УДК 514.1 DOI 10.25730/VSU.0536.22.021

О применении общих методов для решения стереометрических задач

И. В. Блудова
кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Университетская гимназия (школа-интернат) МГУ им. М. В. Ломоносова.
Россия, г. Москва. E-mail: irina.bludova@school.msu.ru

Аннотация. Для решения стереометрических задач удобно строить так называемый «нормальный треугольник». Эта простая конструкция дает общие методы решения задач и очень удобна с методической точки зрения, особенно на этапе формирования пространственных представлений учащихся. В статье даны определение нормального треугольника, план его построения и рассмотрено применение метода нормального треугольника для решения задач. Термин «нормальный треугольник» впервые применила Н. Г. Окромешко. Несмотря на то, что данная конструкция не претендует на рассмотрение всех классических приемов решения задач, она оказалась очень удобной и для обучающихся, и для учителей. Классические методы не только позволяют решать стереометрические задачи, но и являются содержательной основой векторных методов.

Ключевые слова: нормальный треугольник, классические методы решения стереометрических задач.

Для решения стереометрических задач, связанных с вычислением:

- угла между плоскостями;
- площадей сечений многогранников;
- расстояния от точки до плоскости;
- расстояния между скрещивающимися прямыми;

а также в задачах, связанных с построением:

- ортогональной проекции точки на плоскость;
- общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым;
- перпендикулярных сечений многогранников (через данную точку перпендикулярно заданной прямой и через данную прямую перпендикулярно заданной плоскости)

удобно применять конструкцию, основой которой служит метод построения нормального к двум неортогональным пересекающимся плоскостям треугольника. Эта конструкция, конечно, не является единственным приемом для решения перечисленных выше задач, но дает общие методы решения и достаточно простая, чтобы быть доступной обычному школьнику, знающему геометрию в пределах обязательного школьного курса. Разумеется, что в ряде случаев для решения названных задач наиболее оптимально применение векторных методов. По существу, уровень овладения предметом определяется способностью в каждом конкретном случае найти простейший способ решения задачи, а для этого необходимо знать и уметь применять на практике различные методы.

Сформулируем свойства нормального треугольника и дадим план его построения.

Нормальным треугольником к двум неортогональным пересекающимся плоскостям называется треугольник, который лежит в плоскости, перпендикулярной заданным плоскостям. При этом один из его катетов является нормалью к одной из плоскостей, а высота, опущенная на гипотенузу, является нормалью к другой плоскости. Гипотенуза и второй катет образуют линейный угол двугранного угла между данными плоскостями. Для построения нормального треугольника для пересекающихся неортогональных плоскостей α и β можно воспользоваться следующим планом:

1. Строим линию пересечения плоскостей α и β, $l = \alpha \cap \beta$ (рис. 1).

2. В одной из данных плоскостей, например в плоскости α, выбираем «удобную» точку M и опускаем из нее перпендикуляр на вторую плоскость; $M \in \alpha, MM' \perp \beta, M' \in \beta$ (рис. 2).

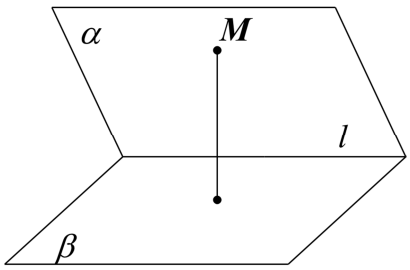

Рис. 1. Линия пересечения

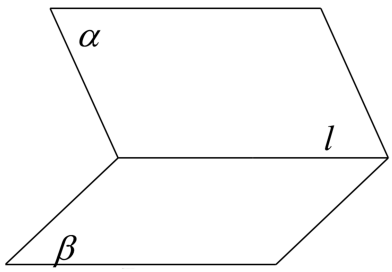

Рис. 2. Перпендикуляр к β

© Блудова И. В., 2022

3. Из точки M' в плоскости β опускаем перпендикуляр на линию пересечения плоскостей (рис. 3): $M'K \perp l, K \in l$.

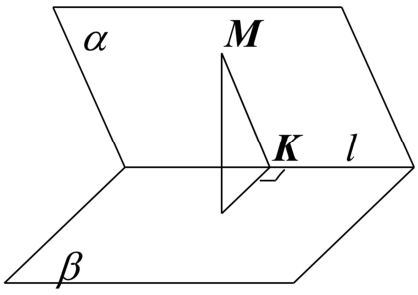

Рис. 3. Построение

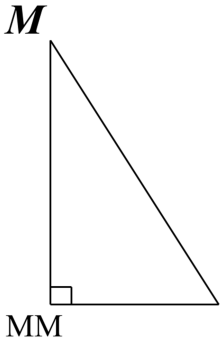

Рис. 4. Выносной чертеж

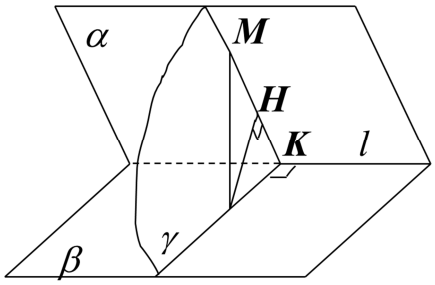

Рис. 5. Плоскость γ

4. Соединяем точки M и K. Получаем прямоугольный треугольник $MM'K$ с прямым углом M (рис. 4).

Легко доказать, что построенный таким образом треугольник $MM'K$ является нормальным треугольником для плоскостей α и β.

Заметим, что если решается задача не на построение, а на вычисление, то изображение точки K (см. п. 3) и точки H – основания высоты, опущенной на гипотенузу, осуществляется не по правилам параллельного проектирования, здесь допустим схематический рисунок. Если же решается задача на построение, то положение точек K и H нужно выяснить точно с помощью вычислений, а затем построить эти точки.

Если при решении конкретной задачи одной из плоскостей α и β является основание многогранника (призмы или пирамиды), то именно эту плоскость удобно принять в качестве плоскости β, поскольку в этом случае ортогональное проектирование на плоскость β параллельно высоте многогранника.

После того как нормальный треугольник построен, начинается расчетная часть задачи.

Заметим еще, что для двух пересекающихся неортогональных плоскостей α и β можно построить бесконечно много нормальных треугольников, но все они имеют параллельные соответственные стороны, поэтому все они **подобны**! А в связи с этим, если задача сводится к построению перпендикуляра из данной точки (M') на плоскость (α) или только к вычислению длины этого перпендикуляра, то необязательно строить нормальный треугольник, у которого вершиной прямого угла является именно эта точка (M'). Можно построить и произвести все расчеты для треугольника $M_1M_1'K'$, у которого вершиной прямого угла является другая «удобная» точка M_1'. Затем придется вычислить коэффициент подобия k «удобного» и «желаемого» треугольников и вычислить $M'H = \rho(M', \alpha)$ по формуле:

$$M'H = k \cdot M_1'H'.$$

Все названные выше задачи в большинстве случаев сводятся к построению нормальных треугольников и вычислению их элементов:

– угла, если требуется найти угол между плоскостями;

– высоты, опущенной на гипотенузу, если требуется вычислить расстояние от точки до плоскости;

– отношения, в котором основание данной высоты делит гипотенузу, если строится ортогональная проекция этой точки на плоскость.

Продемонстрируем применение нормальных треугольников для решения некоторых задач.

Задача 1.

Основанием треугольной пирамиды $TABC$ является прямоугольный треугольник ABC, в котором величина угла A равна 60°, а длина гипотенузы AB равна a. Высота пирамиды совпадает с ребром TA. Угол между прямыми TB и CB равен 45°. