МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 DOI 10.25730/VSU.0536.22.019

Сильно диссипативные волновые уравнения с нелинейными акустическими условиями сопряжения

С. Э. Исаева
кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет.
Азербайджан, г. Баку. ORCID: 0000-0002-0872-1350. E-mail: isayevasevda@rambler.ru

Аннотация. Задачи сопряжения возникают в некоторых приложениях физики и биологии. Например, смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения касаются задач с двумя волновыми уравнениями, которые моделируют поперечные акустические колебания мембраны, состоящей из двух разных материалов Ω_1 и Ω_2. Хорошо изучены задачи сопряжения для линейных гиперболических уравнений, где доказаны единственность и регулярность решений для рассматриваемой задачи. Изучена также задача сопряжения для вязкоупругих волн и доказаны существование, единственность и экспоненциальное убывание решений для такой задачи. В данной работе рассматривается начально-краевая задача для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с нелинейными акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о локальном существовании и единственности слабых решений для рассматриваемой задачи. В доказательстве теоремы использованы аппроксимации Фаэдо – Галеркина, теоремы вложения, теорема о неподвижной точке.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, локальное решение, слабое решение, акустические условия, условия сопряжения, теоремы вложения, теорема о неподвижной точке.

Пусть $\Omega \subset R^n (n \geq 1)$ – ограниченная область с гладкой границей Γ_1, $\Omega_2 \subset \Omega$ – подобласть с гладкой границей Γ_2 и $\Omega_1 = \Omega \backslash (\Omega_2 \cup \Gamma_2)$ – подобласть с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

В области Ω рассмотрим следующую нелинейную задачу с нелинейными акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u = f_1(u) \text{ в } \Omega_1 \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$v_{tt} - \Delta v_t - \Delta v = f_2(v) \text{ в } \Omega_2 \times (0, \infty), \tag{2}$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t \text{ на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \tag{3}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, \infty), \tag{4}$$

$$u = v, \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_t}{\partial \nu} + \rho(u_t) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \tag{5}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \tag{6}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega_2, \tag{7}$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial v_1}{\partial \nu} + \rho(u_1) \equiv \delta_1, x \in \Gamma_2, \tag{8}$$

где ν – внешняя нормаль границы Γ; $f_1, f_2, \rho: (-\infty; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$, $M, D, K : \Gamma_2 \to (-\infty; +\infty)$, $u_0, u_1: \Omega_1 \to (-\infty; +\infty)$, $v_0, v_1 : \Omega_2 \to (-\infty; +\infty)$, $\delta_0: \Gamma_2 \to (-\infty; +\infty)$ – заданные функции.

Задачи сопряжения изучались, например, в [3–6]. В [1] авторы сравнивают некоторые граничные условия, в том числе и акустические граничные условия. Гиперболические уравнения с акустическими граничными условиями впервые рассмотрены в работе [2] и изучены в работах различных авторов [7–11].

В этой работе доказывается теорема о существовании и единственности локальных решений задачи (1)–(8).

Введем следующие обозначения.

Скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega_i)$ $(i = 1,2)$ и $L^2(\Gamma_2)$ обозначаются, соответственно, как

$$(u,v)_i = \int_{\Omega_i} u(x)v(x)\,dx, \|u\|_i = \left(\int_{\Omega_i}\left(u(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}, i = 1,2,$$

$$(\delta,\theta)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \delta(x)\theta(x)\,d\Gamma_2, \|\delta\|_{\Gamma_2} = \left(\int_{\Gamma_2}\left(\delta(x)\right)^2 d\Gamma_2\right)^{1/2}.$$

Введем замкнутое подпространство $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ пространства $H^1(\Omega_1)$, как

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) = \{u \in H^1(\Omega_1): \gamma_0(u) = 0 \text{п. в. на} \Gamma_1\},$$

где $\gamma_0: H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ – оператор следа нулевого порядка и $H^{1/2}(\Gamma)$ есть пространство Соболева порядка $\frac{1}{2}$ [12]. Заметим, что норма в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

и норма в $H^1(\Omega_1)$ эквивалентны, так как неравенство Пуанкаре удовлетворяется в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$. Таким образом, рассматриваем $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ с вышеуказанной нормой.

