№3 (22) 2021
ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN

of Vyatka State University

Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал

№ 3 (22)

Киров
2021

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **А. В. Мариева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**
Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.014

О перечислении корневых деревьев с заданным числом листьев

В. А. Бызов[1], И. А. Пушкарев[2]

[1]кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3613-5949. E-mail: vbyzov@yandex.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3610-2872. E-mail: god_sha@mail.ru

Аннотация. Задачи перечисления деревьев (как графов) являются классическими, самые естественные из них давно решены [см. 8; 9]. Тем не менее, их классические решения получены и сформулированы в виде неявных функций от производящих функций, так что получить из них конкретную количественную информацию совсем не просто. В данной работе к решению этой задачи применяется агрессивно-примитивный подход, основанный на классической теореме Пойа, позволяющий получать конкретные числовые ответы намного быстрее и легче.

Ключевые слова: корневое дерево, производящая функция, теорема Пойа, симметрическая группа, циклический индекс.

В данной работе объектом исследования выступают корневые деревья. Корневым деревом называется граф, являющийся деревом, с одной выделенной вершиной – корнем. Естественно возникают многообразные задачи перечисления корневых деревьев специальных видов.

Пусть, например, $t(n)$ – количество всех корневых деревьев на n вершинах. Тогда для производящей функции $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n)x^n$ справедливо следующее равенство:

$$T(x) = x \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T(x^m)}{m}\right). \quad (1)$$

Данное соотношение было получено Д. Пойа (G. Pólya) в работе [9]. Кроме того, в [9] приводится асимптотическая оценка последовательности $t(n)$.

Можно рассмотреть задачи более специального вида. Например, Ф. Харари (F. Harary) в статье [8] рассматривал задачу перечисления корневых деревьев с данным числом листьев.

Пусть $t(n,k)$ – количество корневых деревьев на n вершинах, имеющих ровно k листьев. Харари показал, что для двумерной производящей функции $P(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} t(n,k)x^n y^k$ выполняется аналогичное соотношение

$$P(x,y) = xy - x + x \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{P(x^n, y^n)}{n}\right). \quad (2)$$

Тем самым, на данный момент соответствующие перечислительные задачи решены. Однако соотношения (1) и (2) задают функции $T(x)$ и $P(x,y)$ в неявном виде.

В данной работе обсуждается простой метод вычисления в явной форме производящих функций для количества деревьев с заданным числом листьев.

Перечисление корневых деревьев с заданным числом листьев

Приведем точные формулировки определений, необходимых для изложения основного результата.

Выделенную в дереве вершину называют *корнем*.

От корня дерева до произвольной некорневой вершины v существует единственный путь. Все вершины этого пути, кроме самой вершины v, называют *предками* вершины v. Вершину p, которая смежна с v и является ее предком, называют *родителем* вершины v. В этом случае вершина v является *сыном* вершины p. Вершины корневого дерева, не имеющие сыновей, называются *листьями* дерева. На иллюстрациях для простоты будем изображать корневое дерево «сверху вниз»: вершину-родитель выше вершины-сына. Отметим также, что корень дерева – единственная вершина, не имеющая предков.

Символом $t(n,k)$ обозначим количество корневых деревьев на n вершинах, среди которых ровно k листьев. Рассмотрим производящую функцию для последовательности $t(n,k)$ при фиксированном k: $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n,k)x^n$. Для удобства будем считать, что $t(1,1) = 1$. Заметим, что при любом фиксированном количестве вершин существует ровно одно корневое дерево с одним листом, откуда $F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

Рассмотрим корневое дерево T с k листьями при $k > 1$. Пусть степень корня этого дерева равна m, а $T_1, T_2, \ldots, T_m$ – поддеревья, корнями которых являются сыновья корня дерева T.

Случай 1. Если $m = 1$, то корень дерева соединен с одним поддеревом T_1, у которого тоже k листьев, но на единицу меньше вершин, чем у T.

Случай 2. Если $m > 1$, то у каждого из деревьев T_i $(1 \le i \le m)$ меньше k листьев, а суммарное количество вершин в деревьях T_i на единицу меньше количества вершин в дереве T. В этом случае дерево T может быть сформировано путем следующих операций. Возьмем произвольное разбиение числа k на m слагаемых. Пусть это разбиение $k = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \cdots + (k-1)i_{k-1}$, где i_1 – количество слагаемых, равных 1, i_2 – количество слагаемых, равных 2, ..., i_{k-1} – количество слагаемых, равных $k-1$. Выберем i_1 деревьев с одним листом, i_2 деревьев с двумя листьями, ..., i_{k-1} деревьев с $k-1$ листом; при этом для каждого i_s $(1 \le s \le k-1)$ выбор осуществляется с возможными повторениями. Сыновьями корня дерева T сделаем корни выбранных поддеревьев.

Так как при перестановке поддеревьев T_i $(1 \le i \le m)$ мы получаем дерево, изоморфное исходному, то по теореме Пойа [см., например, 1]:

$$F_k(x) = x\sum\left(Z_{S_{i_1}}(F_1(x), F_1(x^2), \ldots) \cdot \ldots \cdot Z_{S_{i_{k-1}}}(F_{k-1}(x), F_{k-1}(x^2), \ldots)\right) + xF_k(x), \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям числа k на более чем одно слагаемое: $k = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \cdots + (k-1)i_{k-1}$. Первое слагаемое в формуле (3) соответствует описанному выше случаю $m > 1$, второе слагаемое – случаю $m = 1$. В этой формуле применяется обозначение Z_{S_l} для циклового индекса симметрической группы S_l.

Выразив $F_k(x)$ из формулы (3), получим рекуррентное соотношение для последовательности функций $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x), \ldots$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1. $F_1(x) = \frac{x}{1-x}$;

2. при $k \ge 2$ верно, что

$$F_k(x) = \frac{x}{1-x}\sum\left(Z_{S_{i_1}}(F_1(x), F_1(x^2), \ldots) \cdot \ldots \cdot Z_{S_{i_{k-1}}}(F_{k-1}(x), F_{k-1}(x^2), \ldots)\right), \tag{4}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям k на более чем одно слагаемое.

Ниже в таблице 1 приведены результаты использования теоремы 1 для получения производящих функций $F_k(x)$ при $2 \le k \le 5$. Также в данной таблице приведены номера соответствующих числовых последовательностей в онлайн-энциклопедии OEIS [см. 2–5].

Таблица 1

Производящие функции $\mathbf{F_k(x)}$

k	$F_k(x)$	Номер
2	$\frac{x^3}{(1-x)^3(1+x)}$	A002620
3	$\frac{x^4(1+x^2+x^3)}{(1-x)^5(1+x)(1+x+x^2)}$	A055278
4	$\frac{x^5(1+x+3x^2+5x^3+7x^4+5x^5+5x^6+2x^7+x^8)}{(1-x)^7(1+x)^3(1+x^2)(1+x+x^2)}$	A055279
5	$\frac{x^6(1+4x^2+7x^3+7x^4+12x^5+13x^6+9x^7+10x^8+4x^9+2x^{10}+x^{11})}{(1-x)^9(1+x)^3(1+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)}$	A055280

Перечисление корневых деревьев с заданным количеством нелистьев

Рассмотрим задачу перечисления корневых деревьев с другой точки зрения. В отличие от предыдущего раздела зафиксируем не количество листьев в деревьях, а количество нелистовых вершин (другими словами, – разницу между количествами вершин и листьев). Во введенных выше обозначениях это приводит к рассмотрению последовательности производящих функций $\hat{F}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n+k,n)x^n$. Так как при фиксированном количестве листьев n существует ровно одно корневое дерево, у которого количество вершин равно $n+1$, то $t(n+1,n) = 1$. Поэтому $\hat{F}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

Рассмотрим некорневое дерево T на $n+k$ вершинах, в котором k нелистьев, где $k \geq 2$. Представим его в виде, изображенном на рисунке 1.

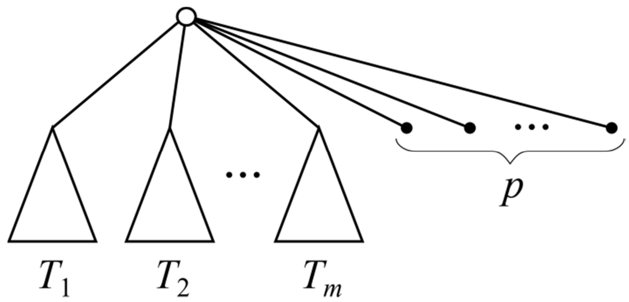

Рис. 1. Иллюстрация к теореме 2

На этом рисунке корень дерева T соединен с m деревьями T_1, T_2, ..., T_m, в каждом из которых больше одной вершины, и с p одиночными вершинами. Суммарно в деревьях T_1, T_2, ..., T_m содержится $k-1$ нелистовая вершина (нелистом является корень дерева T). Общее количество листьев в деревьях T_1, T_2, ..., T_m равно $n-p$, то есть, в зависимости от параметра p, может меняться от 1 до n.

Таким образом, в соответствии с теоремой Пойа можно сформулировать рекуррентное соотношение для последовательности функций $\hat{F}_k(x)$.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

1. $\hat{F}_1(x) = \frac{x}{1-x}$;

2. при $k \geq 2$ верно, что

$$\hat{F}_k(x) = \frac{1}{1-x}\sum \left(Z_{S_{i_1}}\big(\hat{F}_1(x), \hat{F}_1(x^2), \dots\big) \cdot \dots \cdot Z_{S_{i_{k-1}}}\big(\hat{F}_{k-1}(x), \hat{F}_{k-1}(x^2), \dots\big)\right), \qquad (5)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям числа $k-1$:

$$k-1 = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + (k-1)i_{k-1}.$$

Множитель $\frac{1}{1-x}$ в формуле (5) объясняется тем, что, как сказано выше, суммарное количество листьев в деревьях T_1, T_2, ..., T_m может меняться от 1 до n, при этом несложно показать, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n} f_s\right)x^n = \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ для произвольной последовательности f_n. Стоит также отметить, что, в отличие от теоремы 1, суммирование в формуле (5) происходит по всем разбиениям числа $k-1$, в том числе и по одноэлементному: $k-1 = k-1$.

В таблице 2 приведены производящие функции $\hat{F}_k(x)$ при $2 \leq k \leq 5$, которые были получены при помощи теоремы 2. Приведены номера соответствующих числовых последовательностей в энциклопедии OEIS [см. 6–7]. Последовательности с производящими функциями $\hat{F}_4(x)$ и $\hat{F}_5(x)$ отсутствуют в OEIS.

Таблица 2

Производящие функции $\hat{F}_k(x)$

k	$\hat{F}_k(x)$	Номер
2	$\frac{x}{(1-x)^2}$	A000027
3	$\frac{x(1+2x)}{(1-x)^3(1+x)}$	A006578
4	$\frac{x(1+x)^3}{(1-x)^4(1+x+x^2)}$	–
5	$\frac{x(1+7x+17x^2+28x^3+29x^4+25x^5+13x^6+5x^7)}{(1-x)^5(1+x)^2(1+x^2)(1+x+x^2)}$	–

Раскладывая найденные производящие функции в ряд Тейлора, можно найти числа $t(n,k)$. Представим эти числа в виде треугольника: параметр n – номер строки, параметр k – номер столбца (Таблица 3).

Таблица 3

Треугольник чисел $t(n, k)$

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1								
3	1	1							
4	1	2	1						
5	1	4	3	1					
6	1	6	8	4	1				
7	1	9	18	14	5	1			
8	1	12	35	39	21	6	1		
9	1	16	62	97	72	30	7	1	
10	1	20	103	212	214	120	40	8	1

Список литературы

1. *Беккенбах Э. Ф.* Прикладная комбинаторная математика. М. : Мир, 1968. 363 с.
2. A002620 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A002620.
3. A055278 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055278.
4. A055279 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055279.
5. A055280 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A055280.
6. A000027 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A000027.
7. A006578 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A006578.
8. *Harary F.* Recent results on graphical enumeration // Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 406. Pp. 29–36.
9. *Pólya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Mathematica. 1937. Vol. 68. Pp. 145–254.

On the enumeration of root trees with a given number of leaves

V. A. Byzov[1], I. A. Pushkarev[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3613-5949. E-mail: vbyzov@yandex.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3610-2872. E-mail: god_sha@mail.ru

Abstract. The problems of enumerating trees (as graphs) are classical, the most natural of them have long been solved [see 8; 9]. Nevertheless, their classical solutions are obtained and formulated in the form of implicit functions from generating functions, so it is not at all easy to get concrete quantitative information from them. In this paper, an aggressively primitive approach is applied to solving this problem, based on the classical Poya theorem, which makes it possible to obtain specific numerical answers much faster and easier.

Keywords: root tree, generating function, Poya's theorem, symmetric group, cyclic index.

References

1. *Beckenbach E. F. Prikladnaya kombinatornaya matematika* [Applied combinatorial mathematics]. M. Mir (World). 1968. 363 p.
2. A002620 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A002620.
3. A055278 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055278.
4. A055279 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055279.
5. A055280 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A055280.
6. A000027 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A000027.
7. A006578 – OEIS // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: https://oeis.org/A006578.
8. *Harary F.* Recent results on graphical enumeration // Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 406. Pp. 29–36.
9. *Pólya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Mathematica. 1937. Vol. 68. Pp. 145–254.

УДК 517.2/.3 DOI 10.25730/VSU.0536.21.015

Неравенство Йенсена и его аналог для гармонически выпуклых функций

С. И. Калинин
доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Статья рассматривает неравенство Йенсена и его аналог для гармонически выпуклых функций. Аналогичные неравенства вводятся и для гармонически вогнутых функций. Приводится обоснование соотношения между весовыми средними арифметическим и гармоническим, а также его аналога посредством устанавливаемых в работе теорем.

Работа адресуется всем интересующимся вопросами выпуклых функций и тематикой неравенств.

Ключевые слова: выпуклые, вогнутые функции; гармонически выпуклые функции; неравенство Йенсена, аналог неравенства Йенсена.

Напомним определение понятия выпуклой на промежутке функции.

Пусть *l* – произвольный промежуток числовой прямой *Ox* и $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на *l*.

Определение 1. $f(x)$ – *выпуклая* на рассматриваемом промежутке функция, если для любых $a,b \in l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях данного определения для $a \ne b$ и $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то *f* – строго выпуклая на промежутке *l* функция.

Аналогично определяются понятия вогнутой и строго вогнутой функций, они описываются соответственно неравенствами (1)–(2) с использованием противоположных знаков неравенства.

Очевидно, строго выпуклая (строго вогнутая) функция является выпуклой (вогнутой).

Следует заметить, что если *f* – строго выпуклая или строго вогнутая на отрезке $[a;b]$ функция, то равенство в (1) (соответственно – в противоположном ему неравенстве) может достигаться только в случаях: $a=b$, $\lambda=0$, $\lambda=1$.

Для функции f, выпуклой на промежутке *l*, хорошо известно следующее неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad (x_k \in l; k=1,\dots,n), \tag{3}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – положительные числа (связанные с числами $x_1,\dots,x_n$ весы), удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Если при этом f – строго выпуклая функция, то (3) может обращаться в равенство только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Неравенство (3) называется *неравенством Йенсена* для рассматриваемой функции.

Ясно, что для вогнутой на промежутке *l* функции f будет выполняться неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad (x_k \in l; k=1,\dots,n), \tag{4}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – снова положительные весы, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Подчеркнем, что неравенство Йенсена для выпуклых и вогнутых функций позволяет обосновать ряд классических неравенств, включая неравенства Коши, Коши – Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана [см., например, 3]. Кроме того, это неравенство нередко применяется при решении уравнений и экстремальных задач, особенно при осмыслении математических задач олимпиадной тематики.

В сравнении с неравенством (3) в литературе менее известен его аналог – неравенство

$$f\left(a+b-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\le f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k), \tag{5}$$

где снова $f: l \to \mathbf{R}$ – выпуклая на промежутке *l* функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий *l*; $x_1,\dots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. Если при этом f – строго выпуклая функция, то (5) может обращаться в равенство только при условии, когда все числа $x_1,\dots,x_n$ совпадают либо с *a*, либо с *b*.

По своей структуре записи неравенство (5) схоже с неравенством (3), потому в некоторых литературных источниках [напр., 3, 4] его называют *аналогом неравенства Йенсена*. Условимся следовать данной терминологии.

Если в (5) знак неравенства заменить знаком $\ge$, то будем иметь аналог неравенства Йенсена для вогнутой функции.

Аналог неравенства Йенсена для выпуклой (вогнутой) функции обстоятельно рассмотрен в статье [2].

О гармонически выпуклых функциях. В данном пункте мы приведем соответствующие сведения о гармонически выпуклых функциях, опираясь на нашу работу [3].

Пусть $l\subseteq(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – произвольный промежуток и $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на этом промежутке.

Определение 2. Функцию *f* назовем *гармонически выпуклой* на *l*, если для любых $a,b\in l$ и любого числа $\lambda\in[0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1}+(1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right)\le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \tag{6}$$

Если в условиях определения 2 для $a\ne b$ и всех $\lambda\in(0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda a^{-1}+(1-\lambda)b^{-1}\right)^{-1}\right)< \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b), \tag{7}$$

то функцию *f* будем называть *строго гармонически выпуклой* на рассматриваемом промежутке *l*.

Очевидно, строго гармонически выпуклая функция является гармонически выпуклой.

Аналогично определяются *гармонически вогнутая* и *строго гармонически вогнутая* функции – для этого в неравенствах (6)–(7) знак неравенства следует поменять на знак $\ge$ (>) соответственно.

В [3] показано, что на всяком промежутке $l\subseteq(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ функция $f(x)=c+\dfrac{\gamma}{x}$, где *c* и γ – вещественные константы, является как гармонически выпуклой, так и гармонически вогнутой; для нее неравенство (6) реализуется со знаком равенства. График такой функции мы условились называть гиперболической кривой (гиперболической дугой). В вопросе геометрической характеризации гармонически выпуклых и гармонически вогнутых функций гиперболическая кривая играет такую же роль, как невертикальная прямая в описании классической выпуклости / вогнутости функции.

Нетрудно показать, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае для их ординат справедливо соотношение $y_1=y_2$), то соединяющая данные точки гиперболическая дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y=y_1$.

Неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции. Справедлива следующая

Теорема 1. Для функции f, гармонически выпуклой на промежутке *l*, выполняется неравенство

$$f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)\quad (x_k\in l; k=1,\dots,n), \tag{8}$$

где $x_1,\dots,x_n$ – кортеж значений из промежутка *l*, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$. Если при этом f – строго гармонически выпуклая функция, то (8) может обращаться в равенство только при условии $x_1=\ldots=x_n$.

Неравенство (8) условимся называть *неравенством Йенсена для гармонически выпуклой функции.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по *n*. База индукции (выполнение неравенства (8) при $n=2$) обеспечивается определением гармонической выпуклости функции f на промежутке *l*, а также условиями достижения равенства в соотношении для случая строгой гармонической выпуклости данной функции.

Предположим, что теорема справедлива при $n=m$, $m \geq 2$, при этом если функция f является строго гармонически выпуклой на рассматриваемом промежутке, то равенство в неравенстве Йенсена для чисел $x_1,\ldots,x_m$ может достигаться только при условии $x_1 = \ldots = x_m$. Убедимся в том, что теорема будет верна и при $n = m+1$.

Пусть числа $x_1,\ldots,x_{m+1}$ принадлежат промежутку *l*, $\lambda_k > 0$ для всех $k=1,\ldots,m+1$ и $\sum\limits_{k=1}^{m+1}\lambda_k = 1$. Введем в рассмотрение величину $\widetilde{x}_m = \left(\dfrac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_{m+1}}x_m^{-1} + \dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m+\lambda_{m+1}}x_{m+1}^{-1}\right)^{-1}$ – взвешенное среднее гармоническое чисел x_m, x_{m+1} с весами $\dfrac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_{m+1}}$, $\dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m+\lambda_{m+1}}$. Очевидно, оно принадлежит *l*. В силу индукционного предположения и базы индукции имеем: $f\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{m+1}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) =$

$$= f\left(\left(\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k x_k^{-1} + (\lambda_m+\lambda_{m+1})\widetilde{x}^{-1}\right)^{-1}\right) \leq \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k f(x_k) + (\lambda_m+\lambda_{m+1}) f(\widetilde{x}_m) \leq \tag{9}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k f(x_k) + (\lambda_m+\lambda_{m+1})\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m+\lambda_{m+1}} f(x_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m+\lambda_{m+1}} f(x_{m+1})\right) = \tag{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k f(x_k).$$

Таким образом, неравенство (8) выполняется и при $n=m+1$. Выясним вопрос достижения равенства в нем при условии, когда f – строго выпуклая на рассматриваемом промежутке функция. Упоминаемое равенство будет иметь место только тогда, когда обратятся в равенства соотношения (9) и (10). В (9) будем иметь равенство лишь при условии $x_1 = \ldots = x_{m-1} = \widetilde{x}_m$, а в (10) – только при условии $x_m = x_{m+1}$. Но последнее равенство влечет $x_m = x_{m+1} = \widetilde{x}_m$, следовательно, при $n=m+1$ в условиях строгой выпуклости f неравенство (8) обращается в равенство лишь тогда, когда $x_1 = \ldots = x_{m+1}$.

Теорема 1 полностью доказана.

Очевидно, теорему 1 можно сформулировать и для гармонически вогнутой на промежутке *l* функции f. Для такой функции неравенство (8) следует заменить противоположным неравенством

$$f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) \quad (x_k \in l; k=1,\ldots,n). \tag{11}$$

Если в неравенстве (11) f – строго вогнутая функция, то оно может обратиться в равенство только при условии $x_1 = \ldots = x_n$.

Аналог неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции. В данном разделе мы рассмотрим неравенство, схожее по своей структуре записи с неравенством (8). Упоминаемое неравенство условимся *называть аналогом неравенства Йенсена для гармонически выпуклой функции*. Оно доставляется следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $f : l \to \mathbf{R}$ – гармонически выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий *l*; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – произвольный набор положительных чисел (весов), для которых $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. В данных условиях справедливо неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \leq f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{12}$$

Если при этом f – строго гармонически выпуклая функция, то (12) может обращаться в равенство только тогда, когда все числа $x_1,\ldots,x_n$ совпадают либо с *a*, либо с *b*.

Сразу отметим, что если *f* – гармонически вогнутая на промежутке *l* функция, то для нее будет иметь место неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right) \geq f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \tag{13}$$

$$[a;b] \in l;\ x_k \in l,\ \lambda_k > 0\ \ (k = 1,\ldots,n);\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Условия достижения равенства в (13) в случае строгой гармонической вогнутости функции f будут те же, что и для (12), то есть при совпадении чисел $x_1,\ldots,x_n$ либо с *a*, либо с *b*.

Для доказательства теоремы 2 установим сначала следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. Если функция *f* гармонически выпуклая на отрезке $[a;b]$, не содержащем нуля, то для любого *x*, принадлежащего этому отрезку, будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}\right) \leq f(a) + f(b) - f(x). \tag{14}$$

Если при этом *f* – строго гармонически выпуклая функция, то неравенство (14) обращается в равенство только тогда, когда $x \in \{a,b\}$.

Доказательство. Отметим, что неравенство (14) корректно по записи, поскольку точка $\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}$ принадлежит отрезку $[a;b]$. Это следует из цепочки неравенств:

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow a^{-1} \geq x^{-1} \geq b^{-1} \Leftrightarrow -a^{-1} \leq -x^{-1} \leq -b^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} \leq a^{-1} + b^{-1} - x^{-1} \leq a^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b \geq \left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1} \geq a.$$

Из включения $x \in [a;b]$ следует, что существует $\lambda,\ \lambda \in [0;1]$, такое, что будет иметь место представление $x = \left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda) b^{-1}\right)^{-1}$. Выразим через λ величину $\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}$:

$$\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1} = \left((1-\lambda) a^{-1} + \lambda b^{-1}\right)^{-1}.$$

Тогда в силу гармонической выпуклости функции *f* будем иметь:

$$f\left(\left(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1}\right)^{-1}\right) = f\left(\left((1-\lambda) a^{-1} + \lambda b^{-1}\right)^{-1}\right) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b) = \tag{15}$$

$$= f(a) + f(b) - \lambda f(a) - (1-\lambda) f(b) \leq f(a) + f(b) - f\left(\left(\lambda a^{-1} + (1-\lambda) b^{-1}\right)^{-1}\right) = \tag{16}$$

$$= f(a) + f(b) - f(x).$$

Неравенство (14) доказано.

Выясним условия достижения равенства в нем при том условии, что *f* – строго гармонически выпуклая функция. Для этого следует осмыслить условия достижения равенства в (15) и (16). Такие условия сводятся к тому, что должны иметь место равенства $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, то есть *x* должно совпадать или с *b*, или с *a*.

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Установим неравенство (12). Сначала отметим, что значение

$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)$ существует, поскольку весовое среднее арифметическое $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}$ чисел $x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}$ есть точка из отрезка $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$. Оценим это значение сверху, используя неравенство Йенсена (8) для гармонически выпуклых функций. Будем иметь:

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)=f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)\right)^{-1}\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)^{-1}\right). \tag{17}$$

Но в силу леммы 1

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le f(a)+f(b)-f(x_k)\,,\ k=1,\ldots,n\,, \tag{18}$$

значит,

$$f\left(\left(a^{-1}+b^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(f(a)+f(b)-f\left(x_k\right)\right)=f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right),$$

то есть неравенство (12) установлено.

Ясно, что равенство в нем будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (17), и в неравенствах (18). Если функция *f* является строго гармонически выпуклой, то в (17) равенство может достигаться только при условии $x_1=\ldots=x_n$, а в неравенствах (18) – при условии $x_k\in\{a,b\},\ k=1,\ldots,n$. Следовательно, в условиях строгой гармонической выпуклости *f* должно быть: или $x_1=\ldots=x_n=a$, или $x_1=\ldots=x_n=b$. Теорема 1 полностью доказана.

Приведем одно следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $f:l\to\mathbf{R}$ – гармонически выпуклая на промежутке *l* функция; $x_1,\ldots,x_n$ – произвольный набор чисел из этого промежутка, перенумерованных в порядке неубывания; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(\left(x_1^{-1}+x_n^{-1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\right)\le f(x_1)+f(x_n)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right). \tag{19}$$

Если при этом функция *f* является строго гармонически выпуклой, то неравенство (19) обращается в равенство только при условии $x_1=\ldots=x_n$.

Доказательство этого утверждения, легко видеть, следует из теоремы 2, если в ней положить $a=x_1,b=x_n$.

Замечание 1. Требование монотонности последовательности $x_1,\ldots,x_n$ в условиях следствия 1, очевидно, можно заменить таким: в данной последовательности $x_1=\min_{1\le k\le n}\{x_k\},\ x_n=\max_{1\le k\le n}\{x_k\}$.

О неравенстве между взвешенными средними гармоническим и арифметическим и его аналоге. Пусть промежуток *l* есть интервал $(0;+\infty)$. Легко проверить, что функция $f(x)=x$ является строго гармонически выпуклой на нем [2]. Следовательно, для нее справедливо неравенство Йенсена (8):

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\,, \tag{20}$$

где $x_k > 0, \lambda_k > 0,\ k = 1,\dots,n$; $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

В неравенстве (20) левая часть есть взвешенное среднее гармоническое чисел $x_1,\dots,x_n$ с весами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, а правая – аналогичное взвешенное среднее арифметическое данных чисел. Ясно, что равенство в (20) может достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

В тематике средних величин соотношение (20) обычно кратко записывают в виде

$$H_n \le A_n, \tag{21}$$

памятуя об обозначениях $H_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1}$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Применим сейчас к функции $f(x) = x$ теорему 2. Пусть $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий положительному лучу; $x_1,\dots,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – тот же набор весов, что и выше. Введем в рассмотрение величины

$$\widehat{H}_n = \left(a^{-1} + b^{-1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^{-1}\right)^{-1},\ \widehat{A}_n = a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \text{ -}$$

своеобразные аналоги величин H_n и A_n. Нетрудно видеть, что в силу теоремы 2 для них справедливо неравенство

$$\widehat{H}_n \le \widehat{A}_n. \tag{22}$$

Так как $f(x) = x$ – строго гармонически выпуклая функция, то неравенство (22) может обратиться в равенство лишь тогда, когда либо $x_1 = \dots = x_n = a$, либо $x_1 = \dots = x_n = b$.

Список литературы

1. *Калинин С. И.* Аналоги неравенства Йенсена для выпуклых и логарифмически выпуклых функций, их некоторые применения // Advanced science. VyatSU, 2017. № 4.
2. *Калинин С. И.* Геометрическая характеризация гармонически выпуклых функций // Актуальные проблемы физико-математического образования : мат-лы II Международной научно-практической конференции. Наб. Челны : НГПУ, 2017. С. 24–27.
3. *Калинин С. И.* Метод неравенств решения уравнений: учеб. пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М. : Московский Лицей, 2013. 112 с.
4. *Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M., Pečarić J.* A variant of Jensen-Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, J. // Math. Anal. Applics. 2005. N. 307. Pp. 370–385.
5. *Mercer A.* McD. A variant of Jensen's inequality. J. Inequal. In Pure and Appl. // Math. 2003. Vol. 4. Is. 4. Article 73. Pp. 1–2.

Jensen's inequality and its analogue for harmoniously convex functions

S. I. Kalinin

Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The article considers Jensen's inequality and its analogue for harmonically convex functions. Similar inequalities are introduced for harmonically concave functions. The substantiation of the relation between the arithmetic and harmonic weight averages, as well as its analogue by means of the theorems established in the work, is given.

The work is addressed to all those interested in convex functions and the topic of inequalities.

Keywords: convex, concave functions, harmonically convex functions, Jensen's inequality, an analogue of Jensen's inequality.

References

1. *Kalinin S. I. Analogi neravenstva Jensena dlya vypuklyh i logarifmicheski vypuklyh funkcij, ih nekotorye prime-*

neniya [Analogs of Jensen's inequality for convex and logarithmically convex functions, their some applications] // Advanced science. VyatSU. 2017. No. 4.

2. *Kalinin S. I. Geometricheskaya harakterizaciya garmonicheski vypuklyh funkcij* [Geometric characterization of harmoniously convex functions] // *Aktual'nye problemy fiziko-matematicheskogo obrazovaniya : mat-ly II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii* – Actual problems of physical and mathematical education : materials of the II International scientific and practical conference. Naberezhnye Chelny. NSPU. 2017. Pp. 24–27.

3. *Kalinin S. I. Metod neravenstv resheniya uravnenij: ucheb. posobie po elektivnomu kursu dlya klassov fiziko-matematicheskogo profilya* [Method of inequalities for solving equations: textbook on the elective course for classes of physical and mathematical profile]. M. Moskovsky licey (Moscow lyceum). 2013. 112 p.

4. *Abramovich S., KlaričićBakula M., Matić M., Pečarić J.* A variant of Jensen-Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, J. // Math. Anal. Applics. 2005. N. 307. Pp. 370–385.

5. *Mercer A.* McD. A variant of Jensen's inequality. J. Inequal. In Pure and Appl. // Math. 2003. Vol. 4. Is. 4. Article 73. Pp. 1–2.

УДК 004.89:33 DOI 10.25730/VSU.0536.21.016

Автоматическое порождение аргументационных текстов в экономической сфере*

Е. В. Котельников[1], Д. Осадчий[2], И. Н. Фищева[3]
[1]доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров;
старший научный сотрудник Национального центра когнитивных разработок, Университет ИТМО. Россия, г. Санкт-Петербург. ORCID: 0000-0001-9745-1489. E-mail: kotelnikov.ev@gmail.com
[2]магистрант факультета цифровых трансформаций, Университет ИТМО. Россия, г. Санкт-Петербург. ORCID: 0000-0001-5131-7866. E-mail: da.osadchiy@gmail.com
[3]старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-6941-2009. E-mail: fishchevain@gmail.com

Аннотация. Разработка больших и сверхбольших языковых моделей, таких как GPT-3, T5, Switch Transformer, ERNIE и др. позволила в последнее время значительно повысить качество генерации текстов. Одним из важных направлений в этой области является порождение текста с аргументами. Решение такой задачи может быть использовано при проведении деловых совещаний, в политических дебатах, в диалоговых системах, при подготовке студенческих эссе. Одной из основных предметных областей в указанных приложениях является экономическая сфера.

Ключевой проблемой при генерации аргументов для русского языка является дефицит корпусов, размеченных по аргументации. В настоящей работе мы используем переводные версии корпусов Argumentative Microtext, Persuasive Essays и UKP Sentential для обучения моделей на основе RuBERT и XGBoost. Далее построенные модели используются для разметки по аргументации корпуса экономических новостей. Затем размеченный корпус применяется для дообучения модели ruGPT-3, которая порождает аргументационные тексты. Результаты показывают, что такой подход позволяет повысить правильность генерации аргументов на 9 процентных пунктов (60 % против 51 %) по сравнению с исходной моделью ruGPT-3.

Ключевые слова: извлечение аргументации, генерация текстов, ruGPT-3, RuBERT, XGBoost.

Автоматическая генерация текста в последнее время достигла впечатляющих успехов в связи с разработкой больших и сверхбольших предобученных языковых моделей [7], таких как GPT-3 [2], T5 [13], Switch Transformer [3], ERNIE [22] и др. Эти модели позволяют осуществлять настройку на решаемую задачу при помощи обновления весов на небольшой обучающей выборке (дообучение) или без обновления весов в режимах few-shot learning (с несколькими обучающими примерами, как правило от 10 до 100), one-shot learning (один обучающий пример) и даже zero-shot learning [2].

Одним из важных направлений в генерации текста является порождение текста с аргументами [6; 8; 17]. Аргументы в этом случае либо находятся при помощи информационно-поисковой системы [8], либо генерируются предобученной языковой моделью [1; 6]. Аргумент – это совокупность высказываний, включающая утверждение и доводы [21]. Под утверждением понимается некоторое высказывание, выражающее потенциально спорную точку зрения. Доводами являются высказывания, подтверждающие или опровергающие данное утверждение.

Системы, позволяющие порождать текст с доводами относительно заданного утверждения, могут применяться в ходе деловых совещаний для оперативной генерации аргументов; в политических дебатах; в юриспруденции для поиска и генерации аргументов по законодательным актам и прецедентам; в диалоговых системах для подбора аргументов с целью убеждения собеседника; в образовании при анализе, генерации и оценке аргументации в студенческих работах. Одной из наиболее распространенных предметных областей для указанных приложений является экономическая сфера.

* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации и Германской службы академических обменов (DAAD) в рамках международного научно-образовательного сотрудничества по программе «Михаил Ломоносов» по теме: «Риторические модели порождения текста».

Для русского языка существует несколько общедоступных предобученных языковых моделей, в том числе RuBERT [10], SBERT [16] и ruGPT-3 [14]. Также в последнее время появилось несколько работ, посвященных анализу аргументации на русском языке [4; 5; 9; 15].

Однако до сих пор не было работ, посвященных генерации аргументативных русскоязычных текстов. В настоящей работе предпринимается попытка закрыть этот пробел и предлагается подход для построения языковой модели, позволяющей генерировать аргументативный текст на русском языке в экономической сфере.

Схема предлагаемого подхода для генерации аргументативных текстов включает три шага. На *первом шаге* существующие корпуса с аргументативной разметкой (Argumentative Microtext, PersEssays и UKP Sentential) используются для дообучения предобученной модели RuBERT [10] и для обучения модели XGBoost. Указанные модели показали наилучшие результаты в задаче классификации аргументов [5]. Рассматривается задача классификации «довод/не довод» на уровне предложения. На *втором шаге* обученные модели независимо друг от друга классифицируют предложения экономического корпуса. На *третьем шаге* осуществляется дообучение предобученной модели ruGPT-3 [14] в два этапа. На первом этапе с этой целью были использованы по 1000 предложений от каждой модели с наивысшими оценками вероятности отнесения к классу «довод». На втором этапе применялись 100 предложений, размеченных на предыдущем шаге вручную. Для оценки и сравнения качества исходной модели и дообученной использовались 10 затравок, для каждой из которых обе модели генерировали 10 потенциальных предложений-доводов. Полученные 200 предложений размечались вручную.

В исследовании использовались три существующих корпуса с аргументативной разметкой – Argumentative Microtext, PersEssays и UKP Sentential, а также корпус экономических новостей.

Argumentative Microtext Corpus был предложен в [12; 18]. Корпус включает 283 текста по разным темам (повышение пенсионного возраста, страхование здоровья, школьная униформа и т. п.). Каждый текст содержит одно утверждение относительно некоторой темы и от 2 до 10 ADUs (argumentative discourse unit), размеченных как доводы «за» или «против» данного утверждения. ADU – это фрагмент текста, который имеет единственное аргументационное значение [21, p. 63]. В Argumentative Microtext ADU может быть как целым предложением, так и частью предложения. В дальнейшем изложении мы считаем каждое отдельное ADU предложением.

Persuasive Essays Corpus (PersEssays) был введен в [20]. Он содержит 399 текстов по широкому спектру тематик (школьное образование, иммиграция, экономическая политика государства и т. п.). В качестве ADU выступают предложения. Разметка предложений выполнена по четырем типам: основное утверждение, утверждение, довод и нейтральный элемент. При формировании обучающего корпуса для классификации «довод/не довод» основные утверждения были исключены, просто утверждения и собственно доводы использованы как доводы, а нейтральные элементы – как «не доводы».

UKP Sentential Argument Mining Corpus (UKP Sentential) был предложен в [19]. Корпус включает 25492 предложения, размеченных как доводы «за», «против» или «не является доводом» по отношению к одной из восьми тем (аборты, клонирование, смертная казнь и т. п.). В корпусе имеются 489 предложений, разметка которых отличается для разных тематик. Такие предложения были исключены.

Фищева и Котельников [5] показали, что при машинном переводе англоязычного корпуса Argumentative Microtext на русский язык лучший результат среди систем Google Translate, Yandex.Translate и Promt продемонстрировал Google Translate. Поэтому все англоязычные корпуса в этой работе были переведены на русский язык с помощью Google Translate.

Для дообучения модели ruGPT-3 в сфере экономики использовался корпус русскоязычных экономических новостей, собранных с сайта banki.ru. Исходный корпус включал 7759 текстов за период с 01.06.2019 по 12.07.2021. Для текстов была осуществлена сегментация на предложения на основе библиотеки *Stanza*[1] (средний размер текстов – девять предложений) и токенизация с помощью библиотеки *nltk*[2]. По 10 % самых длинных и самых коротких предложений, а также повторяющиеся предложения были удалены. В результате предобработки было получено 68859 предложений со средней длиной 15 слов.

На первом шаге предложенный подход предполагает дообучение предобученной модели RuBERT и обучение модели XGBoost в задаче классификации предложений на два класса – «довод» и «не довод». Для обеих моделей использовалась одинаковая 5-кратная перекрестная проверка для получения оценок качества. Для подбора гиперпараметров для XGBoost применялась 4-кратная вложенная перекрестная проверка, для RuBERT – отложенная выборка (20 %):

[1] https://stanfordnlp.github.io/stanza.

[2] https://www.nltk.org.

– XGBoost[3]: количество деревьев = [50, 150, **500**], максимальная глубина дерева = [**2**, 8, 20, 30];

– RuBERT: количество эпох = [3, **5**], размер батча = [4, **8**], скорость обучения = $\mathbf{10^{-5}}$.

Для XGBoost использовалось три типа признаков:

– лексические признаки – дискурсивные маркеры (“поэтому”, “следовательно”, “во-первых” и т. п.) и модальные слова (“следует”, “может”, “хочет” и т. п.), включая отрицания, всего 255 признаков;

– пунктуационные признаки – запятая, двоеточие, точка с запятой, вопросительный и восклицательный знаки, всего 5 признаков;

– морфосинтаксические признаки – N-граммы на основе частей речи (существительные, местоимения, глаголы, прилагательные и наречия), N = {2, 3, 4}, и грамматические признаки глаголов: время, наклонение, лицо; всего 783 признака. Морфологический анализ осуществлялся с помощью mystem[4].

В отличие от [5] мы не добавили признаки предыдущего и следующего предложений, так как корпус UKP Sentential содержит только отдельные предложения, а не тексты.

Результаты кросс-валидации для объединенного корпуса (Argumentative Microtext ∪ PersEssays ∪ UKP Sentential) представлены в таблице 1.

Таблица 1

Оценки качества для задачи классификации «довод»/«не довод»: макроусредненная F1-мера, точность и полнота (среднее ± стандартное отклонение)

Модель	F1-мера	Точность	Полнота
XGBoost	0,6800±0,0066	0,6817±0,0065	0,6796±0,0066
RuBERT	0,7903±0,0051	0,7901±0,0051	0,7908±0,0050

XGBoost значительно уступает RuBERT в этой задаче, в отличие от результатов [4], где обе модели показали сопоставимое качество. Это связано с тем, что при обучении XGBoost в нашем исследовании не использовались контекстные признаки, являющиеся очень важными по результатам [4]. После оценки качества обе модели с подобранными оптимальными гиперпараметрами были обучены на всем объединенном корпусе. Построенные модели использовались на следующем этапе для классификации предложений экономического корпуса.

Для проверки качества классификации предложений на «довод»/«не довод» была проведена ручная разметка 50 предложений от каждой модели с наивысшими оценками вероятности отнесения к классу «довод» (всего 100 предложений). Задача разметки осложнялась тем, что для полученных доводов отсутствовали утверждения. Чтобы упростить разметку, аннотаторам предоставлялся заголовок новостной статьи, из которой было извлечено размечаемое предложение.

В разметке участвовало пять аннотаторов (носители русского языка). Перед ними была поставлена бинарная задача разметить предложения как содержащие или не содержащие довод (без указания того, какая модель их предоставила). Доводом следовало считать предложение, которое могло быть использовано для убеждения оппонента в каком-либо утверждении с учетом контекста, предоставляемого заголовком новостной статьи. Окончательное решение относительно предложения принималось на основании простого голосования оценок аннотаторов.

Для XGBoost точность классификации оказалась 56 % (28 из 50), для RuBERT – 36 % (18 из 50). Согласие аннотаторов, вычисленное по каппе Флейса, равно 0,1734. Такой уровень согласия соответствует незначительному согласию по шкале Лэндиса и Коха [11]. Относительно низкий уровень согласия связан с тем, что аннотаторам не были предоставлены утверждения. При разметке доводов с утверждениями уровень согласия оказался значительно выше.

Несмотря на то, что XGBoost продемонстрировал более высокое качество при ручной разметке, было принято решение использовать для разметки экономического корпуса обе модели. Это связано с тем, что, во-первых, обе модели распознают в качестве доводов различные предложения; во-вторых, RuBERT показал себя лучше при автоматической оценке качества (см. Таблицу 1).

С целью построения модели генерации аргументативных текстов использовалось дообучение предобученной модели ruGPT-3 [14] в два этапа. На первом этапе в качестве обучающих данных использовались по 1000 предложений из экономического корпуса, размеченные моделями XGBoost и RuBERT как «доводы» с наивысшими оценками уверенности (всего 2000 предложений).

Дообучалась версия *ruGPT3Large* с использованием Google Colab Pro (видеокарта NVIDIA Tesla P4) со следующими гиперпараметрами: количество эпох 5, размер батча 1, размер блока 128. На вход моде-

[3] Оптимальные значения гиперпараметров выделены жирным – они оказались одинаковыми на всех разбиениях.

[4] https://yandex.ru/dev/mystem.

ли подавались по отдельности предложения обучающего корпуса, которым приписывался префикс «потому что».

На втором этапе для обучения использовались 100 предложений, размеченных на предыдущем шаге вручную. Гиперпараметры и видеокарта были теми же. На следующем шаге обученная модель ruGPT-3 тестировалась с помощью ручной разметки сгенерированных доводов.

Для тестирования обученной модели ruGPT-3 использовались 10 затравок-утверждений (после каждого утверждения добавлялся суффикс «потому что»): «Банкам следует более широко использовать биометрию», «Государственные облигации являются одним из наиболее надежных видов ценных бумаг», «Деньги нужно вкладывать в акции», «Криптовалюты лучше фиатных валют», «Лучшей инвестицией является покупка недвижимости», «Не следует играть на валютном рынке», «Обучение финансовой грамотности зачастую приводит к необоснованной уверенности», «Покупка земельного участка является хорошей инвестиционной стратегией», «При оформлении кредитной карты стоит внимательно отнестись к выбору банка», «Сбережения следует хранить в валюте».

В качестве модели для сравнения применялась исходная модель ruGPT3Large. Для каждой затравки каждой моделью были сгенерированы 10 потенциальных предложений-доводов (zero-shot learning). Для генерации использовались следующие параметры: Top-K=50, top-p=0,92.

Сгенерированные 200 предложений размечались вручную пятью аннотаторами. Аннотаторам предоставлялись пары <утверждение – предложение> без информации о том, какая модель сгенерировала данное предложение. Доводом следовало считать предложение, которое могло быть использовано для убеждения оппонента в заданном утверждении. Окончательное решение относительно предложения принималось на основании простого голосования оценок аннотаторов.

В результате ручной разметки точность дообученной модели ruGPT-3 оказалась равна 60 % (60 доводов из 100 предложений), исходной модели – 51 (51 довод из 100 предложений).

Согласие аннотаторов, вычисленное по каппе Флейсса, равно 0,4292. Такой уровень согласия соответствует умеренному согласию по шкале Лэндиса и Коха [11]. Уровень согласия оказался значительно выше, чем в предыдущей процедуре разметки отдельных доводов, в связи с тем, что аннотаторам предоставлялось утверждение.

Таким образом, в настоящем исследовании предложен подход для построения русскоязычной модели генерации доводов по заданному утверждению в экономической сфере. На наш взгляд, достигнутое качество генерации аргументативных текстов дообученными моделями позволяет с осторожностью говорить о возможности использования таких моделей на практике, например, для оперативной генерации доводов в ходе деловых совещаний.

В качестве перспективных направлений исследований следует выделить изучение влияния входного контекста на качество генерации аргументативных текстов моделей типа GPT, а также исследование ситуации переобучения в процессе дообучения моделей.

Список литературы

1. *Al-Khatib K., Trautner L., Wachsmuth H., Hou Y., Stein B.* Employing Argumentation Knowledge Graphs for Neural Argument Generation. In: Proceedings of the 59th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 11th International Joint Conference on Natural Language Processing. Pp. 4744–4754 (2021).

2. *Brown T. B., Mann B., Ryder N., Subbiah M., Kaplan J. et al.* Language Models are Few-Shot Learners. In: Proceedings of the 34th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2020). Pp. 1877–1901 (2020).

3. *Fedus W., Zoph B., Shazeer N.* Switch Transformers: Scaling to Trillion Parameter Models with Simple and Efficient Sparsity. URL: https://arxiv.org/abs/2101.03961 (2021).

4. *Fishcheva I., Goloviznina V., Kotelnikov E.* Traditional Machine Learning and Deep Learning Models for Argumentation Mining in Russian Texts. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2021". Pp. 246–258 (2021).

5. *Fishcheva I., Kotelnikov E.* Cross-lingual argumentation mining for Russian texts. In: Proceedings of the 8th International Conference "Analysis of Images, Social networks and Texts" (AIST 2019), Lecture Notes in Computer Science, 11832. Pp. 134–144 (2019).

6. *Gretz S., Bilu Y., Cohen-Karlik E., Slonim N.* The workweek is the best time to start a family – A Study of GPT-2 Based Claim Generation. In: Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020. Pp. 528–544 (2020).

7. *Han X., Zhang Z., Ding N., Gu Y., Liu X., et al.* Pre-Trained Models: Past, Present and Future. AI Open. URL: https://doi.org/10.1016/j.aiopen.2021.08.002 (2021).

8. *Hua, X., Hu, Z., Wang, L.* Argument generation with retrieval, planning, and realization. In: Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. Pp. 2661–2672 (2019).

9. *Ilina D., Kononenko I., Sidorova E.* On Developing a Web Resource to Study Argumentation in Popular Science Discourse. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2021". Pp. 318–327 (2021).

10. *Kuratov Y., Arkhipov M.* Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for Russian language. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2019". Pp. 333–340 (2019).

11. *Landis J. R., Koch G. G.* The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. Biometrics 33(1). Pp. 159–174 (1977).

12. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts. In: Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation. Pp. 801–815 (2015).

13. *Raffel C., Shazeer N., Roberts A., Lee K., Narang S. et al.* Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer. Journal of Machine Learning Research 21. Pp. 1–67 (2020).

14. ruGPT-3 pretrained language model. URL: https://sbercloud.ru/ru/warp/gpt-3.

15. *Salomatina N., Kononenko I., Sidorova E., Pimenov I.* Identification of connected arguments based on reasoning schemes "from expert opinion". Journal of Physics: Conference Series 1715 (2021).

16. SBERT pretrained language model. URL: https://developers.sber.ru/portal/services/sbert.

17. *Schiller B., Daxenberger J., Gurevych I.* Aspect-Controlled Neural Argument Generation. In: Proceedings of the 2021 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies. Pp. 380–396 (2021).

18. *Skeppstedt M., Peldszus A., Stede M.* More or less controlled elicitation of argumentative text: enlarging a microtext corpus via crowdsourcing. In: Proceedings of the 5th Workshop in Argumentation Mining. Pp. 155–163 (2018).

19. *Stab C., Miller T., Schiller B., Rai P., Gurevych I.* Cross-topic argument mining from heterogeneous sources. In: Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP 2018). Pp. 3664–3674 (2018).

20. *Stab C., Gurevych I.* Annotating argument components and relations in persuasive essays. In: Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics. Pp. 1501–1510 (2014).

21. *Stede M., Schneider J.* Argumentation Mining. Synthesis Lectures on Human Language Technologies. Morgan & Claypool Publishers (2018).

22. *Sun Y., Wang S., Feng S., Ding S., Pang C. et al.* ERNIE 3.0: Large-scale Knowledge Enhanced Pre-training for Language Understanding and Generation. URL: https://arxiv.org/abs/2107.02137 (2021).

Automatic generation of argumentative texts in the economic sphere

E. V. Kotelnikov[1], D. Osadchiy[2], I. N. Fischeva[3]

[1]Doctor of Technical Sciences, associate professor, professor of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov; senior researcher at the National Center for Cognitive Development, ITMO University. Russia, St. Petersburg. ORCID: 0000-0001-9745-1489. E-mail: kotelnikov.ev@gmail.com

[2]master student of the Faculty of digital transformations, ITMO University.
Russia, St. Petersburg. ORCID: 0000-0001-5131-7866. E-mail: da.osadchiy@gmail.com

[3]senior lecturer of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-6941-2009. E-mail: fishchevain@gmail.com

Abstract. The development of large and ultra-large language models, such as GPT-3, T5, Switch Transformer, ERNIE and others, has recently significantly improved the quality of text generation. One of the important directions in this area is the generation of text with arguments. The solution of such a problem can be used during business meetings, in political debates, in dialogue systems, in the preparation of student essays. One of the main subject areas in these applications is the economic sphere.

The key problem in generating arguments for the Russian language is the shortage of corpora marked up by argumentation. In this paper, we use translated versions of Argumentative Microtext, Persuasive Essays and UKP Sentential corpora to train models based on RuBERT and XGBoost. Further, the constructed models are used for marking up according to the arguments of the economic news corpus. Then the marked-up corpus is used to retrain the ruGPT-3 model, which generates argumentative texts. The results show that this approach makes it possible to increase the correctness of argument generation by nine percentage points (60 % vs. 51 %) compared to the original ruGPT-3 model.

Keywords: argumentation extraction, text generation, ruGPT-3, RuBERT, XGBoost.

References

1. *Al-Khatib K., Trautner L., Wachsmuth H., Hou Y., Stein B.* Employing Argumentation Knowledge Graphs for Neural Argument Generation. In: Proceedings of the 59th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics and the 11th International Joint Conference on Natural Language Processing. Pp. 4744–4754 (2021).

2. *Brown T. B., Mann B., Ryder N., Subbiah M., Kaplan J. et al.* Language Models are Few-Shot Learners. In: Proceedings of the 34th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2020). Pp. 1877–1901 (2020).

3. *Fedus W., Zoph B., Shazeer N.* Switch Transformers: Scaling to Trillion Parameter Models with Simple and Efficient Sparsity. Available at: https://arxiv.org/abs/2101.03961 (2021).

4. *Fishcheva I., Goloviznina V., Kotelnikov E.* Traditional Machine Learning and Deep Learning Models for Argumentation Mining in Russian Texts. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2021". Pp. 246–258 (2021).

5. *Fishcheva I., Kotelnikov E.* Cross-lingual argumentation mining for Russian texts. In: Proceedings of the 8th International Conference "Analysis of Images, Social networks and Texts" (AIST 2019), Lecture Notes in Computer Science, 11832. Pp. 134–144 (2019).

6. *Gretz S., Bilu Y., Cohen-Karlik E., Slonim N*. The workweek is the best time to start a family – A Study of GPT-2 Based Claim Generation. In: Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020. Pp. 528–544 (2020).

7. *Han X., Zhang Z., Ding N., Gu Y., Liu X. et al.* Pre-Trained Models: Past, Present and Future. AI Open. Available at: https://doi.org/10.1016/j.aiopen.2021.08.002 (2021).

8. *Hua X., Hu Z., Wang L.* Argument generation with retrieval, planning, and realization. In: Proceedings of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. Pp. 2661–2672 (2019).

9. *Ilina D., Kononenko I., Sidorova E.* On Developing a Web Resource to Study Argumentation in Popular Science Discourse. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2021". Pp. 318–327 (2021).

10. *Kuratov Y., Arkhipov M.* Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for Russian language. In: Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference "Dialog-2019". Pp. 333–340 (2019).

11. *Landis J. R., Koch G. G.* The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. Biometrics 33(1). Pp. 159–174 (1977).

12. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts. In: Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation. Pp. 801–815 (2015).

13. *Raffel C., Shazeer N., Roberts A., Lee K., Narang S. et al.* Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer. Journal of Machine Learning Research 21. Pp. 1–67 (2020).

14. ruGPT-3 pretrained language model. Available at: https://sbercloud.ru/ru/warp/gpt-3.

15. *Salomatina N., Kononenko I., Sidorova E., Pimenov I.* Identification of connected arguments based on reasoning schemes "from expert opinion". Journal of Physics: Conference Series 1715 (2021).

16. SBERT pretrained language model. Available at: https://developers.sber.ru/portal/services/sbert.

17. *Schiller B., Daxenberger J., Gurevych I.* Aspect-Controlled Neural Argument Generation. In: Proceedings of the 2021 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies. Pp. 380–396 (2021).

18. *Skeppstedt M., Peldszus A., Stede M.* More or less controlled elicitation of argumentative text: enlarging a microtext corpus via crowdsourcing. In: Proceedings of the 5th Workshop in Argumentation Mining. Pp. 155–163 (2018).

19. *Stab C., Miller T., Schiller B., Rai P., Gurevych I.* Cross-topic argument mining from heterogeneous sources. In: Proceedings of the Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP 2018). Pp. 3664–3674 (2018).

20. *Stab C., Gurevych I.* Annotating argument components and relations in persuasive essays. In: Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics. Pp. 1501–1510 (2014).

21. *Stede M., Schneider J.* Argumentation Mining. Synthesis Lectures on Human Language Technologies. Morgan & Claypool Publishers (2018).

22. *Sun Y., Wang S., Feng S., Ding S., Pang C. et al.* ERNIE 3.0: Large-scale Knowledge Enhanced Pre-training for Language Understanding and Generation. Available at: https://arxiv.org/abs/2107.02137 (2021).

УДК 004.89 DOI 10.25730/VSU.0536.21.017

Автоматическое определение основного аргументационного утверждения с использованием традиционных моделей машинного обучения

И. Н. Фищева

старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0002-6941-2009. E-mail: fishchevain@gmail.com

Аннотация. В последнее время появляется все больше онлайн-площадок с обсуждениями, спорами и дебатами. В связи с этим актуальность автоматической обработки аргументативных текстов постоянно растет. Определение основного аргументационного утверждения позволяет выявить позицию автора текста. В данной работе исследуется задача бинарной классификации русскоязычных аргументационных предложений на «основное утверждение» и «другие аргументативные дискурсивные единицы» традиционными моделями машинного обучения: случайный лес, наивный байесовский метод, метод опорных векторов, ансамблевый метод AdaBoost, бэггинг (Bagging), реализованные в библиотеке scikit-learn, а также градиентный бустинг из библиотеки XGBoost. Рассматривается значимость различных видов признаков: дискурсивных маркеров, модальных слов, пунктуационных, морфосинтаксических признаков, позиции предложения в тексте. Лучшие результаты были получены с использованием модели градиентного бустинга.

Ключевые слова: извлечение аргументов, градиентный бустинг, бэггинг, отбор признаков.

Извлечение аргументов направлено на автоматическое обнаружение, классификацию и структурирование аргументации в тексте [10]. Аргументация – это метод убеждения, предназначенный для рационального обоснования какого-либо утверждения при помощи других утверждений, но не способный при этом служить доказательством его истинности [1].

Количество различных онлайн-площадок с обсуждениями, спорами и дебатами постоянно увеличивается, поэтому растет и важность автоматической обработки таких данных. Понимание структуры аргументов позволяет определить не только то, какую позицию занимают стороны, но и почему они придерживаются такого мнения. Это дает ценную информацию в очень разных областях от прогнозирования финансовых рынков до связи с общественностью [7].

Основным текстовым элементом, используемым при анализе аргументации, является аргументативная дискурсивная единица (АДЕ) – фрагмент текста, который имеет единственное аргументационное значение [16]. В качестве АДЕ чаще всего выступают отдельные предложения, но возможны ситуации, когда АДЕ является частью предложения или нескольких предложений.

Анализ аргументов включает три основных этапа [17]:

1) сегментирование текста на АДЕ и другие части;
2) классификация типа или роли каждой АДЕ;
3) выявление и классификация отношений между АДЕ.

Для реализации перечисленных этапов необходимы аннотированные корпуса текста на русском языке. В настоящее время существует достаточно большое количество корпусов с разнообразной аргументативной разметкой [7], однако русскоязычных корпусов немного. В данном исследовании были использованы корпуса в объединенной схеме аргументационной разметки из [5]. Эти корпуса были получены переводом с помощью Google Translate корпусов Argumentative Microtext Corpus [11; 13] и Persuasive Essay Corpus (PersEssays) [14]. В работе [6] было показано, что машинный перевод на русский язык англоязычного корпуса Argumentative Microtext позволяет получить качество классификации АДЕ, не уступающее человеческому переводу, поэтому Google Translate был использован в данной работе.

Каждый текст корпуса посвящен некоторой обсуждаемой тематике. В корпусе Argumentative Microtext АДЕ являются частью предложения или целым предложением. В корпусе PersEssays в качестве АДЕ выступают целые предложения.

АДЕ можно классифицировать следующим образом:

– *основное утверждение* – выражает точку зрения автора текста;
– *довод «за»* – поддерживает основное утверждение;
– *довод «против»* – опровергает основное утверждение;
– *нейтральная АДЕ* – не является частью аргументационной структуры.

Рассмотрим три основных этапа извлечения аргументов на примере фрагмента текста из корпуса PersEssays (перевод фрагмента сделан человеком).

Тема. Дети должны расти в большом городе.

Текст. Несомненно, лучше, чтобы дети росли в большом городе. Конечно, необходимо выбрать хороший район. Я верю в это по двум основным причинам: академическим и социальным. Некоторые люди думают, что если ребенок растет в большом городе, то он будет весь день проводить дома за компьютером или играть в видеоигры. Но это не так, если вы живете в районе с другими детьми вашего возраста, как я. Мои друзья и я играем в футбол, катаемся на велосипедах, лазим по деревьям и делаем много других вещей каждый день.

На первом этапе текст разделяется на предложения, так как в данном случае в качестве АДЕ выступает предложение.

На втором этапе каждое предложение получает одну из следующих меток: основное утверждение, довод «за», довод «против», нейтральный узел (Рис. 1). На третьем этапе определяются связи между АДЕ: поддержка или опровержение.

В работе [5] исследовалась классификация доводов «за» и «против». Данная работа является продолжением и исследует задачу классификации основное утверждение / другие АДЕ. Состав рассматриваемых корпусов приведен в таблице 1.

Рис. 1. Пример аргументационной структуры

Таблица 1

Характеристики текстовых корпусов

Корпуса	Тексты	АДЕ		
		Основное утверждение	Остальные АДЕ	Всего
Argumentative Microtext	283	301 (19,5 %)	1,240 (80,5 %)	1,541 (100 %)
PersEssays	399	746 (10,2 %)	6,531 (89,8 %)	7,277 (100 %)
Argumentative Microtext +PersEssays	682	1,047 (11,9 %)	7,771 (88,9 %)	8,818 (100 %)

Задача классификации основного утверждения решалась в различных исследованиях [4; 12; 15]. Однако все эти исследования проводились на англоязычных корпусах.

Эксперименты проводились с целью получения ответов на следующие вопросы:

В1: Какое качество бинарной классификации русскоязычных аргументационных предложений на «основное утверждение» и «другие АДЕ» может быть достигнуто на основе традиционных моделей машинного обучения?

В2: Возможно ли повысить качество классификации за счет расширения обучающего корпуса и как это согласуется с результатами [5]?

В3: Какова значимость различных видов признаков для традиционных классификаторов и как это согласуется с результатами [5]?

Под «традиционными» понимаются такие модели машинного обучения, которые не используют глубокие нейронные сети и в которых формирование эффективного с точки зрения качества классификации набора признаков возлагается на исследователя. Примерами таких традиционных моделей являются метод опорных векторов, наивные методы Байеса и другие.

Для каждой АДЕ была проведена предварительная обработка: токенизация и удаление стоп-слов с использованием пакета библиотек nltk [9], а также лемматизация с использованием программы mystem [8].

Фищева и Котельников [6] показали, что при использовании традиционных методов машинного обучения признаки TF.IDF и word2vec не улучшают качество классификаторов на небольших корпусах. Поэтому в настоящей работе рассматривались только следующие виды признаков:

– лексические признаки – дискурсивные маркеры («поэтому», «я думаю», «в итоге» и другие) и модальные слова («нужно», «может быть», «обязательно» и другие), включая отрицания;

– пунктуационные признаки – запятая, двоеточие, точка с запятой, вопросительный и восклицательный знаки;

– морфосинтаксические признаки – N-граммы на основе частей речи (существительные, местоимения, глаголы, прилагательные и наречия), N = {2, 3, 4}, грамматические признаки глаголов: время, наклонение, лицо;

– позиция предложения в тексте.

Все указанные виды признаков рассматривались как для текущей АДЕ, так и для предыдущей и следующей АДЕ (если они были). Вектор признаков для АДЕ формировался как конкатенация различных видов признаков (Таблица 2).

Таблица 2

Наборы признаков

Набор признаков (номер набора)	Позиция текущего предложения в тексте	Текущее предложение				Предыдущее предложение				Следующее предложение			
		Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки	Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки	Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки
Все без предыдущего (1)	V	V	V	V	V	—	—	—	—	V	V	V	V
Все без позиции (2)	—	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

Окончание табл. 2

Набор признаков (номер набора)	Позиция текущего предложения в тексте	Текущее предложение				Предыдущее предложение				Следующее предложение			
		Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки	Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки	Дискурсивные маркеры	Модальные слова	Пунктуационные признаки	Морфосинтаксические признаки
Дискурсивные маркеры (3)	—	V	—	—	—	V	—	—	—	V	—	—	—
Лексические признаки (4)	—	V	V	—	—	V	V	—	—	V	V	—	—
Лексические признаки текущего (5)	—	V	V	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Для обучения классификатора использовались традиционные методы машинного обучения: случайный лес, наивный байесовский метод, метод опорных векторов, ансамблевый метод AdaBoost, бэггинг (Bagging), реализованные в библиотеке *scikit-learn,* а также градиентный бустинг из библиотеки *XGBoost* [18]*.* Далее приведены результаты для XGBoost и Bagging, показавшие наилучшие результаты.

Исследовались четыре варианта формирования обучающих и тестовых данных:

– обучение на Argumentative Microtext, тестирование на Argumentative Microtext;

– обучение на PersEssays, тестирование на PersEssays;

– обучение на Argumentative Microtext и PersEssays, тестирование на Argumentative Microtext;

– обучение на Argumentative Microtext и PersEssays, тестирование на PersEssays.

В связи с небольшим размером корпусов для каждого из четырех вариантов была реализована пятикратная перекрестная проверка с целью получения несмещенных оценок качества. Разбиения были случайными со стратификацией по классам и сохранялись одними и теми же для всех экспериментов.

В связи с сильной несбалансированностью обоих корпусов в качестве основной метрики качества использовалась макроусредненная F1-мера [3]. Также вычислялись доля правильно классифицированных объектов (accuracy) и макроусредненная точность (precision) и полнота (recall). Полученные результаты для каждого эксперимента усреднялись, а также вычислялось среднеквадратическое отклонение по пяти разбиениям в процедуре перекрестной проверки. В таблице 3 приведены результаты экспериментов.

Таблица 3

Результаты классификации (среднее значение ± среднеквадратическое отклонение)

Обучающие данные	Тестовые данные	Набор признаков	Модель	F_1-мера	Точность	Полнота	Доля правильно классифицированных объектов
Argumentative Microtext	Argumentative Microtext	(1)	Bagging	**0,7485±0,0316**	0,7953±0,0408	0,7230±0,0300	0,8598±0,0195
			XGBoost	0,7453±0,0235	0,7796±0,0254	0,7239±0,0231	0,8553±0,0129
		(2)	Bagging	0,7415±0,0205	0,8408±0,0234	0,7031±0,0209	0,8683±0,0086
			XGBoost	**0,7517±0,0381**	0,7989±0,0362	0,7249±0,0362	0,8631±0,0176
		(3)	Bagging	0,6211±0,0118	0,6349±0,0120	0,6147±0,0163	0,7787±0,0111
			XGBoost	0,6809±0,0245	0,7075±0,0209	0,6653±0,0248	0,8196±0,0105
		(4)	Bagging	0,6824±0,0232	0,6978±0,0323	0,6727±0,0197	0,8112±0,0204
			XGBoost	0,7058±0,0143	0,7381±0,0244	0,6875±0,0124	0,8332±0,0120
		(5)	Bagging	0,6431±0,0229	0,6378±0,0213	0,6520±0,0273	0,7638±0,0161
			XGBoost	0,6862±0,0180	0,7282±0,0292	0,6664±0,0179	0,8274±0,0125

Окончание табл. 3

Обучающие данные	Тестовые данные	Набор признаков	Модель	F_1-мера	Точность	Полнота	Доля правильно классифици-рованных объектов
Argumentative Microtext + PersEssays		(1)	Bagging	**0,6977±0,0171**	0,8082±0,0170	0,6636±0,0153	0,8514±0,0056
			XGBoost	0,7130±0,0266	0,7954±0,0222	0,6809±0,0250	0,8527±0,0110
		(2)	Bagging	0,6288±0,0277	0,8003±0,0490	0,6067±0,0213	0,8345±0,0098
			XGBoost	**0,7202±0,0292**	0,8216±0,0441	0,6835±0,0231	0,8592±0,0149
		(3)	Bagging	0,5688±0,0336	0,6851±0,0500	0,5641±0,0235	0,8105±0,0116
			XGBoost	0,6621±0,0214	0,7759±0,0370	0,6338±0,0168	0,8378±0,0109
		(4)	Bagging	0,5834±0,0297	0,7007±0,0188	0,5748±0,0218	0,8138±0,0059
			XGBoost	0,6867±0,0253	0,8015±0,0410	0,6536±0,0196	0,8475±0,0130
		(5)	Bagging	0,6564±0,0244	0,701±0,0326	0,6378±0,0210	0,8157±0,0142
			XGBoost	0,6467±0,0520	0,7867±0,0575	0,6213±0,0401	0,8378±0,0199
PersEssays	PersEssays	(1)	Bagging	**0,7435±0,0168**	0,7953±0,0207	0,7123±0,0216	0,9185±0,0050
			XGBoost	**0,7514±0,0094**	0,8109±0,0277	0,7171±0,0150	0,9217±0,0050
		(2)	Bagging	0,7351±0,0274	0,8114±0,0314	0,6955±0,0267	0,9203±0,0070
			XGBoost	0,7049±0,0153	0,7998±0,0150	0,6637±0,0176	0,9153±0,0025
		(3)	Bagging	0,7230±0,0093	0,7748±0,0195	0,6920±0,0093	0,9129±0,0047
			XGBoost	0,7248±0,0097	0,7829±0,0173	0,6912±0,0100	0,9147±0,0036
		(4)	Bagging	0,7167±0,0195	0,7738±0,0320	0,6844±0,0166	0,9121±0,0076
			XGBoost	0,7311±0,0144	0,7942±0,0143	0,6956±0,0165	0,9173±0,0032
		(5)	Bagging	0,6595±0,0177	0,6843±0,0174	0,6429±0,0177	0,8887±0,0048
			XGBoost	0,6872±0,0146	0,7524±0,0105	0,6552±0,0179	0,9066±0,0021
Argumentative Microtext + PersEssays		(1)	Bagging	**0,7308±0,0210**	0,7714±0,0142	0,7041±0,0238	0,9133±0,0042
			XGBoost	**0,7447±0,0200**	0,7939±0,0124	0,7142±0,0264	0,9188±0,0037
		(2)	Bagging	0,7095±0,0160	0,8027±0,0154	0,6683±0,0190	0,9162±0,0024
			XGBoost	0,6996±0,0203	0,7822±0,0240	0,6620±0,0210	0,9123±0,0047
		(3)	Bagging	0,7136±0,0171	0,7363±0,0228	0,6967±0,0148	0,9031±0,0071
			XGBoost	0,7144±0,0149	0,7767±0,0214	0,6801±0,0136	0,9127±0,0049
		(4)	Bagging	0,7066±0,0196	0,7346±0,0261	0,6869±0,0167	0,9026±0,0082
			XGBoost	0,7042±0,0192	0,7617±0,0186	0,6728±0,0202	0,9093±0,0046
		(5)	Bagging	0,6565±0,0171	0,6608±0,0120	0,6535±0,0229	0,8769±0,0032
			XGBoost	0,6807±0,0141	0,7343±0,0148	0,6524±0,0158	0,9026±0,0035

Лучший результат для корпуса Argumentative Microtext получен с использованием XGBoost (F1 мера = 0,7517) при обучении только на Argumentative Microtext. Bagging незначительно отстает (F1 мера = 0,7485).

Для корпуса PersEssays лучший результат также показывает XGBoost (F1 мера = 0,7514). Он превосходит Bagging за счет более высокой точности (0,8109 против 0,7953).

Расширение обучающей выборки за счет добавления к Argumentative Microtext корпуса PersEssays в случае тестирования на Argumentative Microtext снижает результаты для XGBoost (на 0,0315) и для Bagging (на 0,0508) за счет увеличения дисбаланса классов (в Argumentative Microtext основных утверждений 19,5 % от общего числа АДЕ, в Argumentative Microtext + PersEssays только 11,9 %).

Добавление Argumentative Microtext к PersEssays так же приводит к ухудшению результатов: для XGBoost F1 мера уменьшается на 0,0067, для Bagging – на 0,0127.

Bagging и XGBoost демонстрируют одинаковую стабильность результатов обучения: дисперсия результатов по разбиениям одинаковая (в среднем по всем экспериментам 0,0212).

Результаты, полученные в ходе данного исследования, согласуются с работой [5] (Таблица 4).

Таблица 4

Сравнение метрик качества для задачи определения основного утверждения и задачи классификации доводов «за» / «против» (среднее значение F1-меры ± среднеквадратическое отклонение)

Обучающие данные	Тестовые данные	Модель	F_1-мера Классификация доводов «за» / «против»	F_1-мера Определение основного утверждения
Argumentative Microtext	Argumentative Microtext	XGBoost	0,7921 ± 0,0309	0,7517 ± 0,0381
Argumentative Microtext + PersEssays			0,7678 ± 0,0203	0,7202 ± 0,0292

Окончание табл. 4

Обучающие данные	Тестовые данные	Модель	F_1-мера Классификация доводов «за» / «против»	F_1-мера Определение основного утверждения
PersEssays	PersEssays		0,6308 ± 0,0191	0,7514 ± 0,0094
Argumentative Microtext + PersEssays			0,6510 ± 0,0165	0,7447 ± 0,0200

В обеих задачах классификации достигнутое качество сопоставимо. При этом в задаче определения основного утверждения F1-мера не сильно зависит от обучающих и тестовых данных. В то же время в задаче классификации доводов наблюдалось существенное колебание F1-меры (0,7678 против 0,6510) при изменении тестовых данных.

Для ответа на вопрос В3 о значимости различных видов признаков проанализируем результаты модели XGBoost в таблице 3, обращая внимание на наборы признаков. Использование лексических признаков недостаточно для получения высокого качества при определении основного утверждения. При тестировании на PersEssyas важную роль начинает играть позиция предложения в тексте. Это объясняется особенностью корпуса PersEssyas, в котором часто присутствуют два основных утверждения в начале и в конце эссе. В Argumentative Microtext такой особенности нет. Однако при тестировании на Argumentative Microtext F1-мера на наборе признаков (1) не сильно уступает набору (2) (0,7453 против 0,7517 и 0,7130 против 0,7202). Следовательно, признаки предыдущего предложения не слишком полезны, что согласуется с выводами о значимости признаков в [5].

Таким образом, были получены следующие ответы на поставленные вопросы.

В1: Какое качество бинарной классификации русскоязычных аргументационных предложений на «основное утверждение» и «другие АДЕ» может быть достигнуто на основе традиционных моделей машинного обучения? – Лучшие значения качества по макроусредненной F1-мере позволяет достичь модель XGBoost для Argumentative Microtext F1-мера = 0,7517, для PersEssays F1-мера = 0,7514.

В2: Возможно ли повысить качество классификации за счет расширения обучающего корпуса и как это согласуется с результатами [5]? – Нет. В обоих случаях качество снижалось, так как увеличивается дисбаланс обучающих классов. Однако по сравнению с предыдущим исследованием модель XGBoost на тестовом корпусе PersEssays получила более высокие оценки качества (F1-мера 0,7514 и 0,7447 против 0,6308 и 0,6510), тогда как на корпусе Argumentative Microtext качество оказалось несколько ниже (F1-мера 0,7517 и 0,7202 против 0,7921 и 0,7678).

В3: Какова значимость различных видов признаков для традиционных классификаторов и как это согласуется с результатами [5]? – Использование лексических признаков недостаточно для получения хорошего качества при определении основного утверждения. Признаки предыдущих предложений сильное влияние на качество классификатора не оказывают. Данные выводы не противоречат предыдущему исследованию.

Актуальными задачами, которые должны быть решены в дальнейших исследованиях, являются, во-первых, расширение спектра русскоязычных корпусов с аргументативной разметкой; во-вторых, исследование качества анализа аргументации с использованием векторного представления АДЕ на основе глубоких нейросетевых моделей.

Список литературы

1. *Ивлев Ю. В., Новоселов М. М., Бергман А. С.* Аргументация // Гуманитарный портал: Концепты. Центр гуманитарных технологий, 2002–2021. URL: https://gtmarket.ru/concepts/7226 (дата обращения: 06.11.2021).

2. Переводчик // Google. URL: https://www.nltk.org (дата обращения: 06.11.2021).

3. Метрики и оценки: количественная оценка качества прогнозов // Машинное обучение в Python. URL: https://scikit-learn.ru/3-3-metrics-and-scoring-quantifying-the-quality-of-predictions/# (дата обращения: 06.11.2021).

4. *Eckle-Kohler J., Kluge R., Gurevych I.* On the Role of Discourse Markers for Discriminating Claims and Premises in Argumentative Discourse // In Proceedings of the 2015 Conference on Empirical Methods in Natrual Language Processing. 2015. Pp. 2236–2242.

5. *Fishcheva I. N., Goloviznina V. S., Kotelnikov E. V.* Traditional Machine Learning and Deep Learning Models for Argumentation Mining in Russian Texts // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Papers from the Annual International Conference "Dialogue-2021". Pp. 246–258.

6. *Fishcheva I., Kotelnikov E.* Cross-Lingual Argumentation Mining for Russian Texts // Proceedings of the International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST-2019), Springer. 2019. Pp. 134–144.

7. *Lawrence J. and Reed C.* Argument mining: A survey // Computational Linguistics. 2020. Vol. 45 (4). Pp. 765–818.

8. MyStem // Яндекс. URL: https://yandex.ru/dev/mystem/ (дата обращения: 06.11.2021).

9. NLTK Documentation // NLTK Project. URL: https://www.nltk.org (дата обращения: 06.11.2021).

10. *Palau R. M., Moens M.-F.* Argumentation mining: the detection, classification and structure of arguments in text // Proceedings of the 12th international conference on artificial intelligence and law. ACM. 2009. Pp. 98–107.

11. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts // Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation, Lisbon 2015. Vol. 2. London. College Publications, 2015. Pp. 801–816.

12. *Ruggeri F., Lippi M., Torroni P.* Tree-Constrained Graph Neural Networks For Argument Mining // arXiv.org. 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2110.00124 (дата обращения: 06.11.2021).

13. *Skeppstedt M., Peldszus A., Stede M.* More or less controlled elicitation of argumentative text: enlarging a microtext corpus via crowdsourcing // Proceedings of the 5th Workshop in Argumentation Mining. 2018. Pp. 155–163.

14. *Stab C., Gurevych I.* Annotating argument components and relations in persuasive essays // Proceed-ings of the International Conference on Computational Linguistics. 2014. Pp. 1501–1510.

