УДК 512 DOI 10.25730/VSU.0536.21.019

Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются цели, содержание и методика работы учебно-исследовательского семинара по алгебре для бакалавров математических направлений подготовки. Семинар предназначен для заинтересованных студентов как дополнительный ресурс их математического образования. Преподаватель выступает в роли наставника и в будущем руководителя научно-исследовательской работы студентов, участников семинара. Тематика семинара тесно связана с содержанием проводимых в Вятском государственном университете исследований в рамках научной алгебраической школы «Функциональная алгебра и теория полуколец». В настоящее время на семинаре изучаются две темы: «Мультипликативно идемпотентные полукольца» и «Полукольца непрерывных функций». В ходе семинарских занятий изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами, упражнениями, постановкой исследовательских задач.

Ключевые слова: студенческий семинар, обучение алгебре, полукольцо, функциональная алгебра, исследовательская задача.

1. Введение

В последнее десятилетие интерес молодежи к математике и математическим исследованиям падает. Это связано с кризисом математического образования в мире, упадком российской системы образования, переоценкой ценностей в сторону потребления в ущерб развитию человеческого интеллекта и духовности. Двум самым молодым преподавателям кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета (ВятГУ), кандидатам физико-математических наук 32 и 33 года, а далее следует разрыв в пять и более лет.

Организованный мной два года назад студенческий семинар по алгебре призван восполнить через несколько лет нехватку молодых высококвалифицированных преподавательских кадров по высшей математике. Участниками семинара являются бакалавры 1–3 курсов направления подготовки «Математика и компьютерные науки». Ранее, с 1986 г. по 2018 г., мы занимались в математических кружках и на научном алгебраическом семинаре с будущими учителями математики и информатики. Через эту подготовку прошло 20 кандидатов физико-математических наук (один из них стал доктором наук, другой завершил работу над докторской диссертацией), один кандидат технических наук и несколько кандидатов педагогических наук по методике обучения математике; большинство из них преподает в ВятГУ, при этом многие выполнили в свое время дипломные работы именно по математике. К сожалению, в последние годы предметная подготовка будущих учителей сокращается как шагреневая кожа в угоду нарастающей общепедагогической так называемой проектной деятельности.

Мы надеемся, что научная алгебраическая школа ВятГУ «Функциональная алгебра и теория полуколец» пополнится молодыми перспективными исследователями и преподавателями.

2. Алгебраическая пропедевтика

Сначала мы напоминаем студентам базовые элементы логики и теории множеств, соответствующие терминологию и обозначения (в духе [17]).

Затем переходим к важнейшим общеалгебраическим понятиям:
– алгебраическая операция (унарная, бинарная, n-арная);
– возможные свойства бинарной алгебраической операции;
– группоид;
– полугруппа, моноид;
– группа;
– кольцо, поле;
– векторное пространство над полем;
– решетка, дистрибутивная решетка.

Проверяются простейшие свойства перечисленных алгебраических структур. Приводятся модельные примеры. Доказывается теорема Кэли о представлении произвольной полугруппы (группы) A как подполугруппы (подгруппы) полугруппы (группы) всех преобразований (биекций, подстановок) множества A с операцией композиции отображений.

Мы рекомендуем студентам руководствоваться известными источниками по абстрактной алгебре [14; 19; 20; 25–27]. Информацию по упорядоченным множествам и решеткам можно найти в [7, глава 3; 18; 26].

Методика и методология изучения различных алгебраических структур рассматривалась нами в [6; 7, глава 2; 14; 16].

3. К теории полуколец

Далее мы приступаем к формированию понятия полукольца [5; 9; 28; 31].

Класс полуколец включает в себя класс всех (ассоциативных) колец и класс всех дистрибутивных решеток, а также ряд известных числовых систем.

Определение 1 (в широком смысле). Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, +\rangle$ – аддитивно записанная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – мультипликативно записанная полугруппа, операция умножения $\cdot$ дистрибутивна относительно операции сложения + с обеих сторон: $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ для любых $a, b, c \in S$.

Далее предполагается, что полукольца имеют коммутативное сложение.

Элемент 0 полукольца S называется *нулем*, если $s+0=s$ и $s\cdot 0=0\cdot s=0$ для любого $s \in S$. Элемент 1 полукольца S называется *единицей*, если $s\cdot 1=1\cdot s=s$ для всех $s \in S$. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*.

Определение 2 (в узком смысле). *Полукольцо* – это полукольцо с нулем 0 и единицей 1. Если 1=0, то полукольцо одноэлементно.

Определение 3. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. *Полуполе* – это коммутативное полутело. Полутело с добавленным нулем называется *полутелом с нулем*.

Упражнение 1. Докажите, что полукольца с делением исчерпываются телами и полутелами с нулем. По определению, *полукольцо с делением* – это полукольцо S с нулем 0 и единицей $1\neq 0$, каждый ненулевой элемент которого обратим: $\forall a\in S\ (a\neq 0 \Rightarrow \exists b\in S\ (ab=1))$.

Сначала приводятся примеры числовых полуколец:

Пример 1. Множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения является коммутативным полукольцом с единицей и без нуля; кольцом разностей полуколец $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}\cup\{0\}$ служит кольцо $\mathbf{Z}$ всех целых чисел. Полуполем частных полукольца $\mathbf{N}$ будет полуполе всех положительных рациональных чисел.

Пример 2. Алгебраическая структура $\langle \mathbf{R}^+, +, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел будет полуполем с нулем, кольцом разностей которого служит поле $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Пример 3. Рассматривая на множестве $\mathbf{P}$ всех положительных действительных чисел операции $\vee$ (max) и умножение $\cdot$, получим полуполе $\langle \mathbf{P}, \vee, \cdot\rangle$ с идемпотентным сложением $\vee$ (верно тождество $x\vee x=x$).

Пример 4. Пусть $S=\{0, 1\}$ – двухэлементное полукольцо с нулем 0 и единицей 1. В S умножение определяется однозначно, 0+0=0 и 0+1=1+0=1. Если 1+1=0, то полукольцо S изоморфно двухэлементному полю $\mathbf{Z}_2$, а если 1+1=1, то S изоморфно двухэлементной цепи $\mathbf{B}$.

Даются исходные полукольцевые определения как общеалгебраического, так и специального характера. К общеалгебраическим относятся понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, гомоморфизма, прямого произведения полуколец, решеток идеалов, конгруэнций, подполуколец. Вводятся понятия подпрямо неразложимого полукольца и конгруэнц-простого полукольца. Для полуколец формулируются и доказываются универсально-алгебраические утверждения: теоремы о гомоморфизме и изоморфизме, теорема о подпрямом произведении.

Затем определяются такие полукольцевые понятия, как поглощающий элемент (по сложению и по умножению), идемпотентность (аддитивная и мультипликативная), сократимость (аддитивная и мультипликативная), конгруэнция Берна по идеалу.

В структурной теории полуколец важную роль играют следующие классы полуколец:

1) ***кольца*** как полукольца, аддитивная полугруппа которых является коммутативной группой;

2) ***дистрибутивные решетки*** как полукольца с тождествами коммутативности $x+y=y+x$ и $xy=yx$, идемпотентности $xx=x$ и поглощения $x+xy=x$;

3) ***полутела*** [см. 15; 22; 23].

Попарные пересечения этих трех классов полуколец совпадают с классом одноэлементных полуколец, определяемым тождеством $x=y$.

Одна из актуальных задач общей теории полуколец заключается в сведении изучения полуколец к названным классам полуколец. С другой стороны, исследовались полукольца, представляющие собой некий симбиоз:

• колец и дистрибутивных решеток [12, глава 6];

• колец и полутел. Отметим так называемые дизъюнктные объединения кольца и полутела [10];

• дистрибутивных решеток и полутел. К таким полукольцам относятся абелево-регулярные положительные полукольца [9, глава 2].

В развитии теории полуколец можно выделить следующие основные направления:

1. ***Кольце-модульное направление*** как обобщение и расширение теории колец и модулей на полукольца и полумодули над ними. Рассматриваются полукольца с нулем и единицей. Исследуются полукольца с различными дополнительными условиями, гомологические свойства полуколец и так далее. Интересны исследования, связанные с выполнением кольце-модульных теорем в классе полуколец. Зачастую справедливость той или иной теоремы теории колец для полукольца S делает S близким к кольцу или даже кольцом, что дает характеризации колец в терминах полуколец.

2. ***Универсально-алгебраическое направление***, базирующееся на теории полугрупп и универсальной алгебре. Изучаются полукольца в широком понимании, в том числе и с некоммутативным сложением. Важную роль играют свободные полукольца, расширения полуколец, многообразия и квазимногообразия полуколец, решетки идеалов и конгруэнций полуколец.

3. ***Изучение полуколец специального вида.*** Исследуются полукольца непрерывных функций, сечений, соответствий; матричные полукольца в рамках линейной алгебры над полукольцами; тропические полукольца с применением в теории оптимального управления; полукольца путей в графах и тому подобное.

Направления 1 и 2 охватывают изучение абстрактных полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов полуколец. Направление 3, включая теорию конечных полуколец, служит основой для полукольцевых приложений в компьютерных науках, теории кодирования и криптографии, оптимальном управлении, лингвистике, экономике.