Отображение $\gamma_1: H(\Delta,\Omega_1) \cup H(\Delta,\Omega_2) \to H^{-1/2}(\Gamma_2)$ – оператор следа Неймана на $H(\Delta,\Omega_1) \cup H(\Delta,\Omega_2)$, где пространства

$$H(\Delta,\Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i): \Delta u \in L^2(\Omega_i)\}, i = 1,2$$

снабжены нормами

$$\|u\|_{\Delta,\Omega_i} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)} + \|\Delta u\|^2_i\right)^{\frac{1}{2}}, i = 1,2.$$

Определение 1. Тройку функций $\left(u(x,t), v(x,t), \delta(x,t)\right)$, где

$$u: \Omega_1 \times [0,T] \to R, v: \Omega_2 \times [0,T] \to R, \delta: \Gamma_2 \times [0,T] \to R,$$

назовем слабым решением задачи (1)–(8), если

$$u \in L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right), v \in L^\infty\left(0,T; H^1(\Omega_2)\right), \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{ п. в. на } \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$u_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega_1)\right), v_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega_2)\right),$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Gamma_2)\right)$$

и выполнены следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}(u_t,\Phi)_1 + (\nabla u_t, \nabla\Phi)_1 + (\nabla u, \nabla\Phi)_1 +$$
$$+\frac{d}{dt}(v_t,\Psi)_2 + (\nabla v_t, \nabla\Psi)_2 + (\nabla v, \nabla\Psi)_2 +$$
$$+\left(\rho\left(\gamma_0(u_t)\right), \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} - \left(\delta_t, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} = (f_1(u),\Phi)_1 + (f_2(v),\Psi)_2$$

для $\forall\Phi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $\forall\Psi \in H^1(\Omega_2)$ таких, что $\Phi = \Psi$ на Γ_2, в смысле распределений в $D'(0,T)$ и $\frac{d}{dt}(\gamma_0(u) + M\delta_t, e)_{\Gamma_2} + (D\delta_t + K\delta, e)_{\Gamma_2} = 0$

для $\forall e \in L^2(\Gamma_2)$, в смысле распределений в $D'(0,T)$, а также:

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_1,$$
$$v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_2,$$
$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \delta_t(x,0) = \delta_1(x) \text{ п. в. на } \Gamma_2.$$

Теорема 1. Пусть

$$M, D, K \in C(\Gamma_2), M > 0, D > 0, K > 0 \text{ для } \forall x \in \Gamma_2; \tag{9}$$

$f_1, f_2 \in C^1(-\infty;+\infty)$и существуют постоянные $c_i > 0 (i = 1,2,3,4)$ такие, что

$$|f_1(s)| \le c_1|s|^p, \left|f_1'(s)\right| \le c_2|s|^{p-1}, |f_2(s)| \le c_3|s|^p, \left|f_2'(s)\right| \le c_4|s|^{p-1}; \tag{10}$$

$$1 \le p \le \frac{n}{n-2}, \text{ если } n \ge 3 \text{ и } p \ge 1, \text{ если } n = 1,2; \tag{11}$$

$$1 \le q \le \frac{n+2}{n-2}, \text{ если } n \ge 3, q \ge 1, \text{ если } n = 1,2; \tag{12}$$

$$\rho \in C^1(-\infty;+\infty), |\rho(s)| \le c_5|s|^q \ (c_5 > 0); \tag{13}$$

$\rho(s)^-$монотонно возрастающая функция на $(-\infty;+\infty)$. (14)

Тогда для $\forall(u_0, v_0, \delta_0) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $\forall(u_1, v_1, \delta_1) \in L^{2q}(\Omega_1) \times\times L^2(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$ существует число $T > 0$ такое, что задача (1)–(8) имеет единственное слабое решение (u, v, δ), удовлетворяющее условиям

$$u \in C\left([0,T]; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right), u_t \in C\left([0,T]; L^2(\Omega_1)\right),$$

$$v \in C\big([0,T]; H^1(\Omega_2)\big), v_t \in C\big([0,T]; L^2(\Omega_2)\big),$$
$$\delta, \delta_t \in L^\infty\big(0,T; L^2(\Gamma_2)\big);$$

кроме того, если T_{max} – длина максимального интервала существования решения (u, v, δ), то справедлива следующая альтернатива:

либо T_{max};

либо $\lim\limits_{t \to T_{max}} \left(\|u_t\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta\|_{\Gamma_2}^2 \right)$.

Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U = F_1 \text{ в } \Omega_1 \times (0,T), \tag{15}$$
$$V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V = F_2 \text{ в } \Omega_2 \times (0,T), \tag{16}$$
$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \text{ на } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{17}$$
$$U = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{18}$$
$$U = V, \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \rho(U_t) \text{ на } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{19}$$
$$U(x,0) = u_0(x), U_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \tag{20}$$
$$V(x,0) = v_0(x), V_t(x,0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \tag{21}$$
$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \delta_t(x,0) = \delta_1(x), x \in \Gamma_2, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{T > 0}$; $F_1 = F_1(x,t)$ и $F_2 = F_2(x,t)$ – некоторые фиксированные функции, определенные на $\Omega_1 \times (0,T)$ и $\Omega_2 \times (0,T)$, соответственно.

Чтобы доказать теорему 1, нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (9), (12)–(14) и

$$F_1 \in H^1\big(0,T; L^2(\Omega_1)\big), F_2 \in H^1\big(0,T; L^2(\Omega_2)\big), \tag{23}$$
$$u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1), u_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^{2q}(\Omega_1), \tag{24}$$
$$v_0 \in H^2(\Omega_2), v_1 \in H^2(\Omega_2), \tag{25}$$
$$\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2). \tag{26}$$

Тогда задача (15)–(22) имеет единственное слабое решение (U, V, δ), удовлетворяющее условиям

$$U \in L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right), U_t \in L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right), U_{tt} \in L^\infty\big(0,T; L^2(\Omega_1)\big), \tag{27}$$
$$V \in L^\infty\big(0,T; H^1(\Omega_2)\big), V_t \in L^\infty\big(0,T; H^1(\Omega_2)\big), V_{tt} \in L^\infty\big(0,T; L^2(\Omega_2)\big), \tag{28}$$
$$-\Delta U(t) \in L^2(\Omega_1), -\Delta V(t) \in L^2(\Omega_2) \text{ п. в. на } (0,T), \tag{29}$$
$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty\big(0,T; L^2(\Gamma_2)\big). \tag{30}$$

Доказательство леммы 1. *Аппроксимации Фаэдо – Галеркина.* Пусть $\{(\Phi_j, \Psi_j)\}$ и $\{e_j\}$ $\left(j \in N\right)$ линейно независимые, полные системы в пространствах

$$W = \left\{(u,v) \in \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)\right) \times H^2(\Omega_2), \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{п.в. на} \Gamma_2\right\} \text{ и } L^2(\Gamma_2),$$

соответственно. Так как Γ_1 и Γ_2 являются достаточно гладкими, то $\Phi_j \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ и $\Psi_j \in H^2(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ для любого $j \in N$. Будем искать «приближенное» решение рассматриваемой задачи в виде

$$\big(U_m(x, \rightleftarrows t), V_m(x, \rightleftarrows t)\big) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t)\,(\Phi_i, \Psi_i), \delta_m(x, \rightleftarrows t) = \sum_{i=1}^m \beta_{im}(t)\, e_i,\ m \in N,$$

где $\alpha_{im}(t)$ и $\beta_{im}(t)$ определяются из равенств:

$$\big(U_{m_{tt}}, \Phi_j\big)_1 + \big(\nabla U_{mt}, \nabla \Phi_j\big)_1 + \big(\nabla U_m, \nabla \Phi_j\big)_1 +$$
$$+\big(V_{m_{tt}}, \Psi_j\big)_2 + \big(\nabla V_{mt}, \nabla \Psi_j\big)_2 + \big(\nabla V_m, \nabla \Psi_j\big)_2 -$$
$$-\Big(\delta_{m_t}, \gamma_0\big(\Phi_j\big)\Big)_{\Gamma_2} + \Big(\rho(U_{mt}), \gamma_0\big(\Phi_j\big)\Big)_{\Gamma_2} = \big(F_1, \Phi_j\big)_1 + \big(F_2, \Psi_j\big)_2, \tag{31}$$
$$\Big(M\delta_{mtt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e_j\Big)_{\Gamma_2} = -\Big(\gamma_0\big(U_{mt}\big), e_j\Big)_{\Gamma_2},\ 1 \le j \le m\ , \tag{32}$$
$$\delta_{m_t} = \frac{\partial U_m}{\partial \nu} - \frac{\partial V_m}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{m_t}}{\partial \nu} - \frac{\partial V_{m_t}}{\partial \nu} + \rho\big(U_{m_t}\big), x \in \Gamma_2, \tag{33}$$
$$\big(U_m(x, \rightleftarrows 0), V_m(x,0)\big) = (U_{0m}, V_{0m}) = \sum_{i=1}^m a_{im}\,(\Phi_i, \Psi_i) \to (u_0, v_0) \text{ в } W, \tag{34}$$
$$\big(U_{mt}(x,0), V_{mt}(x,0)\big) = (U_{1m}, V_{1m}) = \sum_{i=1}^m b_{im}\,(\Phi_i, \Psi_i) \to$$
$$\to (u_1, v_1) в \left(H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap L^{2q}(\Omega_1)\right) \times H^1(\Omega_2), \tag{35}$$
$$\delta_m(x, \rightleftarrows 0) = \delta_{0m} = \sum_{i=1}^m c_{im}\, e_i \to \delta_0 \text{ в } L^2(\Gamma_2), \tag{36}$$
$$\delta_{mt}(x,0) = \gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) +$$
$$+\gamma_0\big(\rho(U_{1m})\big) = \sum_{i=1}^m d_{im}\, e_i \to \delta_1 \text{ в } L^2(\Gamma_2) \tag{37}$$

при $m \to \infty$. Задача (31)–(37) имеет решение (U_m, V_m, δ_m) $(m \in N)$ на интервале $[0, T_m]$ (оценка 1 показывает, что $T_m = T$). Из (31), (32) имеем

$$\begin{gathered}(U_{m_{tt}}, \Phi)_1 + (\nabla U_{m_t}, \nabla\Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla\Phi)_1 + \\ +(V_{m_{tt}}, \Psi)_2 + (\nabla V_{m_t}, \nabla\Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla\Psi)_2 - (\delta_{m_t}, \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} + \\ +(\rho(U_{mt}), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2, \end{gathered} \tag{38}$$

$$(M\delta_{m_{tt}} + D\delta_{m_t} + K\delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{m_t}), e)_{\Gamma_2}, \tag{39}$$

для $\forall\Phi \in Span\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m, ...\}$, $\forall\Psi \in Span\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_m, ...\}$, $\forall e \in Span\{e_1, e_2, ..., e_m, ...\}$.

Оценка 1. Полагая $\Phi = 2U_{m_t}$, $\Psi = 2V_{m_t}$ в (38) и $e = 2\delta_{m_t}$ в (39), получаем равенства

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\|U_{m_t}\|_1^2 + 2\|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla U_m\|_1^2 + \\ +\frac{d}{dt}\|V_{m_t}\|_2^2 + 2\|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla V_m\|_2^2 - (\delta_{m_t}, \gamma_0(2U_{m_t}))_{\Gamma_2} + \\ +2(\rho(U_{mt}), \gamma_0(U_{m_t}))_{\Gamma_2} = 2(F_1, U_{m_t})_1 + 2(F_2, V_{m_t})_2, \end{gathered}$$

$$\tfrac{d}{dt}\left\|\sqrt{M}\delta_{m_t}\right\|_{\Gamma_2}^2 + 2\left\|\sqrt{D}\delta_{m_t}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \tfrac{d}{dt}\left\|\sqrt{K}\delta_m\right\|_{\Gamma_2}^2 + (\gamma_0(U_{m_t}), 2\delta_{m_t})_{\Gamma_2} = 0,$$

складывая которых и используя (33), имеем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\|U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{m_t}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \\ +2\|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + 2(\rho(U_{mt}), U_{m_t})_{\Gamma_2} + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 = 2(F_1, U_{m_t})_1 + 2(F_2, V_{m_t})_2. \end{gathered}$$

Или так как в силу (14): $\rho(s)s \geq 0, \forall s \in (-\infty, +\infty)$, получаем

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\left(\|U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{m_t}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \\ +2\|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 = 2(F_1, U_{m_t})_1 + 2(F_2, V_{m_t})_2. \end{gathered} \tag{40}$$

Интегрируя равенство (40) от 0 до t $(t \leq T_m)$, используя (34)–(37) и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{gathered}\|U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{m_t}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ +2\int_0^t \left(\|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2\right) ds \leq \\ \leq \|U_{1m}\|_1^2 + \|\nabla U_{0m}\|_1^2 + \|V_{1m}\|_2^2 + \|\nabla V_{0m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\|_{\Gamma_2}^2 + \\ +\|\sqrt{K}\delta_{0m}\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|F_1\|_1^2 ds + \int_0^t \|F_2\|_2^2 ds + \int_0^t \left(\|U_{m_t}\|_1^2 + \|V_{m_t}\|_2^2\right) ds, \end{gathered}$$

откуда, согласно (9), (12), (23)–(26) и неравенству Гронуолла, получаем Оценку 1:

$$\begin{gathered}\|U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{m_t}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2} + \|\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ +\int_0^t \left(\|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2\right) d\tau \leq C_1, \end{gathered}$$

где C_1 – положительная константа, не зависящая от m. Отсюда следует, что $T_m = T$.

Оценка 2. Оценим нормы $\|U_{m_{tt}}(0)\|_1^2$, $\|V_{m_{tt}}(0)\|_2^2$ и $\|\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2$. Используя (33) в (38) имеем

$$\begin{gathered}(U_{m_{tt}}, \Phi)_1 + (\nabla U_{m_t}, \nabla\Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_{m_t}}{\partial\nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial U_m}{\partial\nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + \\ +(V_{m_{tt}}, \Psi)_2 + (\nabla V_{m_t}, \nabla\Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_{m_t}}{\partial\nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + \\ +\left(\tfrac{\partial V_m}{\partial\nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2. \end{gathered} \tag{41}$$

Полагая $\Phi = U_{mtt}$ и $\Psi = V_{mtt}$ в (41), $e = \delta_{mtt}$ в (39) и $t = 0$ в полученных равенствах, получаем

$$\|U_{m_{tt}}(0)\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}(0)\|_2^2 = \left(\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} + F_1(x,0), U_{m_{tt}}(0)\right)_1 +$$
$$+\left(\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} + F_2(x,0), V_{m_{tt}}(0)\right)_2 \le (\|\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} + F_1(x,0)\|_1 +$$
$$+\|\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} + F_2(x,0)\|_2)\left(\|U_{m_{tt}}(0)\|_1 + \|V_{m_{tt}}(0)\|_2\right),$$
$$\|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2 = \left(-D\left(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\right) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}), \delta_{m_{tt}}(0)\right)_{\Gamma_2} \le$$
$$\le \left\|-D\left(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\right) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m})\right\|_{\Gamma_2} \|\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2},$$

откуда, согласно (9), (12), (13), (23)–(26), имеем

$$\|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 + \|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \le C_2, \tag{42}$$

где C_2 – положительная константа, не зависящая от m.

Дифференцируя равенства (38), (39) и полагая $\Phi = 2U_{mtt}$, $\Psi = 2V_{mtt}$, $e = 2\delta_{mtt}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2\right) +$$
$$+2\|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \left(\rho'(U_{m_t})U_{m_{tt}}, \gamma_0(2U_{m_{tt}})\right)_{\Gamma_2} +$$
$$= 2\left(F_{1t}, U_{m_{tt}}\right)_1 + 2\left(F_{2t}, V_{m_{tt}}\right)_2. \tag{43}$$

Используя неравенство Юнга в (43), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2\right) +$$
$$+2\|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \left(\rho'(U_{m_t})U_{m_{tt}}, \gamma_0(2U_{m_{tt}})\right)_{\Gamma_2} +$$
$$\le \|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2 + \|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2.$$

Интегрируя последнее неравенство вдоль $(0,t)$ и используя тот факт, что в силу (13): $\rho'(s) \ge 0, \forall s \in (-\infty, +\infty)$, имеем

$$\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+2\int_0^t \left(\|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2\right) ds \le$$
$$\le \|U_{m_{tt}}(0)\|_1^2 + \|\nabla U_{1m}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}(0)\|_2^2 + \|\nabla V_{1m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+\left\|\sqrt{K}\left(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\right)\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+\int_0^t (\|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2) ds + \int_0^t \left(\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2\right) ds,$$

откуда, используя (23)–(26) и (42), согласно неравенству Гронуолла получаем Оценку 2:

$$\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_t}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+2\int_0^t \left(\|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2\right) ds \le C_3,$$

где C_3 – положительная константа, не зависящая от m.

Доказательство существования решений завершается таким же образом, как в теореме 2.1 из [13].

Единственность. Пусть (U_1, V_1, δ_1) и (U_2, V_2, δ_2) – два решения задачи (15)–(22). Тогда для $U_1 - U_2 = \widetilde{U}$, $V_1 - V_2 = \widetilde{V}$, $\delta_1 - \delta_2 = \widetilde{\delta}$ имеем

$$(\widetilde{U}_{tt}, \Phi)_1 + (\nabla\widetilde{U}_t, \nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial\widetilde{U}_t}{\partial\nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla\widetilde{U}, \nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} +$$
$$+(\widetilde{V}_{tt}, \Psi)_2 + (\nabla\widetilde{V}_t, \nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial\widetilde{V}_t}{\partial\nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla\widetilde{V}, \nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} = 0,$$

или

$$\left(\widetilde{U}_{tt},\Phi\right)_1+\left(\nabla\widetilde{U}_t,\nabla\Phi\right)_1+\left(\nabla\widetilde{U},\nabla\Phi\right)_1+\left(\widetilde{V}_{tt},\Psi\right)_2+\left(\nabla\widetilde{V}_t,\nabla\Psi\right)_2+\left(\nabla\widetilde{V},\nabla\Psi\right)_2-$$
$$-\left(\tilde{\delta}_t+\rho(U_{1t})-\rho(U_{2t}),\gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2}=0, \tag{44}$$
$$\left(M\widetilde{\delta}_{tt}+D\widetilde{\delta}_t+K\widetilde{\delta},e\right)_{\Gamma_2}=-\left(\gamma_0\left(\widetilde{U}_t\right),e\right)_{\Gamma_2}, \tag{45}$$

для любого $(\Phi,\Psi,e)\in W$, п. в. на $(0,T)$;

$$\widetilde{U}=0 \text{ п. в. в } \Gamma_1\times(0,T), \tag{46}$$
$$\widetilde{U}=\widetilde{V},\ \tilde{\delta}_t=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\nu}+\frac{\partial\tilde{U}_t}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde{V}_t}{\partial\nu}+\rho(U_{1t})-\rho(U_{2t}) \text{ п. в. в } \Gamma_2\times(0,T), \tag{47}$$
$$\widetilde{U}(x,0)=0,\quad \widetilde{U}_t(x,0)=0\qquad x\in\Omega_1, \tag{48}$$
$$\widetilde{V}(x,0)=0,\quad \widetilde{V}_t(x,0)=0\qquad x\in\Omega_2, \tag{49}$$
$$\widetilde{\delta}(x,0)=0,\quad \widetilde{\delta}_t(x,0)=0\qquad x\in\Gamma_2. \tag{50}$$

