

Изучение линейной алгебры на инженерных факультетах

Е. С. Трефилова

старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье рассмотрены подходы к изучению тем линейной алгебры, изучаемых на инженерных факультетах Вятского государственного университета. Проведен анализ некоторых учебников и учебных пособий по математике для высших учебных заведений, в результате которого выделены подходы в последовательности изучения некоторых тем линейной алгебры. В статье предложена еще одна последовательность изучения тем, основанная на необходимости появления того или иного термина. Описаны достоинства и недостатки, появившиеся в ходе апробации такой последовательности при изучении математики на электротехническом факультете. В статье приводятся несколько примеров тестовых вопросов, позволяющих оценить уровень усвоения материала. Материалы статьи могут быть полезны для преподавателей, работающих на инженерных факультетах.

Ключевые слова: линейная алгебра, матрицы, определители, методы решения систем линейных уравнений, исследование систем линейных уравнений.

Раздел линейной алгебры и векторной геометрии входит в программу изучения математики на инженерных факультетах Вятского государственного университета и включает в себя такие вопросы, как матрицы, определители, системы линейных уравнений (СЛУ), векторы, произведения векторов.

В нашем вузе сложилась определенная схема изучения данного раздела. Однако темы линейной алгебры можно рассматривать в разной последовательности:

1) матрицы, определители, методы решения СЛУ [3] или определители, матрицы; метод Крамера решения СЛУ, метод Гаусса и матричный метод решения СЛУ [1; 4];

2) метод Гаусса, исследование системы, понятие матрицы, определители, метод Крамера, матричный метод решения СЛУ [2].

Каждый из описанных подходов можно применять при изучении линейной алгебры. Сравним и обоснуем некоторые из предложенных подходов.

В первом, назовем его традиционным, описанном в большинстве учебников для студентов инженерных или экономических факультетов [1; 2; 3], предлагается изучение вопросов, связанных с матрицами и определителями, и в заключении раздела показывается применение матричного исчисления для решения систем линейных уравнений. Указанный способ изложения материала основан на следующем факте: сначала изучение некоторых средств, а затем их применение для решения практических задач, в данном случае – решения СЛУ. При таком подходе изучение всех методов решения систем в конце раздела вполне целесообразно.

Как известно, в методике преподавания математики всегда подчеркивается необходимость мотивации для введения того или иного термина (понятия) или факта (теоремы), особенно это хорошо прослеживается при изучении школьного курса геометрии, менее заметно в алгебраических темах. При изучении курса математики в высшей школе часто забывают о необходимости мотивации при изучении отдельных тем или разделов – и часто вводятся какие-то понятия, теоремы, а потом, чаще всего в конце изучения раздела, появляются примеры их практического применения. Желательно также учитывать специфику направления подготовки, на котором изучается математика с целью подбора задач и практических примеров применения.

В предложенном втором подходе большое внимание уделяется мотивации и преемственности между школьным и вузовским курсами математики, что делает его более логичным с точки зрения необходимости появления тех или иных терминов.

В ходе апробации, проведенной на электротехническом факультете, была реализована следующая последовательность изучения тем линейной алгебры:

1) понятие линейного уравнения, его графическое изображение, способы решения систем линейных уравнений с двумя переменными (метод подстановки и метод сложения) [5];

2) элементарные преобразования СЛУ, метод Гаусса, ранг матрицы, теорема Кронекера – Капелли, исследование решений систем линейных уравнений;

3) понятие матрицы, действия над матрицами;

4) определители, свойства определителей, обратная матрица. Матричный метод решения СЛУ и метод Крамера;

5) фундаментальный набор (система) решений (ФНР) однородной системы линейных уравнений.

При такой последовательности изучения тем линейной алгебры – матрицы, определители и системы линейных уравнений – были выявлены следующие положительные моменты:

1) хорошо видна преемственность в обучении между школой и вузом. Для студентов-первокурсников продолжение изучения математики начинается с понятного им материала и потом постепенно переходит на новые термины, что обеспечивает им более легкую адаптацию;

2) своевременное появление понятия матрицы как компактного способа представления коэффициентов уравнений системы, а определителя матрицы как некой числовой характеристики.

Однако при использовании такого порядка изучения тем линейной алгебры мы столкнулись со следующими трудностями:

1) нехватка времени. Перечень тем и количество часов, отведенных на их изучение, жестко регламентированы программой учебной дисциплины, что не позволяет существенно менять часы на их изучение, возможно только небольшое варьирование;

2) пересмотр задач, предлагаемых для решения студентам на практических занятиях. Связано это, прежде всего, с тем, что недостаточно теоретического материала на первые семинарские занятия, поэтому круг задач для первых существенно ограничен;

3) не всегда ясна цель изучения той или иной темы на практическом занятии. По задумке лектора, каждый термин должен появляться в случае его необходимости для дальнейшего изучения. Поэтому у студентов возникает вопрос – зачем нужно знать другие методы решения СЛУ, которые ограничены в своем применении, если мы знаем универсальный способ решения;

4) в ходе проверки контрольных работ появились ошибки, которые не встречались ранее, например:

«Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите элементы a_{12} , a_{35} . Определите размерность матрицы» [4].

Вместо нахождения элементов матрицы начинают приводить ее к ступенчатому виду. Конечно, такая ошибка появляется не только из-за выбранного подхода, но и неверного прочтения задания. Поэтому необходимо на занятиях вести работу и по улучшению функциональной грамотности студентов.