Для иллюстрации рассмотрим пример «тропического» полуполя, на базе которого строится идемпотентный анализ (так же, как на базе поля $\mathbf{R}$ действительных чисел, зиждется классический математический анализ).

Пример 5. Пусть $S=\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$ – линейно упорядоченное полуполе с нулем $-\infty$ относительно операции сложения $\vee$ (max) и операции умножения $+$. Элемент $-\infty$ будет также наименьшим, сложение идемпотентно ($x\vee x=x$), а по умножению (+) S является коммутативной группой с добавленным нулем $-\infty$. Относительно интервальной (естественной) топологии S становится топологическим аддитивно идемпотентным полуполем. Заметим, что S изоморфно (тополого-алгебраически) топологическому аддитивно идемпотентному полуполю с нулем $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением чисел.

Упражнение 2. Докажите, что полуполя с нулем $\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$, $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{R}\cup\{\infty\}, \wedge, +\rangle$ изоморфны друг другу.

Упражнение 3. С точностью до изоморфизма существует десять двухэлементных полуколец. Найдите эти полукольца, то есть задайте таблицами Кэли операции сложения и умножения на двухэлементном множестве $\{a, b\}$.

Дадим несколько необходимых определений.

Собственный идеал J полукольца S называется:

простым, если $\forall a, b\in S\ (ab\in J \Rightarrow (a\in J \vee b\in J))$;

максимальным, если $J\subset I$ влечет $I=S$ для любого идеала I в S;

строгим, когда $\forall a, b\in S\ (a+b\in J \Rightarrow a\in J)$;

полустрогим, когда $\forall a, b\in S\ (a, a+b\in J \Rightarrow b\in J)$.

Полукольцо с нулем 0 назовем *антикольцом*, если в нем выполняется квазитождество $x+y=0 \Rightarrow x=0$.

Конгруэнция Берна на полукольце S с нулем по его идеалу J – это такое бинарное отношение $\rho(J)$ на S, что для любых $s, t\in S$ имеем:

$$s\rho(J)t \Leftrightarrow \exists a, b\in J\ (s+a=t+b).$$

Легко видеть, что $\rho(J)$ есть конгруэнция на полукольце S, причем $J\subseteq[0]_{\rho(J)}$. Идеал J образует класс нуля некоторой конгруэнции (равносильно, конгруэнции $\rho(J)$) на S тогда и только тогда, когда J – полустрогий идеал. При этом конгруэнция Берна $\rho(J)$ будет наименьшей среди конгруэнций σ на полукольце S с тем же классом 0, что и $\rho(J)$: $[0]_\sigma=[0]_{\rho(J)}$.

Конгруэнции на любом кольце S суть в точности конгруэнции Берна по различным идеалам J в S, то есть отношения сравнимости по J: $s\rho(J)t \Leftrightarrow s-t\in J$.

Для произвольного полукольца S с нулем 0 обозначим через

$$r(S)=\{s\in S:\ \exists t\in S\ (s+t=0)\}$$

множество всех элементов из S, имеющих противоположный элемент. Ясно, что $r(S)$ – строгий идеал полукольца S, являющийся кольцом. Строгие идеалы в полукольцах являются полустрогими, но, вообще говоря, не наоборот; так, в кольцах все идеалы полустрогие, а строгими будут только сами кольца (как несобственные идеалы). В дистрибутивных решетках все идеалы строгие.

Полукольцо S с 0 будет кольцом (антикольцом) тогда и только тогда, когда $r(S)=S$ (соответственно, $r(S)=\{0\}$).

Введенные полукольцевые понятия мы демонстрируем на примерах полуколец многочленов $S[x]$ и полуколец матриц $M_2(S)$ над числовыми полукольцами S и двухэлементной цепью $\mathbf{B}$.

В следующих примерах фигурируют полукольца S с 0 и $1\neq 0$.

Пример 6. Полукольцо

$$S[x]=\{f=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n:\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n\in S,\ n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$$

всех многочленов с коэффициентами из полукольца S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S. При этом элемент a_0 называется *свободным членом* многочлена f, элемент a_n – *старшим коэффициентом* f при $a_n\neq 0$, тогда $n=\deg f$ будет *степенью* многочлена f. Относительно обычных операций сложения и умножения многочленов (как в случае многочленов с числовыми коэффициентами) множество $S[x]$ действительно является полукольцом. Многочлены нулевой степени и элемент 0 из S образуют в полукольце $S[x]$ подполукольцо, изоморфное полукольцу коэффициентов S. При соответствующем отождествлении нуль 0 и единица 1 полукольца S будут нулем и единицей полукольца многочленов $S[x]$.

