems with constant flow coupling have not yet been sufficiently studied and investigated. In order to better understand and understand such systems, to reduce the volume of cumbersome experimental work, especially at the initial stages of research, there is a need to develop mathematical and numerical models. The results of the study of the energy characteristics obtained using a specific numerical model of an electromagnetic motor are presented, which are compared with the characteristics of traditional electric motors. An increase in the work of electromagnetic force, power and efficiency was obtained.

**Keywords:** mathematical software packages, differential equations, mathematical modeling, numerical modeling, magnetic energy accumulation, constant flow coupling.

### References

1. But D. A., Alievskij B. L., Mizyupin S. P., Vasyukevich P. V. *Nakopiteli energii. Elektrodinamicheskie nakopiteli energii* [Energy storage. Electrodynamical energy storage]. M. Energoatomizdat. 1991. 394 p.
2. Gurskij D. A., Turbina E. S. *Vychislenie v Mathcad* [Calculation in Mathcad]. SPb. Piter. 2006. 554 p.
3. Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Bobrov A. S. *Fizicheskie principy preobrazovaniya energij v elektromagnitnyh sistemah s predvaritel'nym nakopleniem magnitnoj energii* [Physical principles of energy conversion in electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy] // Advanced science. 2017. No. 1. Physical and mathematical sciences.
4. Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Hlebov A. G. [Investigation of energy characteristics of electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy on numerical models] // Advanced science. 2017. No. 2. Physical and mathematical sciences.
5. Zapol'skih S. N. *Impul'snye sistemy s induktivnymi nakopitelyami energii* [Pulse systems with inductive energy storage]. Kirov. VyatSU. 2012. 121 p.

6. Zapol'skih S. N. *Issledovanie i analiz elektromagnitnyh sistem s postoyannym potokoscepleniem s pomoshch'yu fizicheskoy modeli* [Research and analysis of electromagnetic systems with constant flow coupling using a physical model] // Advanced science. 2019. No. 4. Physical and mathematical sciences.

7. Patent № 1066469 SSSR. *Generator vozvratno postupatel'nogo dvizheniya* – Patent No. 1066469 of USSR. Reciprocating motion generator / Jacques Henri Jarre, Jean Marie Baptiste Jarre (France). Without publ. 1984. No. 1.

8. Patent № 2560079 RF. *Elektricheskij dvigatel'* – Patent No. 2560079 of the Russian Federation. Electric motor / S. N. Zapol'skikh, A. A. Borisov. Without publ. 2015. No. 23.

9. Ryashencev N. P., Ryashencev A. N. *Elektromagnitnyj privod linejnyh mashin* [Electromagnetic drive of linear machines]. Novosibirsk. Nauka (Science). 1985. 153 p.

10. Ryashencev N. P., Ugarov G. G., L'vicin A. V. *Elektromagnitnye pressy* [Electromagnetic presses]. Novosibirsk. Nauka (Science). Siberian branch. 1989. 216 p.

11. *Elektronasos "Malysh-M". Rukovodstvo po ekspluatatsii 70TNP.RE* – Electric pump "Malysh-M". Operating Manual 70ТНП.РЭ.