После изучения раздела студентам была предложена небольшая проверочная работа. Приведем ее текст и краткий анализ возникших у студентов ошибок.

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите элементы a_{25} , a_{43} . Определите размерность матрицы.

мерность матрицы.

Как было уже указано выше, не все поняли, что нужно написать четыре числа (два элемента и размерность матрицы), и начали сводить ее к ступенчатому виду.

2. Система линейных уравнений, содержащая три уравнения и четыре неизвестных, может иметь ___ решений.

Ни один из решавших не указал верное количество решений системы, чаще всего писали одно или бесконечно много. Не было ответов, в которых было бы указано, что система может и не иметь решений.

3. В однородной системе линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 7x_4 - 8x_5 = 0 \end{cases}$$
 главными

(свободными) переменными можно считать ...

В задании, что система однородная никак не влияет на правильный ответ, так как рассматривались на занятии и системы неоднородные, имеющие бесконечно множество решений. Заметим,

что нахождение общего решения системы в таком случае вызывает трудности у большинства студентов, изучающих СЛУ вне зависимости от последовательности изучения.

4. В однородной системе линейных уравнений, содержащей пять уравнений и шесть неизвестных, ранг основной матрицы равен четырем. Тогда ее фундаментальный набор решений содержит ____ решений.

Задание сложно тем, что нужно из алгоритма нахождения фундаментальной системы решений понять, как определить количество решений, а не найти их. Из писавших 20 человек верный ответ дали только двое.

5. Дана основная матрица однородной СЛУ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
. Запишите фундаменталь-

ный набор решений системы.

В этом задании необходимо было построить ФНР, перейдя от матрицы к системе, выделив свободные и главные переменные. Встречались ошибки, в которых матрица коэффициентов системы принималась за расширенную матрицу, неверное выделение главных и свободных переменных и выражение главных через свободные переменные.

6. Найти матрицу $C=AB-3A+4E$, если известно, что $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Найти ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Последние задания не вызвали больших затруднений у решающих, так как представляют собой стандартные задачи матричной алгебры.

В отличие от студентов, изучающих темы линейной алгебры в традиционной последовательности отвечать на вопросы, касающиеся матриц, было сложнее, так как допущено больше ошибок, при этом вопросы, касающиеся СЛУ, особой разницы в знаниях и их применении не показали.

Тем не менее, данный подход к изучению матриц, определителей, систем линейных уравнений можно применять на инженерных факультетах, но, на мой взгляд, более целесообразно сочетание подходов.

Каждый из описанных способов может применяться в курсе математики инженерных факультетов. Выбор последовательности изучения тем линейной алгебры (и не только) должен идти от цели изучения того или иного раздела и применения вопросов, в нем рассматриваемых, в профессиональной деятельности.

Список литературы

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика : учеб. для вузов в 3-х т.; под ред. В. А. Садовниченко. М. : Дрофа, 2004.
2. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Линейная алгебра : учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2021.
3. Кремер Н. Ш. и др. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ, 2002.
4. Ефимов А. В., Поспелов А. С. Сборник задач по математике для вузов : учеб. пособие в 4-х ч. Ч. 1. М. : Изд-во Физико-математической литературы, 2001.
5. Трефилова Е. С. Изучение систем линейных уравнений студентами гуманитарных направлений // Advanced Science. Киров : Изд-во Вятского государственного университета. 2017. № 4 (8).

The study of linear algebra at the Engineering faculties

E. S. Trefilova

senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. The proposed article discusses approaches to the study of linear algebra topics studied at the engineering faculties of Vyatka State University. The analysis of some textbooks and textbooks in mathematics for higher educational institutions has been carried out, as a result of which approaches in the sequence of studying some topics of linear algebra have been identified. The article suggests another sequence of studying topics based on the need for the appearance of a particular term. The advantages and disadvantages that appeared during the testing of such a sequence in the study of mathematics at the Faculty of electrical engineering are described. The article provides several examples of test questions to assess the level of assimilation of the material. The materials of the article can be useful for teachers working at engineering faculties.

Keywords: linear algebra, matrices, determinants, methods for solving systems of linear equations, study of systems of linear equations.

References

1. Bugrov Ya. S., Nikol'skij S. M. *Vysshaya matematika : ucheb. dlya vuzov v 3-h t.* [Higher mathematics : textbook for universities in 3 vols.] / ed. by V. A. Sadovnichy. M. Drofa (Bustard). 2004.
2. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. *Linejnaya algebra : ucheb. posobie dlya vuzov. Izd. 2-e* [Linear algebra : textbook for universities. Ed. 2nd]. M. Yurayt. 2021.
3. Kremer N. S. et al. *Vysshaya matematika dlya ekonomistov : ucheb. dlya vuzov* [Higher mathematics for economists : textbook for universities] / ed. by Prof. N. S. Kremer. M. UNITY. 2002.
4. Efimov A. V., Pospelov A. S. *Sbornik zadach po matematike dlya vuzov : ucheb. posobie v 4-h ch. Ch. 1* [Collection of problems in mathematics for universities : textbook in 4 pts. Pt. 1]. M. Physical and Mathematical literature. 2001.
5. Trefilova E. S. *Izuchenie sistem linejnyh uravnenij studentami gumanitarnyh napravlenij* [Studying systems of linear equations by students of humanities] // AdvancedScience. Kirov. Vyatka State University. 2017. No. 4(8).