Пример 7. Полукольцо $M_n(S)$ всех квадратных матриц размера $n\times n$ с коэффициентами из S ($n\in\mathbf{N}$) с обычными операциями сложения и умножения матриц. При $n=1$ получаем полукольцо S. Полукольцо коэффициентов S изоморфно вкладывается в полукольцо матриц $M_n(S)$: каждому элементу $a\in S$ сопоставляется диагональная квадратная матрица $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$ с элементом a по главной диагонали, то есть $a_{ij}=a$ при $i=j$ и $a_{ij}=0$ при $i\neq j$. Нулю $0\in S$ соответствует нулевая матрица O_n – нуль полукольца матриц $M_n(S)$, а единице $1\in S$ соответствует единичная матрица E_n – единица в $M_n(S)$.

Полукольцо S с нулем 0 назовем *расширением полукольца R посредством полукольца T*, если на S существует конгруэнция ρ, для которой класс нуля $[0]_\rho$ изоморфен R и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно T.

На полукольце S с нулем 0 существуют три конгруэнции, имеющие $r(S)$ классом нуля:

– конгруэнция Берна $\rho(r(S))$, фактор-полукольцо по которой является антикольцом [5, с. 25];

– конгруэнция σ: $s\sigma t \Leftrightarrow \exists x,\ y\in S\ (s+x=t\ \&\ t+y=s)$, фактор-полукольцо по которой упорядочиваемо [5, с. 30];

– наименьшая конгруэнция на S, фактор-полукольцо по которой аддитивно идемпотентно [21, предложение 2].

Очевидно, что упорядочиваемые полукольца суть антикольца, а аддитивно идемпотентные полукольца упорядочиваемы.

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Любое полукольцо S с нулем является расширением однозначно определенного (с точностью до изоморфизма) кольца $r(S)$ посредством аддитивно идемпотентного полукольца.*

Заметим, что в данной теореме аддитивно идемпотентное полукольцо определено, вообще говоря, не однозначно.

Теорема 2. *Любое полукольцо S с нулем, для которого кольцо $r(S)$ обладает единицей, однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Предложение 1. *Пусть в полукольце S с нулем и единицей даны непересекающиеся мультипликативно замкнутое множество M и идеал J. Тогда в S существует простой идеал P, содержащий J и не пересекающийся с M.*

Теорема 3. *В произвольном полукольце с нулем и ненулевой единицей каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале и все максимальные идеалы – простые.*

Замечание. Начинать изучение теории полуколец целесообразно с класса коммутативных полуколец с нулем и единицей, имея в виду коммутативные кольца [1; 20, глава 2].

4. Мультипликативно идемпотентные полукольца

Помимо общих вопросов первоначального изучения теории полуколец, рассматриваемых в параграфе 3, мы сосредотачиваемся на более основательном изучении отдельных классов полуколец. В этом параграфе студентам предлагается введение в теорию мультипликативно идемпотентных полуколец.

Полукольцо с тождеством $xx=x$ называется *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентными полукольцами являются *булевы кольца* (кольца с тождеством $xx=x$) и дистрибутивные решетки.

Упражнение 4. Докажите, что булевы кольца коммутативны и удовлетворяют тождеству $x+x=0$ (сложение совпадает с вычитанием: $x+y=x-y$).

Перечислим все двухэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца: поле $\mathbf{Z}_2$; дистрибутивная решетка $\mathbf{B}$; идемпотентное моно-полукольцо $\mathbf{D}=\{a, 1\}$; мультипликативно идемпотентное полукольцо $\mathbf{T}=\{\infty, 1\}$ с константным сложением $x+y=\infty$; идемпотентное *полукольцо левых нулей* $\mathbf{L}=\{a, b\}$, то есть полукольцо с тождеством $xy=x$; идемпотентное *полукольцо правых нулей* $\mathbf{R}=\{a, b\}$, то есть полукольцо с тождеством $xy=y$.

Упражнение 5. Проверьте, что любое полукольцо левых (правых) нулей идемпотентно.

Полукольцо с тождеством $xyx=x$ называется *прямоугольным*.

Упражнение 6. Покажите, что любое прямоугольное полукольцо изоморфно прямому произведению полукольца левых нулей и полукольца правых нулей.

Перечислим ряд общих специфических ***свойств мультипликативно идемпотентных полуколец*** S, которые мы доказываем вместе со студентами.

Свойство 1. *В S выполняются тождества:* $x+xy+yx+y=x+y$; $4x=2x$; $x+2xy+y=x+y$; $x+xy+y=x+yx+y$; $x+3xy=x+xy$.