15. Stance classification of context-dependent claims / Bar-Haim R., Bhattacharya I., Dinuzzo F., Saha A., Slonim N. // In Proceedings of the 15th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. 2017. Vol. 1, Long Papers. Pp. 251–261.

16. *Stede M., Schneider J.* Argumentation Mining, Synthesis Lectures on Human Language Technologies, San Rafael. Morgan and Claypool Publishers, 2018. 191 p.

17. Tutorial on Argumentation Technology for Artificial Intelligence / Cimiano P., Al-Khatib K., Stein B., Wachsmuth H. // 43rd German Conference on Artificial Intelligence, 2020.

18. XGBoost Documentation // xgboost developers. URL: https://xgboost.readthedocs.io/ (дата обращения: 06.11.2021).

Automatic determination of the main argumentative statement using traditional machine learning models

I. N. Fishcheva

senior lecturer of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-6941-2009. E-mail: fishchevain@gmail.com

Abstract. Recently, there are more and more online platforms with discussions, disputes and debates. In this regard, the relevance of automatic processing of argumentative texts is constantly growing. The definition of the main argumentative statement makes it possible to identify the position of the author of the text. This paper investigates the problem of binary classification of Russian-language argumentative sentences into "main statement" and "other argumentative discursive units" by traditional machine learning models: random forest, naive Bayesian method, support vector machine method, AdaBoost ensemble method, bagging implemented in the scikit-learn library, as well as gradient boosting from the XGBoost library. The significance of various types of signs is considered: discursive markers, modal words, punctuation, morphosyntactic signs, the position of the sentence in the text. The best results were obtained using the gradient boosting model.

Keywords: argument extraction, gradient boosting, bagging, feature selection.

References

1. *Ivlev Yu. V., Novoselov M. M., Bergman A. S. Argumentaciya* [Argumentation] // *Gumanitarnyj portal: Koncepty* – Humanitarian portal: Concepts. Center for Humanitarian Technologies, 2002–2021. Available at: https://gtmarket.ru/concepts/7226 (date accessed: 06.11.2021).

2. *Perevodchik* – Translator // Google. Available at: https://www.nltk.org (date accessed: 06.11.2021).

3. *Metriki i ocenki: kolichestvennaya ocenka kachestva prognozov* – Metrics and estimates: quantitative assessment of the quality of forecasts // *Mashinnoe obuchenie v Python* – Machine learning in Python. Available at: https://scikit-learn.ru/3-3-metrics-and-scoring-quantifying-the-quality-of-predictions/# (date accessed: 06.11.2021).

4. *Eckle-Kohler J., Kluge R., Gurevych I.* On the Role of Discourse Markers for Discriminating Claims and Premises in Argumentative Discourse // In Proceedings of the 2015 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2015. Pp. 2236–2242.

5. *Fishcheva I. N., Golviznina V. S., Kotelnikov E. V.* Traditional Machine Learning and Deep Learning Models for Argumentation Mining in Russian Texts // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Papers from the Annual International Conference "Dialogue-2021". Pp. 246–258.

6. *Fishcheva I., Kotelnikov E.* Cross-Lingual Argumentation Mining for Russian Texts // Proceedings of the International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST-2019), Springer. 2019. Pp. 134–144.

7. *Lawrence J. and Reed C.* Argument mining: A survey // Computational Linguistics. 2020. Vol. 45(4). Pp. 765–818.

8. MyStem // Yandex. Available at: https://yandex.ru/dev/mystem/ (date accessed: 06.11.2021).

9. NLTK Documentation // NLTK Project. Available at: https://www.nltk.org (date accessed: 06.11.2021).

10. *Palau R. M., Moens M.-F.* Argumentation mining: the detection, classification and structure of arguments in text // Proceedings of the 12th international conference on artificial intelligence and law. ACM. 2009. Pp. 98–107.

11. *Peldszus A., Stede M.* An annotated corpus of argumentative microtexts // Argumentation and Reasoned Action: Proceedings of the 1st European Conference on Argumentation, Lisbon 2015. Vol. 2. London. College Publications, 2015. Pp. 801–816.

12. *Ruggeri F., Lippi M., Torroni P.* Tree-Constrained Graph Neural Networks For Argument Mining // arXiv.org. 2021. Available at: https://arxiv.org/abs/2110.00124 (date accessed: 06.11.2021).

13. *Skeppstedt M., Peldszus A., Stede M.* More or less controlled elicitation of argumentative text: enlarging a microtext corpus via crowdsourcing // Proceedings of the 5th Workshop in Argumentation Mining. 2018. Pp. 155–163.

14. *Stab C., Gurevych I.* Annotating argument components and relations in persuasive essays // Proceed-ings of the International Conference on Computational Linguistics. 2014. Pp. 1501–1510.

15. Stance classification of context- dependent claims / Bar-Haim R., Bhattacharya I., Dinuzzo F., Saha A., Slonim N. // In Proceedings of the 15th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. 2017. Vol. 1, Long Papers. Pp. 251–261.

16. *Stede M., Schneider J.* Argumentation Mining, Synthesis Lectures on Human Language Technologies, San Rafael. Morgan and Claypool Publishers, 2018. 191 p.

17. Tutorial on Argumentation Technology for Artificial Intelligence / Cimiano P., Al-Khatib K., Stein B., Wachsmuth H. // 43rd German Conference on Artificial Intelligence, 2020.

18. XGBoost Documentation // xgboost developers. Available at: https://xgboost. readthedocs.io/ (date accessed: 06.11.2021).

УДК 51-73:621.311 DOI 10.25730/VSU.0536.21.018

Математическое и численное моделирование энергопреобразования при постоянном потокосцеплении электромеханических систем

С. Н. Запольских
кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются электромеханические системы с постоянным потокосцеплением, которые рассчитываются и анализируются с помощью математических и численных моделей, разрабатываемых на основе дифференциальных уравнений механики и электромагнетизма. Системы с постоянным потокосцеплением могут преобразовывать значительную энергию в несколько раз выше, чем традиционные электромеханические системы, величина которой определяется возможностями накопления электромагнитной системой магнитной энергии. Для переключения электрических цепей в таких системах могут использоваться вентили, работающие по сигналам датчиков положения или датчиков, выполняющих их функцию. Такие вентили широко используются в настоящее время в инверторных сварочных источниках. Электромеханические системы с постоянным потокосцеплением еще недостаточно изучены и исследованы. Чтобы глубже разобраться и понять такие системы, уменьшить объем громоздкой экспериментальной работы, особенно на начальных этапах исследований, возникает необходимость в разработке математических и численных моделей. Приводятся результаты исследования энергетических характеристик, полученных с помощью конкретной численной модели электромагнитного двигателя, которые сравниваются с характеристиками традиционных электрических двигателей. Получено повышение работы электромагнитной силы, мощности и КПД.

Ключевые слова: математические пакеты программ, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, численное моделирование, накопление магнитной энергии, постоянное потокосцепление.

В рассматриваемых электромеханических системах преобразование магнитной энергии в работу электромагнитной силы в электрических двигателях [9] и преобразование работы внешних сил в магнитную энергию в электрических генераторах [1] осуществляется при постоянном потокосцеплении. Достижения в силовой коммутирующей технике, позволившие повысить передаваемую мощность и частоту коммутации, а также достижения в микропроцессорных системах управления открывают новые возможности для разработки систем с постоянным потокосцеплением. Это связано с применением схемных решений, в которых переключение электрических цепей осуществляется с помощью вентилей по сигналам датчиков положения или датчиков, выполняющих их функцию. Электрический генератор, в котором используется такой принцип, был предложен французами Жак Анри Жаре и Жан Мари Батист Жаре (1984 г.) [7]. Затем был предложен электрический двигатель с постоянным потокосцеплением, который может работать от сети переменного тока и в котором остающаяся магнитная энергия в конце такта используется в последующем цикле работы (2015 г.) [8].

Электромеханические системы с постоянным потокосцеплением еще недостаточно изучены и исследованы. Первые экспериментальные результаты получены для электромагнита с удержанием якоря в начале такта [10]. В работе [6] были приведены исследования энергетических характеристик таких систем с помощью физической и математической модели, в которой дифференциальные уравнения были решены аналитическими методами. Было получено повышение энергетических характеристик. Но учет даже электрических потерь уже требует применения численных методов решения дифференциальных уравнений.

Возникает необходимость в подтверждении повышения энергетических характеристик, необходимость в исследовании и расчете других характеристик, в исследовании возможностей электромеханических систем с постоянным потокосцеплением с помощью математических и численных моделей. Кроме того, возникает необходимость для этих целей в оценке применимости математических программ высокого уровня, например, MathCAD.

Целью работы является разработка математических и численных моделей, пригодных для исследования систем с постоянным потокосцеплением.

Основные законы физики, в частности законы механики и электромагнетизма, представляются в виде дифференциальных и интегральных уравнений. Для описания механического движения используется второй закон Ньютона, представляемый дифференциальным уравнением второго порядка, который для электрического двигателя имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_M(t)-F_A(t), \tag{1}$$

где $F_M(t)$ – электромагнитная сила; $F_A(t)$ – внешние силы, действующие на вторичную часть; m – масса движущихся частей; t – время.

Электромагнитные процессы описываются законами Ома, законом электромагнитной индукции Фарадея и законом полного тока, которые представлены в виде уравнений электрических и магнитных цепей:

$$i(t)R=U(t)-\frac{d\Psi}{dt}, \tag{2}$$

$$R_M(t)\Phi=wi(t), \tag{3}$$

где $U(t)$ – напряжение на зажимах обмотки; $i(t)$ – электрический ток; $\Psi=w\Phi$ – потокосцепление; w – число витков; R – активное сопротивление; $R_M(t)$ – магнитное сопротивление.

Конструктивная схема численной модели приведена на рис. 1. Из таких элементов могут быть построены любые многополюсные электромеханические преобразователи энергии, линейного или вращательного движения.

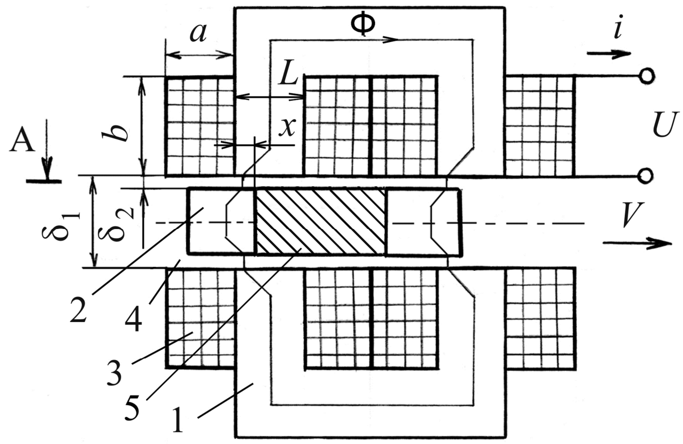

Рис. 1. Конструктивная схема: 1 – первичная часть; 2 – вторичная часть; 3 – обмотка; 4 – рабочий зазор; 5 – электропроводящий элемент.

В математической модели учитываются: электрические и магнитные потери, нелинейность кривой намагничивания, магнитные потоки рассеяния. Интегральные уравнения энергетических характеристик преобразованы в дифференциальные уравнения. Вывод и обоснование расчетных формул сделан в работах [3; 5]. Формулы представлены в виде системы уравнений, пригодные для их решения с помощью современных математических пакетов программ высокого уровня MathCAD [2]:

$$u(x,\Phi)=\frac{1}{w}\cdot\left(U(x)-R\cdot i(x,\Phi)\right), \tag{4}$$

$$r(x,\Phi)=1+\frac{R_{M\delta}(x)+R_{MM}(\Phi)}{4\cdot R_{M2}}+\frac{\Phi}{4\cdot R_{M2}}\cdot\frac{dR_{MM}(\Phi)}{d\Phi}, \tag{5}$$

$$G_F=\frac{a_F\cdot l_M}{4\cdot\rho_{Fe}\cdot n_F\cdot L}, \tag{6}$$

$$V(K)=\left(\frac{2\cdot K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$i(x,\Phi)=\left(R_{M\delta}(x)+R_{MM}(\Phi)\right)\cdot\frac{\Phi}{w}, \tag{8}$$

$$\frac{dx}{dt}=V(K), \tag{9}$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{r(x,\Phi)}\cdot\left(u(x,\Phi)-\frac{1}{4\cdot R_{M2}}\cdot\Phi\cdot V(K)\cdot\frac{dR_{M\delta}(x)}{dx}\right), \tag{10}$$

$$\frac{dK}{dt}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dR_{M\delta}(x)}{dx}\cdot V(K)+\frac{dR_{MM}(\Phi)}{dx}\cdot\frac{d\Phi(x,K,\Phi)}{dt}\right)\cdot\Phi^2-F_A(x)\cdot V(K), \tag{11}$$

$$\frac{dW_E}{dt}=U(x)\cdot i(x,\Phi), \tag{12}$$

$$\frac{dW_A}{dt}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dR_{M\delta}(x)}{dx}\cdot V(K)+\frac{dR_{MM}(\Phi)}{dx}\cdot\frac{d\Phi(x,K,\Phi)}{dt}\right)\cdot\Phi^2, \tag{13}$$

$$\frac{dW_D}{dt}=R\cdot i(x,\Phi)^2, \tag{14}$$

$$\frac{dW_F}{dt}=G_F\cdot\left(\frac{d\Phi(x,K,\Phi)}{dt}\right)^2, \tag{15}$$

где $u(x,\Phi)$ и $r(x,\Phi)$ – вспомогательные функции; x – координата положения вторичной части; Φ – магнитный поток; $U(x)$ – напряжение на зажимах обмотки; R – активное сопротивление; $i(x,\Phi)$ – электрический ток; w – число витков; $R_{M\delta}(x)$ – магнитное сопротивление рабочих зазоров; $R_{MM}(\Phi)$ – магнитное сопротивление стальных сердечников магнитопровода; R_{M2} – магнитное сопротивление магнитных потоков рассеяния; G_F – коэффициент потерь в стали сердечников магнитопровода; a_F, l_M и L – толщина, длина и ширина листа электротехнической стали; ρ_{Fe} – удельное сопротивление электротехнической стали; n_F – число листов в пакете; $V(K)$ и K – скорость и кинетическая энергия вторичной части; m – масса подвижных частей; $F_A(x)$ – электромагнитная сила; W_E – работа источника питания; W_A – работа электромагнитной силы; W_D – энергия потерь в проводниках обмотки; W_F – энергия потерь в сердечниках магнитопровода.

Дифференциальные уравнения, входящие в систему уравнений (4–15), представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, приведенных к нормальному виду. Независимой переменной является время, зависимыми переменными – координата положения вторичной части, кинетическая энергия, магнитный поток, работа источника питания, работа электромагнитной силы, энергии потерь в проводниках обмотки, энергия потерь в сердечниках магнитопровода. Для решения такой системы уравнений и разработки численных моделей используются компьютерные математические пакеты программ высокого уровня, которые могут решать дифференциальные уравнения в численном виде, MathCAD [2–5].

Результаты решения получаются в дискретном виде, которые с помощью функций интерполяций и регрессии могут быть преобразованы в непрерывные функции или представлены в виде комбинации элементарных функций, которые можно затем дифференцировать, интегрировать и использовать в других последующих дифференциальных уравнениях. В результате решения получаются зависимости между переменными, а также посредством численных экспериментов могут быть получены зависимости между параметрами, входящими в систему уравнений. На Рис. 2 приведены графики зависимости энергетических характеристик от времени движения вторичной части для одного из вариантов расчета. Для этого варианта и был проведен численный расчет энергетических характеристик.

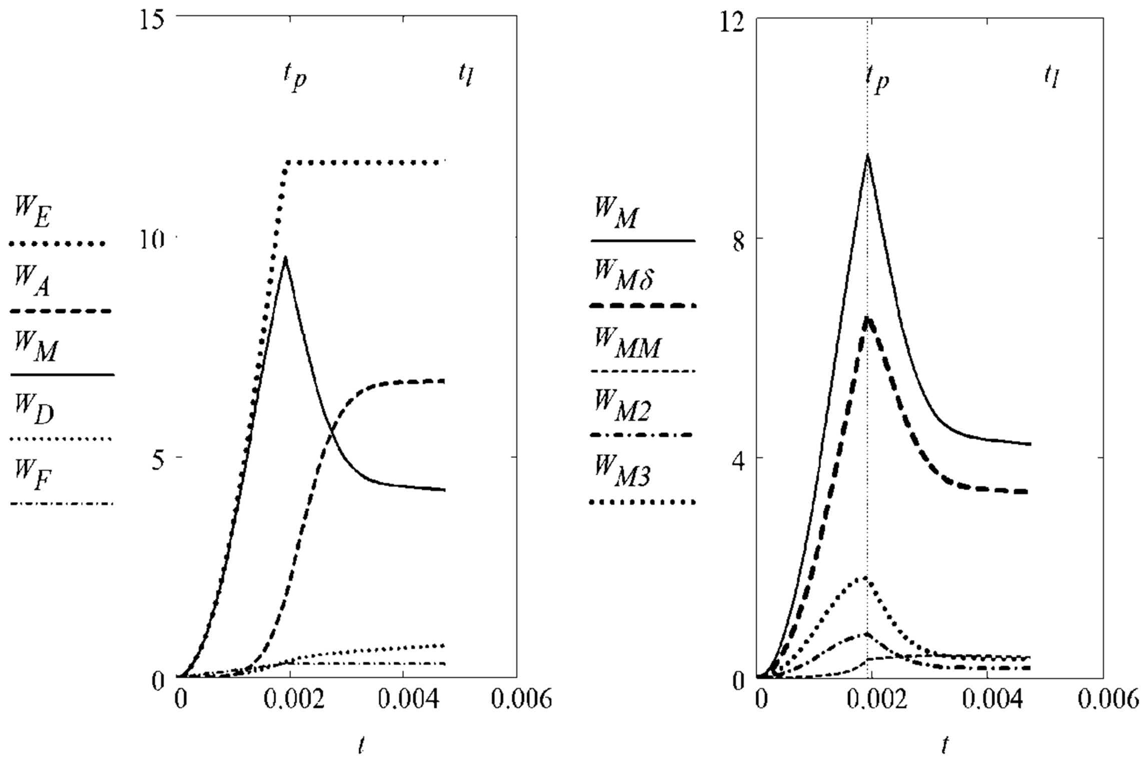

Рис. 2. Зависимость энергетических характеристик от времени: W_M – полная магнитная энергия; $W_{M\delta}$ – магнитная энергия в рабочих зазорах; W_{MM} – магнитная энергия в стальных сердечниках магнитопровода; W_{M2} – магнитная энергия магнитных потоков рассеяния; W_{M3} – магнитная энергия боковых магнитных потоков; t_p – длительность импульса питающего напряжения; t_l – длительность такта работы.

Прямоугольный импульс напряжения длительностью t_P подключается в начале такта, когда магнитное сопротивление рабочих зазоров максимальное. В результате этого накапливается магнитная энергия. При подключении источника питания можно считать, что обмотка через источник питания уже замкнута «накоротко». И в этом случае в конце импульса напряжение нужно положить равным нулю. То есть процесс подключения и замыкания обмотки накоротко достаточно было описать функцией напряжения в виде:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 \,,\, 0 \le x \le x_P \\ 0 \,,\, x > x_P \end{cases}, \tag{16}$$

где x_P – координата, соответствующая окончанию действия импульса напряжения; U_0 – амплитудное значение напряжения.

Удобнее было вначале задать напряжение как функцию координаты положения вторичной части. Временная зависимость напряжения $U(t)$ получается после решения системы уравнений.

Наименее точным является расчет магнитных потоков рассеяния [5]. Для вывода расчетных формул магнитного сопротивления использовалась формула:

$$R_M = \frac{l_a}{\mu_0 \cdot S_a}, \tag{17}$$

где l_a – среднее значение длины силовой линии магнитного поля; S_a – среднее значение площади поперечного сечения, через которую проходят силовые линии.

Магнитные потоки рассеяния и боковые магнитные потоки в начальном положении вторичной части получаются большими. Боковые магнитные потоки включены в общий основной магнитный поток Ф [5]. Суммарная магнитная энергия магнитного поля боковых магнитных потоков и потоков рассеяния в конце действия импульса напряжения почти равна половине магнитной энергии, накапливаемой в рабочих зазорах (Рис. 2). В режиме работы с постоянным потокосцеплением в нейтральном положении вторичной части эта энергия уменьшается почти до нуля. Это означает, что в магнитном поле боковых магнитных потоков и потоков рассеяния накопленная магнитная энергия преобразуется в работу электромагнитной силы, что уменьшает «вредное» влияние этих магнитных потоков.

В численных моделях длительность импульса может меняться в широких пределах. Короткий импульс соответствует режиму накопления магнитной энергии в начале такта и дальнейшему преобразованию накопленной магнитной энергии в работу электромагнитной силы при почти постоянном потокосцеплении. Магнитный поток все-таки немного снижается из-за электрических и магнитных потерь. Длинный импульс, равный длительности такта, соответствует непрерывному режиму работы традиционных электрических двигателей. Это дает возможность сравнить режим работы систем с постоянным потокосцеплением и традиционный режим. Коэффициент модуляции магнитного сопротивления был подобран равным четырем (для обычных, самых простых электромагнитов он равен трем). Известно, что электромагнитные двигатели имеют самые низкие энергетические показатели, но они просты по конструкции, имеется большая потребность в их функциональных возможностях, поэтому они очень широко используются в технике.

Электрический двигатель численной модели (Рис. 1) имеет размеры 0,12×0,11×0,096 м. Для непрерывного традиционного режима работы работа электромагнитной силы за такт составила 1,59 Дж, мощность 80,1 Вт, КПД 0,245. Для того же двигателя, но работающего в режиме постоянного потокосцепления (Рис. 2), работа электромагнитной силы составила 6,39 Дж, мощность 675 Вт, а КПД 0,548. Таким образом, было получено увеличение работы электромагнитной силы в 4,02 раза, КПД – в 2,24 раза, что сопоставимо с опытными результатами для двигателя с удержанием якоря в начале такта [10], для которого было получено увеличение энергии удара в четыре раза, КПД более чем в два раза. Результаты также сопоставимы и с теоретическими исследованиями [6; 9].

Мощность двигателя возросла значительно больше, в 8,43 раза. Это связано с тем, что электромагнитная сила и работа электромагнитной силы для двигателя с постоянным потокосцеплением возрастает, скорость движения вторичной части увеличивается, время такта уменьшается. Это и приводит к тому, что двигатель в единицу времени будет совершать больше циклов преобразования энергии, поэтому мощность возрастает сильнее, чем работа электромагнитной силы за такт.

При использовании остающейся магнитной энергии в последующем цикле работы [8] КПД дополнительно повышается до 0,861, что уже приближается к асинхронным двигателям, повышение мощности при этом получается даже выше. Для двигателя с коэффициентом модуляции магнитного сопротивления рабочих зазоров равным двадцати получаются более высокие энергетические показатели [4].

Характеристики численной модели двигателя, работающего в непрерывном режиме, сравнивались с характеристиками известного традиционного электромагнитного двигателя насоса «Малыш-М», предназначенного для перекачивания жидкости [11]. Насос имеет размеры: диаметр 0,099 м и длину 0,25 м, а его двигатель занимает почти половину его объема, что приблизительно соответствует размерам численной модели двигателя. Электрический двигатель насоса потребляет мощность 300 Вт. Известно, что КПД электромагнитных двигателей составляет (20 ÷ 35) %, полезная мощность двигателя насоса должна быть равна (60 ÷ 105) Вт, что сопоставимо с мощностью численной модели двигателя, работающего в непрерывном режиме, 80,1 Вт.

При проектировании конкретных образцов также необходимо будет учитывать множество других технических факторов, влияющих на работу двигателя, например, таких как прочностные характеристики используемых материалов, вибрации, уменьшение индукции магнитного поля при использовании ферритов для сердечников магнитопровода при переходе к более высоким частотам энергопреобразования и так далее. Это приведет к поиску различных компромиссных решений и, как следствие этого, к некоторому снижению возможностей, даваемых электромеханическими системами с постоянным потокосцеплением.

Разработка численных моделей является многоэтапным процессом. После получения новых данных как с помощью численных моделей, так и из других источников, и также при учете других факторов, влияющих на работу исследуемой системы, и при более точном учете параметров, модель может уточняться и дополняться. При этом разработку численных моделей целесообразно начинать с моделей, для которых решения дифференциальных уравнений можно вначале получить в аналитическом виде.

Таким образом, разработана математическая и численная модель для систем с постоянным потокосцеплением. Полученные результаты подтверждают повышение энергетических характеристик электромеханических систем с постоянным потокосцеплением. Получено дополнительное повышение мощности. Из полученных результатов можно заключить, что магнитные потоки рассеяния и боковые магнитные потоки тоже накапливают магнитную энергию, которая в системах с постоянным потокосцеплением тоже преобразуется в работу электромагнитной силы. Численная модель также позволит получить и другие характеристики. Система MathCAD оказалась очень удобной, достаточно быстродействующей для численного моделирования систем с постоянным потокосцеплением. Математические и численные модели и результаты исследований могут быть использованы при проведении опытно-конструкторских работ, для разработки методик расчета, также использованы в учебных целях.

Список литературы

1. *Бут Д. А., Алиевский Б. Л., Мизюрин С. П., Васюкевич П. В.* Накопители энергии. Электродинамические накопители энергии. М. : Энергоатомиздат, 1991. 394 с.

2. *Гурский Д. А., Турбина Е. С.* Вычисление в Mathcad. СПб : Питер, 2006. 554 с.

3. *Запольских С. Н., Борисов А. А., Бобров А. С.* Физические принципы преобразования энергий в электромагнитных системах с предварительным накоплением магнитной энергии // Advanced science. 2017. № 1. Физико-математические науки.

4. *Запольских С. Н., Борисов А. А., Хлебов А. Г.* Исследование энергетических характеристик электромагнитных систем с предварительным накоплением магнитной энергии на численных моделях // Advanced science. 2017. № 2. Физико-математические науки.

5. *Запольских С. Н.* Импульсные системы с индуктивными накопителями энергии. Киров : ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012. 121 с.

6. *Запольских С. Н.* Исследование и анализ электромагнитных систем с постоянным потокосцеплением с помощью физической модели // Advanced science. 2019. № 4. Физико-математические науки.

7. Патент № 1066469 СССР. Генератор возвратно поступательного движения / Жак Анри Жарре, Жан Мари Батист Жарре (Франция). БИ, 1984, № 1.

8. Патент № 2560079 РФ. Электрический двигатель / С. Н. Запольских, А. А. Борисов. БИ, 2015, № 23.

9. *Ряшенцев Н. П., Ряшенцев А. Н.* Электромагнитный привод линейных машин. Новосибирск : Наука, 1985. 153 с.

10. *Ряшенцев Н. П., Угаров Г. Г., Львицин А. В.* Электромагнитные прессы. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1989. 216 с.

11. Электронасос «Малыш-М». Руководство по эксплуатации 70ТНП.РЭ.

Mathematical and numerical modeling of energy conversion with constant flow coupling of electromechanical systems

S. N. Zapolskih

PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of engineering physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

Abstract. Electromechanical systems with a constant flow coupling, which are calculated and analyzed using mathematical and numerical models developed on the basis of differential equations of mechanics and electromagnetism. Systems with constant flow coupling can convert significant energy several times higher than traditional electromechanical systems, the value of which is determined by the possibilities of accumulation of magnetic energy by the electromagnetic system. To switch electrical circuits in such systems, valves operating on the signals of position sensors or sensors performing their function can be used. Such valves are widely used nowadays in inverter welding sources. Electromechanical systems with constant flow coupling have not yet been sufficiently studied and investigated. In order to better understand and understand such systems, to reduce the volume of cumbersome experimental work, especially at the initial stages of research, there is a need to develop mathematical and numerical models. The results of the study of the energy characteristics obtained using a specific numerical model of an electromagnetic motor are presented, which are compared with the characteristics of traditional electric motors. An increase in the work of electromagnetic force, power and efficiency was obtained.

Keywords: mathematical software packages, differential equations, mathematical modeling, numerical modeling, magnetic energy accumulation, constant flow coupling.

References

1. *But D. A., Alievskij B. L., Mizyupin S. P., Vasyukevich P. V. Nakopiteli energii. Elektrodinamicheskie nakopiteli energii* [Energy storage. Electrodynamic energy storage]. M. Energoatomizdat. 1991. 394 p.

2. *Gurskij D. A., Turbina E. S. Vychislenie v Mathcad* [Calculation in Mathcad]. SPb. Piter. 2006. 554 p.

3. *Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Bobrov A. S. Fizicheskie principy preobrazovaniya energij v elektromagnitnyh sistemah s predvaritel'nym nakopleniem magnitnoj energii* [Physical principles of energy conversion in electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy] // Advanced science. 2017. No. 1. Physical and mathematical sciences.

4. *Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Hlebov A. G.* [Investigation of energy characteristics of electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy on numerical models] // Advanced science. 2017. No. 2. Physical and mathematical sciences.

5. *Zapol'skih S. N. Impul'snye sistemy s induktivnymi nakopitelyami energii* [Pulse systems with inductive energy storage]. Kirov. VyatSU. 2012. 121 p.

6. *Zapol'skih S. N. Issledovanie i analiz elektromagnitnyh sistem s postoyannym potokoscepleniem s pomoshch'yu fizicheskoj modeli* [Research and analysis of electromagnetic systems with constant flow coupling using a physical model] // Advanced science. 2019. No. 4. Physical and mathematical sciences.

7. *Patent № 1066469 SSSR. Generator vozvratno postupatel'nogo dvizheniya* – Patent No. 1066469 of USSR. Reciprocating motion generator / Jacques Henri Jarre, Jean Marie Baptiste Jarre (France). Without publ. 1984. No. 1.

8. *Patent № 2560079 RF. Elektricheskij dvigatel'* – Patent No. 2560079 of the Russian Federation. Electric motor / S. N. Zapolskikh, A. A. Borisov. Without publ. 2015. No. 23.

9. *Ryashencev N. P., Ryashencev A. N. Elektromagnitnyj privod linejnyh mashin* [Electromagnetic drive of linear machines]. Novosibirsk. Nauka (Science). 1985. 153 p.

10. *Ryashencev N. P., Ugarov G. G., L'vicin A. V. Elektromagnitnye pressy* [Electromagnetic presses]. Novosibirsk. Nauka (Science). Siberian branch. 1989. 216 p.

11. *Elektronasos "Malysh-M". Rukovodstvo po ekspluatacii 70TNP.RE* – Electric pump "Malysh-M". Operating Manual 70ТНП.РЭ.

УДК 512 DOI 10.25730/VSU.0536.21.019

Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются цели, содержание и методика работы учебно-исследовательского семинара по алгебре для бакалавров математических направлений подготовки. Семинар предназначен для заинтересованных студентов как дополнительный ресурс их математического образования. Преподаватель выступает в роли наставника и в будущем руководителя научно-исследовательской работы студентов, участников семинара. Тематика семинара тесно связана с содержанием проводимых в Вятском государственном университете исследований в рамках научной алгебраической школы «Функциональная алгебра и теория полуколец». В настоящее время на семинаре изучаются две темы: «Мультипликативно идемпотентные полукольца» и «Полукольца непрерывных функций». В ходе семинарских занятий изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами, упражнениями, постановкой исследовательских задач.

Ключевые слова: студенческий семинар, обучение алгебре, полукольцо, функциональная алгебра, исследовательская задача.

1. Введение

В последнее десятилетие интерес молодежи к математике и математическим исследованиям падает. Это связано с кризисом математического образования в мире, упадком российской системы образования, переоценкой ценностей в сторону потребления в ущерб развитию человеческого интеллекта и духовности. Двум самым молодым преподавателям кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета (ВятГУ), кандидатам физико-математических наук 32 и 33 года, а далее следует разрыв в пять и более лет.

Организованный мной два года назад студенческий семинар по алгебре призван восполнить через несколько лет нехватку молодых высококвалифицированных преподавательских кадров по высшей математике. Участниками семинара являются бакалавры 1–3 курсов направления подготовки «Математика и компьютерные науки». Ранее, с 1986 г. по 2018 г., мы занимались в математических кружках и на научном алгебраическом семинаре с будущими учителями математики и информатики. Через эту подготовку прошло 20 кандидатов физико-математических наук (один из них стал доктором наук, другой завершил работу над докторской диссертацией), один кандидат технических наук и несколько кандидатов педагогических наук по методике обучения математике; большинство из них преподает в ВятГУ, при этом многие выполнили в свое время дипломные работы именно по математике. К сожалению, в последние годы предметная подготовка будущих учителей сокращается как шагреневая кожа в угоду нарастающей общепедагогической так называемой проектной деятельности.

Мы надеемся, что научная алгебраическая школа ВятГУ «Функциональная алгебра и теория полуколец» пополнится молодыми перспективными исследователями и преподавателями.

2. Алгебраическая пропедевтика

Сначала мы напоминаем студентам базовые элементы логики и теории множеств, соответствующие терминологию и обозначения (в духе [17]).

Затем переходим к важнейшим общеалгебраическим понятиям:

– алгебраическая операция (унарная, бинарная, n-арная);
– возможные свойства бинарной алгебраической операции;
– группоид;
– полугруппа, моноид;
– группа;
– кольцо, поле;
– векторное пространство над полем;
– решетка, дистрибутивная решетка.

Проверяются простейшие свойства перечисленных алгебраических структур. Приводятся модельные примеры. Доказывается теорема Кэли о представлении произвольной полугруппы (группы) A как подполугруппы (подгруппы) полугруппы (группы) всех преобразований (биекций, подстановок) множества A с операцией композиции отображений.

Мы рекомендуем студентам руководствоваться известными источниками по абстрактной алгебре [14; 19; 20; 25–27]. Информацию по упорядоченным множествам и решеткам можно найти в [7, глава 3; 18; 26].

Методика и методология изучения различных алгебраических структур рассматривалась нами в [6; 7, глава 2; 14; 16].

3. К теории полуколец

Далее мы приступаем к формированию понятия полукольца [5; 9; 28; 31].

Класс полуколец включает в себя класс всех (ассоциативных) колец и класс всех дистрибутивных решеток, а также ряд известных числовых систем.

Определение 1 (в широком смысле). Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, +\rangle$ – аддитивно записанная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – мультипликативно записанная полугруппа, операция умножения $\cdot$ дистрибутивна относительно операции сложения + с обеих сторон: $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ для любых $a, b, c \in S$.

Далее предполагается, что полукольца имеют коммутативное сложение.

Элемент 0 полукольца S называется *нулем*, если $s+0=s$ и $s\cdot 0=0\cdot s=0$ для любого $s \in S$. Элемент 1 полукольца S называется *единицей*, если $s\cdot 1=1\cdot s=s$ для всех $s \in S$. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*.

Определение 2 (в узком смысле). *Полукольцо* – это полукольцо с нулем 0 и единицей 1. Если 1=0, то полукольцо одноэлементно.

Определение 3. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. *Полуполе* – это коммутативное полутело. Полутело с добавленным нулем называется *полутелом с нулем*.

Упражнение 1. Докажите, что полукольца с делением исчерпываются телами и полутелами с нулем. По определению, *полукольцо с делением* – это полукольцо S с нулем 0 и единицей $1\neq 0$, каждый ненулевой элемент которого обратим: $\forall a\in S\ (a\neq 0 \Rightarrow \exists b\in S\ (ab=1))$.

Сначала приводятся примеры числовых полуколец:

Пример 1. Множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения является коммутативным полукольцом с единицей и без нуля; кольцом разностей полуколец $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}\cup\{0\}$ служит кольцо $\mathbf{Z}$ всех целых чисел. Полуполем частных полукольца $\mathbf{N}$ будет полуполе всех положительных рациональных чисел.

Пример 2. Алгебраическая структура $\langle \mathbf{R}^+, +, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел будет полуполем с нулем, кольцом разностей которого служит поле $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Пример 3. Рассматривая на множестве $\mathbf{P}$ всех положительных действительных чисел операции $\vee$ (max) и умножение $\cdot$, получим полуполе $\langle \mathbf{P}, \vee, \cdot\rangle$ с идемпотентным сложением $\vee$ (верно тождество $x\vee x=x$).

Пример 4. Пусть $S=\{0, 1\}$ – двухэлементное полукольцо с нулем 0 и единицей 1. В S умножение определяется однозначно, 0+0=0 и 0+1=1+0=1. Если 1+1=0, то полукольцо S изоморфно двухэлементному полю $\mathbf{Z}_2$, а если 1+1=1, то S изоморфно двухэлементной цепи $\mathbf{B}$.

Даются исходные полукольцевые определения как общеалгебраического, так и специального характера. К общеалгебраическим относятся понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, гомоморфизма, прямого произведения полуколец, решеток идеалов, конгруэнций, подполуколец. Вводятся понятия подпрямо неразложимого полукольца и конгруэнц-простого полукольца. Для полуколец формулируются и доказываются универсально-алгебраические утверждения: теоремы о гомоморфизме и изоморфизме, теорема о подпрямом произведении.

Затем определяются такие полукольцевые понятия, как поглощающий элемент (по сложению и по умножению), идемпотентность (аддитивная и мультипликативная), сократимость (аддитивная и мультипликативная), конгруэнция Берна по идеалу.

В структурной теории полуколец важную роль играют следующие классы полуколец:

1) ***кольца*** как полукольца, аддитивная полугруппа которых является коммутативной группой;

2) ***дистрибутивные решетки*** как полукольца с тождествами коммутативности $x+y=y+x$ и $xy=yx$, идемпотентности $xx=x$ и поглощения $x+xy=x$;

3) ***полутела*** [см. 15; 22; 23].

Попарные пересечения этих трех классов полуколец совпадают с классом одноэлементных полуколец, определяемым тождеством $x=y$.

Одна из актуальных задач общей теории полуколец заключается в сведении изучения полуколец к названным классам полуколец. С другой стороны, исследовались полукольца, представляющие собой некий симбиоз:

- колец и дистрибутивных решеток [12, глава 6];
- колец и полутел. Отметим так называемые дизъюнктные объединения кольца и полутела [10];
- дистрибутивных решеток и полутел. К таким полукольцам относятся абелево-регулярные положительные полукольца [9, глава 2].

В развитии теории полуколец можно выделить следующие основные направления:

1. ***Кольце-модульное направление*** как обобщение и расширение теории колец и модулей на полукольца и полумодули над ними. Рассматриваются полукольца с нулем и единицей. Исследуются полукольца с различными дополнительными условиями, гомологические свойства полуколец и так далее. Интересны исследования, связанные с выполнением кольце-модульных теорем в классе полуколец. Зачастую справедливость той или иной теоремы теории колец для полукольца S делает S близким к кольцу или даже кольцом, что дает характеризации колец в терминах полуколец.