Полагая $\Phi=2\widetilde{U}_t$, $\Psi=2\widetilde{V}_t$ в (44) и $e=2\widetilde{\delta}_t$ в (45) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|\widetilde{U}_t\|_1^2+\|\nabla\widetilde{U}\|_1^2+\|\widetilde{V}_t\|_2^2+\|\nabla\widetilde{V}\|_2^2+\|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2+\|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2\right)+2\|\nabla\widetilde{U}_t\|_1^2+2\|\nabla\widetilde{V}_t\|_2^2+$$
$$+2\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2+2(\rho(U_{1t})-\rho(U_{2t}),U_{1t}-U_{1t})_{\Gamma_2}=0. \tag{51}$$

Так как в силу (13):

$$\left(\rho(U_{1t})-\rho(U_{2t}),U_{1t}-U_{2t}\right)_{\Gamma_2}\geq 0,$$

то из (51) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|\widetilde{U}_t\|_1^2+\|\nabla\widetilde{U}\|_1^2+\|\widetilde{V}_t\|_2^2+\|\nabla\widetilde{V}\|_2^2+\|\sqrt{M}\widetilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2+\|\sqrt{K}\widetilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2\right)\leq 0.$$

Используя (48)–(50) в последнем неравенстве, получаем

$$\|\widetilde{U}_t\|_1^2+\|\nabla\widetilde{U}\|_1^2+\|\widetilde{V}_t\|_2^2+\|\nabla\widetilde{V}\|_2^2+\|\sqrt{M}\widetilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2+\|\sqrt{K}\widetilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2\leq 0.$$

Отсюда имеем $\widetilde{U}=0,\ \widetilde{V}=0,\ \widetilde{\delta}=0$.

Лемма 1 доказана.

Для заданных $u\in C\left([0,T];H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)\right)\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega_1)\right)$, $\upsilon\in C\left([0,T];H^1(\Omega_2)\right)\cap$ $\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega_2)\right)$, которые удовлетворяют условию $u|_{\Gamma_2}=\upsilon|_{\Gamma_2}$, рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases}U_{tt}-\Delta U_t-\Delta U=f_1(u)в\Omega_1\times(0,T),\\ V_{tt}-\Delta V_t-\Delta V=f_2(\upsilon)в\Omega_2\times(0,T),\\ M\delta_{tt}+D\delta_t+K\delta=-U_t на\Gamma_2\times(0,T),\\ U=0 на\Gamma_1\times(0,T),\\ U=V,\delta_t=\frac{\partial U}{\partial\nu}-\frac{\partial V}{\partial\nu}+\frac{\partial U_t}{\partial\nu}-\frac{\partial V_t}{\partial\nu}+\rho(U_t) на\Gamma_2,\\ U(x,0)=u_0(x),U_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega_1,\\ V(x,0)=\upsilon_0(x),V_t(x,0)=\upsilon_1(x),x\in\Omega_2,\\ \delta(x,0)=\delta_0(x),\delta_t(x,0)=\delta_1(x),x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{52}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (9)–(13) и $u_0\in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $u_1\in L^{2q}(\Omega_1)$, $\upsilon_0\in H^1(\Omega_2)$, $\upsilon_1\in L^2(\Omega_2)$, $\delta_0\in L^2(\Gamma_2)$, $\delta_1\in L^2(\Gamma_2)$. Тогда существует число $T>0$ такое, что задача (52) имеет единственное слабое решение (U,V,δ), удовлетворяющее условиям

$$U\in C\left([0,T];H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)\right),U_t\in C\left([0,T];L^2(\Omega_1)\right),$$
$$V\in C\left([0,T];H^1(\Omega_2)\right),V_t\in C\left([0,T];L^2(\Omega_2)\right),$$
$$\delta,\delta_t\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_2)\right).$$

Доказательство леммы 2, а также завершение доказательства Теоремы 1 осуществляем таким же образом, как в теореме 2.1 из [13].