Свойство 2. *Полукольцо S удовлетворяет следующим условиям: если S с 1, то $xy=1 \Rightarrow x=1$; если S с 0, то $x+y=0 \Rightarrow x=y$; $Sx=yS \Rightarrow x=y$; $(Sx=Sy)\&(xS=yS) \Rightarrow x=y$.*

Свойство 3. Если *полукольцо S с нулем, то S коммутативно в нуле, то есть равные нулю произведения в S не зависят от порядка сомножителей.*

Свойство 4. *Полукольцо S инвариантно (то есть все его односторонние идеалы являются идеалами) тогда и только тогда, когда оно коммутативно.*

Свойство 5. *Максимальные идеалы полукольца S будут простыми.*

Свойство 6. *Каждый идеал в S есть пересечение простых идеалов.*

В качестве учебных задач для самостоятельного решения студентам предлагается материал главы 1 нашей книги [12].

Целесообразно сразу познакомить студентов с основными классами мультипликативно идемпотентных полуколец: булевыми кольцами; дистрибутивными и булевыми решетками; моно-полукольцами; прямоугольными полукольцами; полукольцами с константным сложением [12, глава 2].

На занятиях семинара подробно разбираются доказательства различных структурных теорем.

Теорема 4. *Произвольное полукольцо S коммутативно и мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда простые идеалы в S разделяют его элемент, то есть для любых двух неравных элементов полукольца S в нем существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.*

Следствие. (Теорема Биркгофа) *Любая дистрибутивная решетка S изоморфна некоторой решетке множеств, именно, подрешетке решетки всех подмножеств множества простых идеалов в S.*

Теорема 5. *Любое конечнопорожденное мультипликативно идемпотентное полукольцо конечно.*

Теорема 6. *Всякое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем разлагается в прямую сумму булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

Теорема 7. *Любое конгруэнц-простое мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем изоморфно $\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{Z}_2$.*

Теорема 8. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

В качестве исследовательских заданий студентам рекомендуются следующие задачи.

Задача 1. Нахождение, с точностью до изоморфизма, всех трехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец [см. 13]. Их классификация по различным полукольцевым свойствам.

Задача 2. Перечисление четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем.

Задача 3. Описание пятиэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей.

Задача 4. Создание компьютерной программы нахождения, перечисления и подсчета числа попарно неизоморфных n-элементных мультипликативно идемпотентных полуколец.

Дальнейшее изучение теории мультипликативно идемпотентных полуколец можно вести по монографии [12] и журнальным статьям, рекомендуемым наставником. В конце книги [12, с. 130] предложены научно-исследовательские задачи на перспективу.

5. Полукольца непрерывных функций

Полукольца непрерывных функций образуют класс полуколец, имеющих функционально-топологическую природу.

Классическим объектом функциональной алгебры служит кольцо $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций [30].

С кольцом $C(X)$ связаны два его подполукольца:

– полукольцо $C^+(X)=C(X, \mathbf{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций на пространстве X;

– полуполе $U(X)=C(X, \mathbf{P})$ всех непрерывных положительных функций на пространстве X.

Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$. Заметим, что $U(X)$ является множеством всех обратимых элементов полукольца $C^+(X)$.

Если в полукольцах $C^+(X)$ и $U(X)$ заменить обычную операцию сложения на операцию $\vee$ взятия max двух функций, оставив операцию умножения прежней, то получим аддитивно идемпотентные полукольцо $C^{\vee}(X)=C(X, \mathbf{R}^{\vee})$ и полуполе $U^{\vee}(X)=C(X, \mathbf{P}^{\vee})$. Отметим, что полукольца $C^+(X)$ и $C^{\vee}(X)$ будут *положительными* полукольцами, то есть элементы вида $f+1$ и $f\vee 1$ в них обратимы.

Начало систематическому исследованию полуколец $C^+(X)$ и полуполей $U(X)$ положила статья 1998 г. [4]. Теории полуколец непрерывных функций посвящены двухтомная монография [8] и обзорная работа [11]. Исследование различных видов полуколец непрерывных функций продолжается и расширяется.

Изучение полуколец непрерывных функций можно начать со случая, когда топологическое пространство X есть числовой отрезок, скажем, $[-1, 1]$. Далее следует познакомить студентов с метрическими пространствами, а уже затем – с азами общей топологии. Методика изучения метрических и топологических пространств рассматривалась в статьях [2] и [3], соответственно. При изложении этой темы можно воспользоваться учебным пособием [7, глава 4] и фундаментальным трудом Энгелькинга [29].

Для понимания следующих теорем необходимо дать определения компакта и тихоновского пространства.