2. ***Универсально-алгебраическое направление***, базирующееся на теории полугрупп и универсальной алгебре. Изучаются полукольца в широком понимании, в том числе и с некоммутативным сложением. Важную роль играют свободные полукольца, расширения полуколец, многообразия и квазимногообразия полуколец, решетки идеалов и конгруэнций полуколец.

3. ***Изучение полуколец специального вида.*** Исследуются полукольца непрерывных функций, сечений, соответствий; матричные полукольца в рамках линейной алгебры над полукольцами; тропические полукольца с применением в теории оптимального управления; полукольца путей в графах и тому подобное.

Направления 1 и 2 охватывают изучение абстрактных полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов полуколец. Направление 3, включая теорию конечных полуколец, служит основой для полукольцевых приложений в компьютерных науках, теории кодирования и криптографии, оптимальном управлении, лингвистике, экономике.

Для иллюстрации рассмотрим пример «тропического» полуполя, на базе которого строится идемпотентный анализ (так же, как на базе поля **R** действительных чисел, зиждется классический математический анализ).

Пример 5. Пусть $S=\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$ – линейно упорядоченное полуполе с нулем $-\infty$ относительно операции сложения $\vee$ (max) и операции умножения +. Элемент $-\infty$ будет также наименьшим, сложение идемпотентно ($x\vee x=x$), а по умножению (+) S является коммутативной группой с добавленным нулем $-\infty$. Относительно интервальной (естественной) топологии S становится топологическим аддитивно идемпотентным полуполем. Заметим, что S изоморфно (тополого-алгебраически) топологическому аддитивно идемпотентному полуполю с нулем $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением чисел.

Упражнение 2. Докажите, что полуполя с нулем $\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$, $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{R}\cup\{\infty\}, \wedge, +\rangle$ изоморфны друг другу.

Упражнение 3. С точностью до изоморфизма существует десять двухэлементных полуколец. Найдите эти полукольца, то есть задайте таблицами Кэли операции сложения и умножения на двухэлементном множестве $\{a, b\}$.

Дадим несколько необходимых определений.

Собственный идеал J полукольца S называется:

простым, если $\forall a, b\in S\ (ab\in J \Rightarrow (a\in J \vee b\in J))$;

максимальным, если $J\subset I$ влечет $I=S$ для любого идеала I в S;

строгим, когда $\forall a, b\in S\ (a+b\in J \Rightarrow a\in J)$;

полустрогим, когда $\forall a, b\in S\ (a, a+b\in J \Rightarrow b\in J)$.

Полукольцо с нулем 0 назовем *антикольцом*, если в нем выполняется квазитождество $x+y=0 \Rightarrow x=0$.

Конгруэнция Берна на полукольце S с нулем по его идеалу J – это такое бинарное отношение $\rho(J)$ на S, что для любых $s, t\in S$ имеем:

$$s\rho(J)t \Leftrightarrow \exists a, b\in J\ (s+a=t+b).$$

Легко видеть, что $\rho(J)$ есть конгруэнция на полукольце S, причем $J\subseteq[0]_{\rho(J)}$. Идеал J образует класс нуля некоторой конгруэнции (равносильно, конгруэнции $\rho(J)$) на S тогда и только тогда, когда J – полустрогий идеал. При этом конгруэнция Берна $\rho(J)$ будет наименьшей среди конгруэнций σ на полукольце S с тем же классом 0, что и $\rho(J)$: $[0]_\sigma=[0]_{\rho(J)}$.

Конгруэнции на любом кольце S суть в точности конгруэнции Берна по различным идеалам J в S, то есть отношения сравнимости по J: $s\rho(J)t \Leftrightarrow s-t\in J$.

Для произвольного полукольца S с нулем 0 обозначим через

$$r(S)=\{s\in S: \exists t\in S\ (s+t=0)\}$$

множество всех элементов из S, имеющих противоположный элемент. Ясно, что $r(S)$ – строгий идеал полукольца S, являющийся кольцом. Строгие идеалы в полукольцах являются полустрогими, но, вообще говоря, не наоборот; так, в кольцах все идеалы полустрогие, а строгими будут только сами кольца (как несобственные идеалы). В дистрибутивных решетках все идеалы строгие.

Полукольцо S с 0 будет кольцом (антикольцом) тогда и только тогда, когда $r(S)=S$ (соответственно, $r(S)=\{0\}$).

Введенные полукольцевые понятия мы демонстрируем на примерах полуколец многочленов $S[x]$ и полуколец матриц $M_2(S)$ над числовыми полукольцами S и двухэлементной цепью $\mathbf{B}$.

В следующих примерах фигурируют полукольца S с 0 и $1\neq 0$.

Пример 6. Полукольцо

$$S[x]=\{f=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n: a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n\in S, n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$$

всех многочленов с коэффициентами из полукольца S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S. При этом элемент a_0 называется *свободным членом* многочлена f, элемент a_n – *старшим коэффициентом* f при $a_n\neq 0$, тогда $n=\deg f$ будет *степенью* многочлена f. Относительно обычных операций сложения и умножения многочленов (как в случае многочленов с числовыми коэффициентами) множество $S[x]$ действительно является полукольцом. Многочлены нулевой степени и элемент 0 из S образуют в полукольце $S[x]$ подполукольцо, изоморфное полукольцу коэффициентов S. При соответствующем отождествлении нуль 0 и единица 1 полукольца S будут нулем и единицей полукольца многочленов $S[x]$.

Пример 7. Полукольцо $M_n(S)$ всех квадратных матриц размера $n\times n$ с коэффициентами из S ($n\in\mathbf{N}$) с обычными операциями сложения и умножения матриц. При $n=1$ получаем полукольцо S. Полукольцо коэффициентов S изоморфно вкладывается в полукольцо матриц $M_n(S)$: каждому элементу $a\in S$ сопоставляется диагональная квадратная матрица $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$ с элементом a по главной диагонали, то есть $a_{ij}=a$ при $i=j$ и $a_{ij}=0$ при $i\neq j$. Нулю $0\in S$ соответствует нулевая матрица O_n – нуль полукольца матриц $M_n(S)$, а единице $1\in S$ соответствует единичная матрица E_n – единица в $M_n(S)$.

Полукольцо S с нулем 0 назовем *расширением полукольца R посредством полукольца T*, если на S существует конгруэнция ρ, для которой класс нуля $[0]_\rho$ изоморфен R и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно T.

На полукольце S с нулем 0 существуют три конгруэнции, имеющие $r(S)$ классом нуля:

– конгруэнция Берна $\rho(r(S))$, фактор-полукольцо по которой является антикольцом [5, с. 25];

– конгруэнция σ: $s\sigma t \Leftrightarrow \exists x, y\in S\ (s+x=t\ \&\ t+y=s)$, фактор-полукольцо по которой упорядочиваемо [5, с. 30];

– наименьшая конгруэнция на S, фактор-полукольцо по которой аддитивно идемпотентно [21, предложение 2].

Очевидно, что упорядочиваемые полукольца суть антикольца, а аддитивно идемпотентные полукольца упорядочиваемы.

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Любое полукольцо S с нулем является расширением однозначно определенного (с точностью до изоморфизма) кольца $r(S)$ посредством аддитивно идемпотентного полукольца.*

Заметим, что в данной теореме аддитивно идемпотентное полукольцо определено, вообще говоря, не однозначно.

Теорема 2. *Любое полукольцо S с нулем, для которого кольцо $r(S)$ обладает единицей, однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Предложение 1. *Пусть в полукольце S с нулем и единицей даны непересекающиеся мультипликативно замкнутое множество M и идеал J. Тогда в S существует простой идеал P, содержащий J и не пересекающийся с M.*

Теорема 3. *В произвольном полукольце с нулем и ненулевой единицей каждый собственный идеал содержится в некотором максимальном идеале и все максимальные идеалы – простые.*

Замечание. Начинать изучение теории полуколец целесообразно с класса коммутативных полуколец с нулем и единицей, имея в виду коммутативные кольца [1; 20, глава 2].

4. Мультипликативно идемпотентные полукольца

Помимо общих вопросов первоначального изучения теории полуколец, рассматриваемых в параграфе 3, мы сосредотачиваемся на более основательном изучении отдельных классов полуколец. В этом параграфе студентам предлагается введение в теорию мультипликативно идемпотентных полуколец.

Полукольцо с тождеством $xx=x$ называется *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентными полукольцами являются *булевы кольца* (кольца с тождеством $xx=x$) и дистрибутивные решетки.

Упражнение 4. Докажите, что булевы кольца коммутативны и удовлетворяют тождеству $x+x=0$ (сложение совпадает с вычитанием: $x+y=x-y$).

Перечислим все двухэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца: поле $\mathbf{Z}_2$; дистрибутивная решетка $\mathbf{B}$; идемпотентное моно-полукольцо $\mathbf{D}=\{a, 1\}$; мультипликативно идемпотентное полукольцо $\mathbf{T}=\{\infty, 1\}$ с константным сложением $x+y=\infty$; идемпотентное *полукольцо левых нулей* $\mathbf{L}=\{a, b\}$, то есть полукольцо с тождеством $xy=x$; идемпотентное *полукольцо правых нулей* $\mathbf{R}=\{a, b\}$, то есть полукольцо с тождеством $xy=y$.

Упражнение 5. Проверьте, что любое полукольцо левых (правых) нулей идемпотентно.

Полукольцо с тождеством $xyx=x$ называется *прямоугольным*.

Упражнение 6. Покажите, что любое прямоугольное полукольцо изоморфно прямому произведению полукольца левых нулей и полукольца правых нулей.

Перечислим ряд общих специфических ***свойств мультипликативно идемпотентных полуколец*** S, которые мы доказываем вместе со студентами.

Свойство 1. *В S выполняются тождества:* $x+xy+yx+y=x+y$; $4x=2x$; $x+2xy+y=x+y$; $x+xy+y=x+yx+y$; $x+3xy=x+xy$.

Свойство 2. *Полукольцо S удовлетворяет следующим условиям: если S с 1, то $xy=1 \Rightarrow x=1$; если S с 0, то $x+y=0 \Rightarrow x=y$; $Sx=yS \Rightarrow x=y$; $(Sx=Sy)\&(xS=yS) \Rightarrow x=y$.*

Свойство 3. Если *полукольцо S с нулем, то S коммутативно в нуле, то есть равные нулю произведения в S не зависят от порядка сомножителей.*

Свойство 4. *Полукольцо S инвариантно (то есть все его односторонние идеалы являются идеалами) тогда и только тогда, когда оно коммутативно.*

Свойство 5. *Максимальные идеалы полукольца S будут простыми.*

Свойство 6. *Каждый идеал в S есть пересечение простых идеалов.*

В качестве учебных задач для самостоятельного решения студентам предлагается материал главы 1 нашей книги [12].

Целесообразно сразу познакомить студентов с основными классами мультипликативно идемпотентных полуколец: булевыми кольцами; дистрибутивными и булевыми решетками; моно-полукольцами; прямоугольными полукольцами; полукольцами с константным сложением [12, глава 2].

На занятиях семинара подробно разбираются доказательства различных структурных теорем.

Теорема 4. *Произвольное полукольцо S коммутативно и мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда простые идеалы в S разделяют его элемент, то есть для любых двух неравных элементов полукольца S в нем существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.*

Следствие. (Теорема Биркгофа) *Любая дистрибутивная решетка S изоморфна некоторой решетке множеств, именно, подрешетке решетки всех подмножеств множества простых идеалов в S.*

Теорема 5. *Любое конечнопорожденное мультипликативно идемпотентное полукольцо конечно.*

Теорема 6. *Всякое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем разлагается в прямую сумму булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

Теорема 7. *Любое конгруэнц-простое мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем изоморфно $\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{Z}_2$.*

Теорема 8. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

В качестве исследовательских заданий студентам рекомендуются следующие задачи.

Задача 1. Нахождение, с точностью до изоморфизма, всех трехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец [см. 13]. Их классификация по различным полукольцевым свойствам.

Задача 2. Перечисление четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем.

Задача 3. Описание пятиэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулем и единицей.

Задача 4. Создание компьютерной программы нахождения, перечисления и подсчета числа попарно неизоморфных n-элементных мультипликативно идемпотентных полуколец.

Дальнейшее изучение теории мультипликативно идемпотентных полуколец можно вести по монографии [12] и журнальным статьям, рекомендуемым наставником. В конце книги [12, с. 130] предложены научно-исследовательские задачи на перспективу.

5. Полукольца непрерывных функций

Полукольца непрерывных функций образуют класс полуколец, имеющих функционально-топологическую природу.

Классическим объектом функциональной алгебры служит кольцо $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций [30].

С кольцом $C(X)$ связаны два его подполукольца:

– полукольцо $C^+(X)=C(X, \mathbf{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций на пространстве X;

– полуполе $U(X)=C(X, \mathbf{P})$ всех непрерывных положительных функций на пространстве X.

Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$. Заметим, что $U(X)$ является множеством всех обратимых элементов полукольца $C^+(X)$.

Если в полукольцах $C^+(X)$ и $U(X)$ заменить обычную операцию сложения на операцию $\vee$ взятия max двух функций, оставив операцию умножения прежней, то получим аддитивно идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)=C(X, \mathbf{R}^\vee)$ и полуполе $U^\vee(X)=C(X, \mathbf{P}^\vee)$. Отметим, что полукольца $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ будут *положительными* полукольцами, то есть элементы вида $f+1$ и $f\vee 1$ в них обратимы.

Начало систематическому исследованию полуколец $C^+(X)$ и полуполей $U(X)$ положила статья 1998 г. [4]. Теории полуколец непрерывных функций посвящены двухтомная монография [8] и обзорная работа [11]. Исследование различных видов полуколец непрерывных функций продолжается и расширяется.

Изучение полуколец непрерывных функций можно начать со случая, когда топологическое пространство X есть числовой отрезок, скажем, $[-1, 1]$. Далее следует познакомить студентов с метрическими пространствами, а уже затем – с азами общей топологии. Методика изучения метрических и топологических пространств рассматривалась в статьях [2] и [3], соответственно. При изложении этой темы можно воспользоваться учебным пособием [7, глава 4] и фундаментальным трудом Энгелькинга [29].

Для понимания следующих теорем необходимо дать определения компакта и тихоновского пространства.

Топологическое пространство X называется:

– *компактным*, если каждое его открытое покрытие $(U_i)_{i\in I}$ содержит конечное подпокрытие $(U_i)_{i\in K}$, где K – некоторое конечное подмножество индексного множества I: если $X=\cup(U_i)_{i\in I}$ для семейства открытых в X множеств U_i $(i\in I)$, то $X=\cup(U_i)_{i\in K}$;

– *хаусдорфовым*, если в X любые две различные точки имеют непересекающиеся открытые окрестности;

– *тихоновским* (или *вполне регулярным*), если оно хаусдорфово и для любой его точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества V найдется такая функция $f\in C(X)$, что $f(x)=1$ и $f(V)=\{0\}$;

– *нормальным*, если оно хаусдорфово и любые два непересекающиеся замкнутые множества X имеют непересекающиеся открытые окрестности;

– *компактом*, если X – компактное хаусдорфово пространство.

Мы доказываем, что числовые отрезки являются компактами, а компакты будут нормальными пространствами. Из классической леммы Урысона [29, теорема 1.5.10] следует, что нормальные пространства – тихоновские. Значит, *все компакты являются тихоновскими пространствами*.

Для произвольной точки x топологического пространства X положим $M_x=\{f\in C^+(X): f(x)=0\}$.

Упражнение 7. Докажите, что M_x – максимальный идеал полукольца $C^+(X)$.

Теорема 9. *Для всякого компакта X максимальные идеалы полукольца $C^+(X)$ суть в точности идеалы M_x по различным точкам $x\in X$.*

Упражнение 8. Выполняется ли теорема 9 для полуколец $C^\vee(X)$?

Теорема 10. *Для всякого компакта X каждый простой идеал P полукольца $C^+(X)$ содержится в единственном максимальном идеале, то есть $P\subseteq M_x$ для однозначно определенной точки $x\in X$.*

Упражнение 9. Совпадают ли простые идеалы в полукольцах $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ над произвольным топологическим пространством X ?

Предложение 4. *В полукольцах $C^+(X)$ все простые идеалы строгие.*

Упражнение 10. Проверьте справедливость предложения 4 для $C^\vee(X)$.

Для простого идеала P полукольца $C^+(X)$ обозначим через $\rho(P)$ отношение эквивалентности на $C^+(X)$ с двумя классами P и $C^+(X)\setminus P$.

Упражнение 11. Убедитесь, что эквивалентность $\rho(P)$ является конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$.

Теорема 11. *Для любого топологического пространства X максимальные конгруэнции на полукольце $C^+(X)$ совпадают с двухклассовыми конгруэнциями $\rho(P)$ по всевозможным простым идеалам P полукольца $C^+(X)$.*

Заметим, что теорема 11 верна для абстрактных положительных полуколец с нулем и единицей, только вместо простых идеалов P следует брать строгие простые идеалы. В частности, теорема 11 справедлива для полуколец $C^{\vee}(X)$.

Для произвольной точки x топологического пространства X зададим конгруэнцию $\sim_x$ на полукольце $C^+(X)$ и на полуполе $U(X)$ формулой:

$$f\sim_x g \Leftrightarrow f(x)=g(x) \text{ для всех } f, g\in C^+(X)\ (f, g\in U(X)).$$

Упражнение 12. Найдите фактор-полукольца $C^+(X)/\sim_x$ и $U(X)/\sim_x$.

Упражнение 13. Покажите, что конгруэнция $\sim_x$ на полукольце $C^+(X)$ совпадает с конгруэнцией Берна по идеалу M_x в $C^+(X)$.

Упражнение 14. Докажите, что $\sim_x$ – максимальная конгруэнция на полуполе $U(X)$.

Теорема 12. *Для любого компакта X максимальные конгруэнции на полуполе $U(X)$ – это в точности конгруэнции $\sim_x$ по всем точкам $x\in X$.*

Упражнение 15. Докажите теорему 12 для полуполей $U^{\vee}(X)$.

Далее изучаются полукольца $C^+(X)$, $C^{\vee}(X)$ и полуполя $U(X)$, $U^{\vee}(X)$ для произвольных топологических пространств X.

Сформулируем несколько исследовательских задач по данной тематике.

Задача 5. Изучение алгебраических свойств колец $C(X, \mathbf{Q})$ всех непрерывных функций на топологических пространствах X, принимающих значения в топологическом поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

Задача 6. Изучение нормированных колец $C^*(X, \mathbf{Q})$ всех ограниченных функций из $C(X, \mathbf{Q})$, рассматриваемых с sup-нормой.

Задача 7. Исследование полуколец $C(X, \mathbf{Q}^+)$ всех непрерывных неотрицательных рациональнозначных функций.

Задача 8. Исследование полуполей всех непрерывных положительных рациональнозначных функций, заданных на топологических пространствах X.

При решении задач 5–8 полезно знать результаты общей теории колец непрерывных функций [32]. Ряд научно-исследовательских задач по теории полуколец непрерывных функций сформулирован в монографии [8].

6. Заключение

1. Автор статьи имеет сорокалетний опыт ведения и руководства математическими студенческими кружками и семинарами, разработал и прочитал 15 спецкурсов. Под его руководством выполнено и защищено 130 курсовых и 78 дипломных работ, 20 магистерских и 16 кандидатских диссертаций по современной математике.

2. Предполагается, что материал студенческого семинара будет служить основой новых дипломных и магистерских работ по математике для студентов – участников семинара.