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М, 1971.
2. *Aliev A. B., Mammadhasanov E. H.* Well-posedness of initial boundary value problem on longitudind impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40. № 14. Pp. 5380–5390.
3. *Bae J. J.* Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type // Acta, Appl. Math. 2010. № 2. Pp. 907–919.
4. *Beale J. T.* Acoustic scattering from locally reacting surfaces // Indiana Univ. Math. 1977. J. 26. Pp. 199–222.
5. *Beale J. T., Rosencrans S. I.* Acoustic boundary conditions // Bull. Amer. : Math. Soc. 1974. № 6. Pp. 1276–1278.
6. *Boukhatem Y., Benabderrahmane B.* Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis. 2014. № 97. Pp. 191–209.
7. *Dautray R., Lions J. L.* Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques. Paris, 1984. Vol. 1.
8. *Frota C. L., Vicente A.* A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions // Int. J. Pure Appl. Math. 2008. № 2. Pp. 185–198.
9. *Gal C. G., Goldstein G. R., Goldstein J. A.* Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations // J. Evol. Equ. 2003. № 3 (4). Pp. 623–635.
10. *Isayeva S. E.* Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2021. V. 47. № 2. Pp. 232–249.
11. *Muñoz Rivera J. E., Portillo Oquendo H.* The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae. 2000. № 60. Pp. 1–21.
12. *Mugnolo D.* Abstract wave equations with acoustic boundary conditions // Math. Nachr., 279. 2006. № 3. Pp. 299–318.
13. *Vicente A.* Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // Bol. Soc. Parana. Mat. (3). 2009. № 27 (1). Pp. 29–39.

Highly dissipative wave equations with nonlinear acoustic coupling conditions

S. E. Isaeva

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Baku State University.
Azerbaijan, Baku. ORCID: 0000-0002-0872-1350. E-mail: isayevasevda@rambler.ru

Abstract. Coupling problems arise in some applications of physics and biology. For example, mixed problems with acoustic coupling conditions concern problems with two wave equations that simulate transverse acoustic vibrations of a membrane consisting of two different materials X and Y. Conjugation problems for linear hyperbolic equations are well studied, where the uniqueness and regularity of solutions for the problem under consideration are proved. The conjugation problem for viscoelastic waves is also studied and the existence, uniqueness and exponential decrease of solutions for such a problem are proved. In this paper, we consider an initial boundary value problem for nonlinear highly dissipative wave equations with nonlinear acoustic coupling conditions. The theorem on the local existence and uniqueness of weak solutions for the problem under consideration is proved. In the proof of the theorem, Faedo-Galerkin approximations, embedding theorems, and the fixed point theorem are used.

Keywords: nonlinear wave equation, local solution, weak solution, acoustic conditions, conjugation conditions, embedding theorems, fixed point theorem.

References

1. *Lyons J. L., Majenes E. Neodnorodnye granichnye zadachi i ih prilozheniya* [Inhomogeneous boundary value problems and their applications]. M. 1971.
2. *Aliev A. B., Mammadhasanov E. H.* Well-posedness of initial boundary value problem on longitudind impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40. No. 14. Pp. 5380–5390.
3. *Bae J. J.* Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type // Acta, Appl. Math. 2010. No. 2. Pp. 907–919.
4. *Beale J. T.* Acoustic scattering from locally reacting surfaces // Indiana Univ. Math. 1977. J. 26. Pp. 199–222.
5. *Beale J. T., Rosencrans S. I.* Acoustic boundary conditions // Bull. Amer. : Math. Soc. 1974. No. 6. Pp. 1276–1278.
6. *Boukhatem Y., Benabderrahmane B.* Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis. 2014. No. 97. Pp. 191–209.
7. *Dautray R., Lions J. L.* Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques. Paris, 1984. Vol. 1.
8. *Frota C. L., Vicente A.* A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions // Int. J. Pure Appl. Math. 2008. No. 2. Pp. 185–198.
9. *Gal C. G., Goldstein G. R., Goldstein J. A.* Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations // J. Evol. Equ. 2003. No. 3 (4). Pp. 623–635.

10. *Isayeva S. E.* Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2021. V. 47. No. 2. Pp. 232–249.

11. *Muñoz Rivera J. E., Portillo Oquendo H.* The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae. 2000. No. 60. Pp. 1–21.

12. *Mugnolo D.* Abstract wave equations with acoustic boundary conditions // Math. Nachr., 279. 2006. No. 3. Pp. 299–318.

13. *Vicente A.* Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // Bol. Soc. Parana. Mat. (3). 2009. No. 27 (1). Pp. 29–39.