Топологическое пространство X называется:

– *компактным*, если каждое его открытое покрытие $(U_i)_{i\in I}$ содержит конечное подпокрытие $(U_i)_{i\in K}$, где K – некоторое конечное подмножество индексного множества I: если $X=\cup(U_i)_{i\in I}$ для семейства открытых в X множеств U_i $(i\in I)$, то $X=\cup(U_i)_{i\in K}$;

– *хаусдорфовым*, если в X любые две различные точки имеют непересекающиеся открытые окрестности;

– *тихоновским* (или *вполне регулярным*), если оно хаусдорфово и для любой его точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества V найдется такая функция $f\in C(X)$, что $f(x)=1$ и $f(V)=\{0\}$;

– *нормальным*, если оно хаусдорфово и любые два непересекающиеся замкнутые множества X имеют непересекающиеся открытые окрестности;

– *компактом*, если X – компактное хаусдорфово пространство.

Мы доказываем, что числовые отрезки являются компактами, а компакты будут нормальными пространствами. Из классической леммы Урысона [29, теорема 1.5.10] следует, что нормальные пространства – тихоновские. Значит, *все компакты являются тихоновскими пространствами*.

Для произвольной точки x топологического пространства X положим $M_x=\{f\in C^+(X): f(x)=0\}$.

Упражнение 7. Докажите, что M_x – максимальный идеал полукольца $C^+(X)$.

Теорема 9. *Для всякого компакта X максимальные идеалы полукольца $C^+(X)$ суть в точности идеалы M_x по различным точкам $x\in X$.*

Упражнение 8. Выполняется ли теорема 9 для полуколец $C^{\vee}(X)$?

Теорема 10. *Для всякого компакта X каждый простой идеал P полукольца $C^+(X)$ содержится в единственном максимальном идеале, то есть $P\subseteq M_x$ для однозначно определенной точки $x\in X$.*

Упражнение 9. Совпадают ли простые идеалы в полукольцах $C^+(X)$ и $C^{\vee}(X)$ над произвольным топологическим пространством X ?

Предложение 4. *В полукольцах $C^+(X)$ все простые идеалы строгие.*

Упражнение 10. Проверьте справедливость предложения 4 для $C^{\vee}(X)$.

Для простого идеала P полукольца $C^+(X)$ обозначим через $\rho(P)$ отношение эквивалентности на $C^+(X)$ с двумя классами P и $C^+(X)\backslash P$.

Упражнение 11. Убедитесь, что эквивалентность $\rho(P)$ является конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$.

Теорема 11. *Для любого топологического пространства X максимальные конгруэнции на полукольце $C^+(X)$ совпадают с двухклассовыми конгруэнциями $\rho(P)$ по всевозможным простым идеалам P полукольца $C^+(X)$.*

Заметим, что теорема 11 верна для абстрактных положительных полуколец с нулем и единицей, только вместо простых идеалов P следует брать строгие простые идеалы. В частности, теорема 11 справедлива для полуколец $C^{\vee}(X)$.

Для произвольной точки x топологического пространства X зададим конгруэнцию $\sim_x$ на полукольце $C^+(X)$ и на полуполе $U(X)$ формулой:

$$f\sim_x g \Leftrightarrow f(x)=g(x) \text{ для всех } f, g\in C^+(X)\ (f, g\in U(X)).$$

Упражнение 12. Найдите фактор-полукольца $C^+(X)/\sim_x$ и $U(X)/\sim_x$.

Упражнение 13. Покажите, что конгруэнция $\sim_x$ на полукольце $C^+(X)$ совпадает с конгруэнцией Берна по идеалу M_x в $C^+(X)$.

Упражнение 14. Докажите, что $\sim_x$ – максимальная конгруэнция на полуполе $U(X)$.

Теорема 12. *Для любого компакта X максимальные конгруэнции на полуполе $U(X)$ – это в точности конгруэнции $\sim_x$ по всем точкам $x\in X$.*

Упражнение 15. Докажите теорему 12 для полуполей $U^{\vee}(X)$.

Далее изучаются полукольца $C^+(X)$, $C^{\vee}(X)$ и полуполя $U(X)$, $U^{\vee}(X)$ для произвольных топологических пространств X.

Сформулируем несколько исследовательских задач по данной тематике.

Задача 5. Изучение алгебраических свойств колец $C(X, \mathbf{Q})$ всех непрерывных функций на топологических пространствах X, принимающих значения в топологическом поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

Задача 6. Изучение нормированных колец $C^*(X, \mathbf{Q})$ всех ограниченных функций из $C(X, \mathbf{Q})$, рассматриваемых с sup-нормой.

Задача 7. Исследование полуколец $C(X, \mathbf{Q}^+)$ всех непрерывных неотрицательных рациональнозначных функций.