3. Развитие содержания параграфов 4 и 5 может вылиться в кандидатские диссертации по обновленной научной специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

4. Готовится к печати продолжение – статья «Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы», содержащая несколько фрагментов общей теории полуколец с доказательствами.

Список литературы

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру : пер. с англ. М. : Мир, 1972. 160 с.

2. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Изучение теории метрических пространств // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2013. № 2 (3). С. 103–111.

3. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Изучение топологической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 2. С. 86–93.

4. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.

5. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца : учеб. пособие. Киров : Изд-во ВГПУ, 2000. 44 с.

6. *Вечтомов Е. М.* Тестовые задачи по абстрактной алгебре : мат. IV Всероссийской научно-практической конференции «Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики». Глазов : ГГПИ имени В. Г. Короленко, 2012. С. 8–15.

7. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учеб. пособие. Изд. 3. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

8. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография в 2-х т.; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. Т. 1. 384 с. Т. 2. 316 с.

9. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.

10. *Вечтомов Е. М., Лукин М. А.* Полукольца, являющиеся объединениями кольца и полутела // Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 6. С. 159–160.

11. *Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.* Полукольца непрерывных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.

12. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.

13. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2. С. 13–23.

14. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Абстрактная алгебра. Базовый курс : учеб. пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. 260 с.

15. *Вечтомов Е. М., Черанева А. В.* Полутела и их свойства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.

16. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1 (3). С. 41–48.

17. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Математика: логика, множества, комбинаторика : учеб. пособие. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 243 с.

18. *Гретцер Г.* Общая теория решеток : пер. с англ. М. : Мир, 1984. 456 с.

19. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. М. : Наука, 1973. 448 с.

20. *Ламбек И.* Кольца и модули : пер. с англ. М. : Мир, 1971. 280 с.

21. *Лукин М. А.* Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников : мат. V Всероссийской научно-методической конференции. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2012. С. 312–316.

22. *Полин С. В.* Простые полуполя и полутела // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.

23. *Полин С. В.* Минимальные многообразия полуколец // Математические заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 527–537.

24. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. Изд. 2-е. М. : Наука, 1980. 160 с.

25. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. Изд. 2-е. М. : Наука, 1986. 240 с.

26. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. М. : Наука, 1983. 272 с.

27. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру : пер. с венгер. М. : Мир, 1979. 260 с.

28. *Чермных В. В.* Функциональные представления полуколец : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

29. *Энгелькинг Р.* Общая топология : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.

30. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York. 1976. 300 p.

31. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

32. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // Journal of Mathematic Sciences. 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

Student educational and research seminar on algebra

E. M. Vechtomov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article discusses the objectives, content and methods of work of the educational and research seminar on algebra for bachelors of mathematical fields of training. The seminar is intended for interested students as an additional resource for their mathematical education. The teacher acts as a mentor and in the future the head of the research work of students, participants of the seminar. The topic of the seminar is closely related to the content of research conducted at Vyatka State University within the framework of the scientific algebraic school "Functional algebra and the theory of semirings". Currently, two topics are being studied at the seminar: "Multiplicatively idempotent semirings" and "Semirings of continuous functions". During the seminars, the presentation of the theory is accompanied by illustrative examples, exercises, and the formulation of research tasks.

Keywords: student seminar, algebra training, semiring, functional algebra, research problem.

References

1. *At'ya M., MC'Donald I. Vvedenie v kommutativnuyu algebru : per. s angl.* [Introduction to commutative algebra : transl. from English]. M. Mir (World). 1972. 160 p.

2. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Izuchenie teorii metricheskih prostranstv* [The study of the theory of metric spaces] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of the Vyatka State University for the Humanities. 2013. No. 2 (3). Pp. 103–111.

3. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Izuchenie topologicheskoj struktury* [The study of topological structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2014. No. 2. Pp. 86–93.

4. *Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A. Polukol'ca nepreryvnyh neotricatel'nyh funkcij: delimost', idealy, kongruencii.* [Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and Applied Mathematics. 1998. Vol. 4. Is. 2. Pp. 493–510.

5. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca : ucheb. posobie* [Introduction to semirings : tutorial]. Kirov. VSPU Publishing House. 2000. 44 p.

6. *Vechtomov E. M. Testovye zadachi po abstraktnoj algebre : mat. IV Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Prepodavanie matematiki v shkolah i vuzah: problemy soderzhaniya, tekhnologii i metodiki"* [Test problems in abstract algebra : mat. of IV All-Russian scientific and practical conference "Teaching mathematics in schools and universities: problems of content, technology and methodology"]. Glazov. GSPI n. a. V. G. Korolenko. 2012. Pp. 8–15.

7. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : ucheb. posobie* [Mathematics: basic mathematical structures : tutorial]. Ed. 3. M. Yurayt. 2018. 296 p.

8. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Elementy funkcional'noj algebry : monografiya v 2-h t.* [Elements of functional algebra: a monograph in 2 vols.]; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. Vol. 1. 384 p. Vol. 2. 316 p.

9. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

10. *Vechtomov E. M., Lukin M. A. Polukol'ca, yavlyayushchiesya ob'edineniyami kol'ca i polutela* [semirings, which are unions of a ring and a semi-body] // *Uspekhi matematicheskih nauk* – Successes of mathematical sciences. 2008. Vol. 63. Is. 6. Pp. 159–160.

11. *Vechtomov E. M., Mihalev A. V., Sidorov V. V. Polukol'ca nepreryvnyh funkcij* [Semirings of continuous functions] // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied Mathematics. 2016. Vol. 21. Is. 2. Pp. 53–131.

12. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

13. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Trekhelementnye mul'tiplikativno idempotentnye polukol'ca* [Three-element multiplicatively idempotent semicircles] // *Matematicheskij vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical Herald of Vyatka State University. 2021. No. 2. Pp. 13–23.

14. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Abstraktnaya algebra. Bazovyj kurs : ucheb. posobie* [Abstract algebra. Basic course : tutorial]. Kirov. Raduga-PRESS. 2014. 260 p.

15. *Vechtomov E. M., Cheraneva A. V. Polutela i ih svojstva* [Semi-bodies and their properties // *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* – Fundamental and applied mathematics]. 2008. Vol. 14. No. 5. Pp. 3–54.

16. *Vechtomov E. M., Chermnyh V. V. Izuchenie algebraicheskoj struktury* [The study of algebraic structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State University for the Humanities. 2012. No. 1 (3). Pp. 41–48.

17. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Matematika: logika, mnozhestva, kombinatorika : ucheb. posobie* [Mathematics: logic, sets, combinatorics : tutorial]. Ed. 2nd. M. Yurayt. 2018. 243 p.

18. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok : per. s angl.* [General theory of lattices : transl. from English]. M. Mir (World). 1984. 456 p.

19. *Kaluzhnin L. A. Vvedenie v obshchuyu algebru* [Introduction to general algebra]. M. Nauka. 1973. 448 p.

20. *Lambek I. Kol'ca i moduli : per. s angl.* [Rings and modules : transl. from English]. M. Mir (World). 1971. 280 p.

21. *Lukin M. A. Ob odnoj universal'noj kongruencii na polukol'cah* [On one universal congruence on semirings] // *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: Interaktivnye formy obucheniya matematike studentov i shkol'nikov : mat. V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii* – Problems of modern mathematical education in pedagogical colleges and schools of Russia: Interactive forms of teaching mathematics to students and schoolchildren : mat. of V All-Russian scientific and methodological conference. Kirov. VyatSHU. 2012. Pp. 312–316.

22. *Polin S. V. Prostye polupolya i polutela* [Simple half-fields and semi-bodies] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* – Siberian Mathematical Journal. 1974. Vol. 15. No. 1. Pp. 90–101.

23. *Polin S. V. Minimal'nye mnogoobraziya polukolec* [Minimal manifolds of semirings] // *Matematicheskie zametki* – Mathematical notes. 1980. Vol. 27. No. 4. Pp. 527–537.

24. *Skornyakov L. A. Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. Ed. 2nd. M. Nauka (Science). 1980. 160 p.

25. *Skornyakov L. A. Elementy algebry* [Elements of Algebra]. Ed. 2nd. M. Nauka (Sceince). 1986. 240 p.

26. *Skornyakov L. A. Elementy obshchej algebry* [Elements of general algebra]. M. Nauka (Science). 1983. 272 p.

27. *Fried E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru : per. s venger.* [Elementary introduction to abstract algebra : transl. from Hungarian]. M. Mir (World). 1979. 260 p.

28. *Chermnyh V. V. Funkcional'nye predstavleniya polukolec : monografiya* [Functional representations of semirings : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2010. 224 p.

29. *Engelking R. Obshchaya topologiya : per. s angl.* [General topology : transl. from English]. M. Mir (World). 1986. 752 p.

30. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. New York. 1976. 300 p.

31. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

32. *Vechtomov E. M.* Rings of continuous functions with values in a topological division ring // Journal of Mathematic Sciences. 1996. Vol. 78. No. 6. Pp. 702–753.

УДК 37.016:512.6 DOI 10.25730/VSU.0536.21.020

Изучение линейной алгебры на инженерных факультетах

Е. С. Трефилова

старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье рассмотрены подходы к изучению тем линейной алгебры, изучаемых на инженерных факультетах Вятского государственного университета. Проведен анализ некоторых учебников и учебных пособий по математике для высших учебных заведений, в результате которого выделены подходы в последовательности изучения некоторых тем линейной алгебры. В статье предложена еще одна последовательность изучения тем, основанная на необходимости появления того или иного термина. Описаны достоинства и недостатки, появившиеся в ходе апробации такой последовательности при изучении математики на электротехническом факультете. В статье приводятся несколько примеров тестовых вопросов, позволяющих оценить уровень усвоения материала. Материалы статьи могут быть полезны для преподавателей, работающих на инженерных факультетах.

Ключевые слова: линейная алгебра, матрицы, определители, методы решения систем линейных уравнений, исследование систем линейных уравнений.

Раздел линейной алгебры и векторной геометрии входит в программу изучения математики на инженерных факультетах Вятского государственного университета и включает в себя такие вопросы, как матрицы, определители, системы линейных уравнений (СЛУ), векторы, произведения векторов.

В нашем вузе сложилась определенная схема изучения данного раздела. Однако темы линейной алгебры можно рассматривать в разной последовательности:

1) матрицы, определители, методы решения СЛУ [3] или определители, матрицы; метод Крамера решения СЛУ, метод Гаусса и матричный метод решения СЛУ [1; 4];

2) метод Гаусса, исследование системы, понятие матрицы, определители, метод Крамера, матричный метод решения СЛУ [2].

Каждый из описанных подходов можно применять при изучении линейной алгебры. Сравним и обоснуем некоторые из предложенных подходов.

В первом, назовем его традиционным, описанном в большинстве учебников для студентов инженерных или экономических факультетов [1; 2; 3], предлагается изучение вопросов, связанных с матрицами и определителями, и в заключении раздела показывается применение матричного исчисления для решения систем линейных уравнений. Указанный способ изложения материала основан на следующем факте: сначала изучение некоторых средств, а затем их применение для решения практических задач, в данном случае – решения СЛУ. При таком подходе изучение всех методов решения систем в конце раздела вполне целесообразно.

Как известно, в методике преподавания математики всегда подчеркивается необходимость мотивации для введения того или иного термина (понятия) или факта (теоремы), особенно это хорошо прослеживается при изучении школьного курса геометрии, менее заметно в алгебраических темах. При изучении курса математики в высшей школе часто забывают о необходимости мотивации при изучении отдельных тем или разделов – и часто вводятся какие-то понятия, теоремы, а потом, чаще всего в конце изучения раздела, появляются примеры их практического применения. Желательно также учитывать специфику направления подготовки, на котором изучается математика с целью подбора задач и практических примеров применения.

В предложенном вторым подходе большое внимание уделяется мотивации и преемственности между школьным и вузовским курсами математики, что делает его более логичным с точки зрения необходимости появления тех или иных терминов.

В ходе апробации, проведенной на электротехническом факультете, была реализована следующая последовательность изучения тем линейной алгебры:

1) понятие линейного уравнения, его графическое изображение, способы решения систем линейных уравнений с двумя переменными (метод подстановки и метод сложения) [5];

2) элементарные преобразования СЛУ, метод Гаусса, ранг матрицы, теорема Кронекера – Капелли, исследование решений систем линейных уравнений;

3) понятие матрицы, действия над матрицами;

4) определители, свойства определителей, обратная матрица. Матричный метод решения СЛУ и метод Крамера;

5) фундаментальный набор (система) решений (ФНР) однородной системы линейных уравнений.

При такой последовательности изучения тем линейной алгебры – матрицы, определители и системы линейных уравнений – были выявлены следующие положительные моменты:

1) хорошо видна преемственность в обучении между школой и вузом. Для студентов-первокурсников продолжение изучения математики начинается с понятного им материала и потом постепенно переходит на новые термины, что обеспечивает им более легкую адаптацию;

2) своевременное появление понятия матрицы как компактного способа представления коэффициентов уравнений системы, а определителя матрицы как некой числовой характеристики.

Однако при использовании такого порядка изучения тем линейной алгебры мы столкнулись со следующими трудностями:

1) нехватка времени. Перечень тем и количество часов, отведенных на их изучение, жестко регламентированы программой учебной дисциплины, что не позволяет существенно менять часы на их изучение, возможно только небольшое варьирование;

2) пересмотр задач, предлагаемых для решения студентам на практических занятиях. Связано это, прежде всего, с тем, что недостаточно теоретического материала на первые семинарские занятия, поэтому круг задач для первых существенно ограничен;

3) не всегда ясна цель изучения той или иной темы на практическом занятии. По задумке лектора, каждый термин должен появляться в случае его необходимости для дальнейшего изучения. Поэтому у студентов возникает вопрос – зачем нужно знать другие методы решения СЛУ, которые ограничены в своем применении, если мы знаем универсальный способ решения;

4) в ходе проверки контрольных работ появились ошибки, которые не встречались ранее, например:

«Дана матрица *A*= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите элементы a_{12}, a_{35}. Определите размерность матрицы» [4]. Вместо нахождения элементов матрицы начинают приводить ее к ступенчатому виду. Конечно, такая ошибка появляется не только из-за выбранного подхода, но и неверного прочтения задания. Поэтому необходимо на занятиях вести работу и по улучшению функциональной грамотности студентов.

После изучения раздела студентам была предложена небольшая проверочная работа. Приведем ее текст и краткий анализ возникших у студентов ошибок.

1. Дана матрица *A*= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите элементы a_{25}, a_{43}. Определите размерность матрицы.

Как было уже указано выше, не все поняли, что нужно написать четыре числа (два элемента и размерность матрицы), и начали сводить ее к ступенчатому виду.

2. Система линейных уравнений, содержащая три уравнения и четыре неизвестных, может иметь _____ решений.

Ни один из решавших не указал верное количество решений системы, чаще всего писали одно или бесконечно много. Не было ответов, в которых было бы указано, что система может и не иметь решений.

3. В однородной системе линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 7x_4 - 8x_5 = 0 \end{cases}$ главными (свободными) переменными можно считать …

В задании, что система однородная никак не влияет на правильный ответ, так как рассматривались на занятии и системы неоднородные, имеющие бесконечно множество решений. Заметим, что нахождение общего решения системы в таком случае вызывает трудности у большинства студентов, изучающих СЛУ вне зависимости от последовательности изучения.

4. В однородной системе линейных уравнений, содержащей пять уравнений и шесть неизвестных, ранг основной матрицы равен четырем. Тогда ее фундаментальный набор решений содержит _____ решений.

Задание сложно тем, что нужно из алгоритма нахождения фундаментальной системы решений понять, как определить количество решений, а не найти их. Из писавших 20 человек верный ответ дали только двое.

5. Дана основная матрица однородной СЛУ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Запишите фундаментальный набор решений системы.

В этом задании необходимо было построить ФНР, перейдя от матрицы к системе, выделив свободные и главные переменные. Встречались ошибки, в которых матрица коэффициентов системы принималась за расширенную матрицу, неверное выделение главных и свободных переменных и выражение главных через свободные переменные.

6. Найти матрицу $C=AB-3A+4E$, если известно, что $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Последние задания не вызвали больших затруднений у решающих, так как представляют собой стандартные задачи матричной алгебры.

В отличие от студентов, изучающих темы линейной алгебры в традиционной последовательности отвечать на вопросы, касающиеся матриц, было сложнее, так как допущено больше ошибок, при этом вопросы, касающиеся СЛУ, особой разницы в знаниях и их применении не показали.

Тем не менее, данный подход к изучению матриц, определителей, систем линейных уравнений можно применять на инженерных факультетах, но, на мой взгляд, более целесообразно сочетание подходов.

Каждый из описанных способов может применяться в курсе математики инженерных факультетов. Выбор последовательности изучения тем линейной алгебры (и не только) должен идти от цели изучения того или иного раздела и применения вопросов, в нем рассматриваемых, в профессиональной деятельности.

Список литературы

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика : учеб. для вузов в 3-х т.; под ред. В. А. Садовничего. М. : Дрофа, 2004.

2. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.* Линейная алгебра : учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2021.

3. *Кремер Н. Ш. и др.* Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ, 2002.

4. *Ефимов А. В., Поспелов А. С.* Сборник задач по математике для вузов : учеб. пособие в 4-х ч. Ч. 1. М. : Изд-во Физико-математической литературы, 2001.

5. *Трефилова Е. С.* Изучение систем линейных уравнений студентами гуманитарных направлений // Advanced Science. Киров : Изд-во Вятского государственного университета. 2017. № 4 (8).

The study of linear algebra at the Engineering faculties

E. S. Trefilova
senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-2986-7137. E-mail: elenaoshueva@mail.ru

Abstract. The proposed article discusses approaches to the study of linear algebra topics studied at the engineering faculties of Vyatka State University. The analysis of some textbooks and textbooks in mathematics for higher educational institutions has been carried out, as a result of which approaches in the sequence of studying some topics of linear algebra have been identified. The article suggests another sequence of studying topics based on the need for the appearance of a particular term. The advantages and disadvantages that appeared during the testing of such a sequence in the study of mathematics at the Faculty of electrical engineering are described. The article provides several examples of test questions to assess the level of assimilation of the material. The materials of the article can be useful for teachers working at engineering faculties.

Keywords: linear algebra, matrices, determinants, methods for solving systems of linear equations, study of systems of linear equations.

References

1. *Bugrov Ya. S., Nikol'skij S. M. Vysshaya matematika : ucheb. dlya vuzov v 3-h t.* [Higher mathematics : textbook for universities in 3 vols.] / ed. by V. A. Sadovnichy. M. Drofa (Bustard). 2004.
2. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Linejnaya algebra : ucheb. posobie dlya vuzov. Izd. 2-e* [Linear algebra : textbook for universities. Ed. 2nd]. M. Yurayt. 2021.
3. *Kremer N. S. et al. Vysshaya matematika dlya ekonomistov : ucheb. dlya vuzov* [Higher mathematics for economists : textbook for universities] / ed. by Prof. N. S. Kremer. M. UNITY. 2002.
4. *Efimov A. V., Pospelov A. S. Sbornik zadach po matematike dlya vuzov : ucheb. posobie v 4-h ch. Ch. 1* [Collection of problems in mathematics for universities : textbook in 4 pts. Pt. 1]. M. Physical and Mathematical literature. 2001.
5. *Trefilova E. S. Izuchenie sistem linejnyh uravnenij studentami gumanitarnyh napravlenij* [Studying systems of linear equations by students of humanities] // AdvancedScience. Kirov. Vyatka State University. 2017. No. 4(8).

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 3 (22) (2021)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964