Задача 8. Исследование полуполей всех непрерывных положительных рациональнозначных функций, заданных на топологических пространствах X.

При решении задач 5–8 полезно знать результаты общей теории колец непрерывных функций [32]. Ряд научно-исследовательских задач по теории полуколец непрерывных функций сформулирован в монографии [8].

6. Заключение

1. Автор статьи имеет сорокалетний опыт ведения и руководства математическими студенческими кружками и семинарами, разработал и прочитал 15 спецкурсов. Под его руководством выполнено и защищено 130 курсовых и 78 дипломных работ, 20 магистерских и 16 кандидатских диссертаций по современной математике.

2. Предполагается, что материал студенческого семинара будет служить основой новых дипломных и магистерских работ по математике для студентов – участников семинара.

3. Развитие содержания параграфов 4 и 5 может вылиться в кандидатские диссертации по обновленной научной специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

4. Готовится к печати продолжение – статья «Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы», содержащая несколько фрагментов общей теории полуколец с доказательствами.

Список литературы

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру : пер. с англ. М. : Мир, 1972. 160 с.

2. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Изучение теории метрических пространств // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 2 (3). С. 103–111.

3. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Изучение топологической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 2. С. 86–93.

4. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.

5. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца : учеб. пособие. Киров : Изд-во ВГПУ, 2000. 44 с.

6. *Вечтомов Е. М.* Тестовые задачи по абстрактной алгебре : мат. IV Всероссийской научно-практической конференции «Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики». Глазов : ГГПИ имени В. Г. Короленко, 2012. С. 8–15.

7. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учеб. пособие. Изд. 3. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

8. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография в 2-х т.; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. Т. 1. 384 с. Т. 2. 316 с.

9. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.

10. *Вечтомов Е. М., Лукин М. А.* Полукольца, являющиеся объединениями кольца и полутела // Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 6. С. 159–160.

11. *Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.* Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.

12. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.

13. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2. С. 13–23.

14. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Абстрактная алгебра. Базовый курс : учеб. пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. 260 с.

15. *Вечтомов Е. М., Черанева А. В.* Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.

16. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1 (3). С. 41–48.

17. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Математика: логика, множества, комбинаторика : учеб. пособие. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 243 с.

18. *Гретцер Г.* Общая теория решеток : пер. с англ. М. : Мир, 1984. 456 с.

19. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. М. : Наука, 1973. 448 с.

20. *Ламбек И.* Кольца и модули : пер. с англ. М. : Мир, 1971. 280 с.

21. *Лукин М. А.* Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников : мат. V Всероссийской научно-методической конференции. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. С. 312–316.

22. *Полин С. В.* Простые полуполя и полутела // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.

23. *Полин С. В.* Минимальные многообразия полуколец // Математические заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 527–537.

24. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. Изд. 2-е. М. : Наука, 1980. 160 с.

25. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. Изд. 2-е. М. : Наука, 1986. 240 с.

26. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. М. : Наука, 1983. 272 с.

27. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру : пер. с венгер. М. : Мир, 1979. 260 с.

28. *Чермных В. В.* Функциональные представления полуколец : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

29. *Энгелькинг Р.* Общая топология : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

30. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York. 1976. 300 p.

31. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

32. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // Journal of Mathematic Sciences. 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

Student educational and research seminar on algebra

E. M. Vechtomov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article discusses the objectives, content and methods of work of the educational and research seminar on algebra for bachelors of mathematical fields of training. The seminar is intended for interested students as an additional resource for their mathematical education. The teacher acts as a mentor and in the future the head of the research work of students, participants of the seminar. The topic of the seminar is closely related to the content of research conducted at Vyatka State University within the framework of the scientific algebraic school "Functional algebra and the theory of semirings". Currently, two topics are being studied at the seminar: "Multiplicatively idempotent semirings" and "Semirings of continuous functions". During the seminars, the presentation of the theory is accompanied by illustrative examples, exercises, and the formulation of research tasks.

Keywords: student seminar, algebra training, semiring, functional algebra, research problem.

References

1. *At'ya M., MC'Donald I. Vvedenie v kommutativnuyu algebru : per. s angl.* [Introduction to commutative algebra : transl. from English]. M. Mir (World). 1972. 160 p.

2. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Izuchenie teorii metricheskih prostranstv* [The study of the theory of metric spaces] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of the Vyatka State University for the Humanities. 2013. No. 2 (3). Pp. 103–111.

3. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Izuchenie topologicheskoj struktury* [The study of topological structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2014. No. 2. Pp. 86–93.

4. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A. Polukol'ca nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij: delimost', idealy, kongruencii.* [Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and Applied Mathematics. 1998. Vol. 4. Is. 2. Pp. 493–510.

5. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca : ucheb. posobie* [Introduction to semirings : tutorial]. Kirov. VSPU Publishing House. 2000. 44 p.

6. *Vechtomov E. M. Testovye zadachi po abstraktnoj algebre : mat. IV Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Prepodavanie matematiki v shkolah i vuzah: problemy soderzhaniya, tekhnologii i metodiki"* [Test problems in abstract algebra : mat. of IV All-Russian scientific and practical conference "Teaching mathematics in schools and universities: problems of content, technology and methodology"]. Glazov. GSPI n. a. V. G. Korolenko. 2012. Pp. 8–15.

7. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : ucheb. posobie* [Mathematics: basic mathematical structures : tutorial]. Ed. 3. M. Yurayt. 2018. 296 p.

8. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Elementy funkcional'noj algebry : monografiya v 2-h t.* [Elements of functional algebra: a monograph in 2 vols.]; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. Vol. 1. 384 p. Vol. 2. 316 p.

9. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

10. *Vechtomov E. M., Lukin M. A. Polukol'ca, yavlyayushchiesya ob'edineniyami kol'ca i polutela* [semirings, which are unions of a ring and a semi-body] // *Uspekhi matematicheskih nauk* – Successes of mathematical sciences. 2008. Vol. 63. Is. 6. Pp. 159–160.

11. *Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semirings of continuous functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.

12. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

13. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Trekhelementnye mul'tiplikativno idempotentnye polukol'ca* [Three-element multiplicatively idempotent semicircles] // *Matematicheskij vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical Herald of Vyatka State University. 2021. No. 2. Pp. 13–23.

14. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Abstraktnaya algebra. Bazovyj kurs : ucheb. posobie* [Abstract algebra. Basic course : tutorial]. Kirov. Raduga-PRESS. 2014. 260 p.

15. *Vechtomov E. M., Cheraneva A. V. Polutela i ih svojstva* [Semi-bodies and their properties // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics]. 2008. Vol. 14. No. 5. Pp. 3–54.

16. *Vechtomov E. M., Chermnyh V. V. Izuchenie algebraicheskoj struktury* [The study of algebraic structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2012. No. 1 (3). Pp. 41–48.

17. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Matematika: logika, mnozhestva, kombinatorika : ucheb. posobie* [Mathematics: logic, sets, combinatorics : tutorial]. Ed. 2nd. M. Yurayt. 2018. 243 p.

18. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok : per. s angl.* [General theory of lattices : transl. from English]. M. Mir (World). 1984. 456 p.

19. *Kaluzhnin L. A. Vvedenie v obshchuyu algebru* [Introduction to general algebra]. M. Nauka. 1973. 448 p.

20. *Lambek I. Kol'ca i moduli : per. s angl.* [Rings and modules : transl. from English]. M. Mir (World). 1971. 280 p.

21. *Lukin M. A. Ob odnoj universal'noj kongruencii na polukol'cah* [On one universal congruence on semirings] // *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: Interaktivnye formy obucheniya matematike studentov i shkol'nikov : mat. V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii* – Problems of modern mathematical education in pedagogical colleges and schools of Russia: Interactive forms of teaching mathematics to students and schoolchildren : mat. of V All-Russian scientific and methodological conference. Kirov. VyatSHU. 2012. Pp. 312–316.

22. *Polin S. V. Prostye polupolya i polutela* [Simple half-fields and semi-bodies] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* – Siberian Mathematical Journal. 1974. Vol. 15. No. 1. Pp. 90–101.

23. *Polin S. V. Minimal'nye mnogoobraziya polukolec* [Minimal manifolds of semirings] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1980. Vol. 27. No. 4. Pp. 527–537.

24. *Skornyakov L. A. Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. Ed. 2nd. M. Nauka (Science). 1980. 160 p.

25. *Skornyakov L. A. Elementy algebry* [Elements of Algebra]. Ed. 2nd. M. Nauka (Sceince). 1986. 240 p.

26. *Skornyakov L. A. Elementy obshchej algebry* [Elements of general algebra]. M. Nauka (Science). 1983. 272 p.

27. *Fried E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru : per. s venger.* [Elementary introduction to abstract algebra : transl. from Hungarian]. M. Mir (World). 1979. 260 p.

28. *Chermnyh V. V. Funkcional'nye predstavleniya polukolec : monografiya* [Functional representations of semirings : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2010. 224 p.

29. *Engelking R. Obshchaya topologiya : per. s angl.* [General topology : transl. from English]. M. Mir (World). 1986. 752 p.

30. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York. 1976. 300 p.

31. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

32. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // Journal of Mathematic Sciences. 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.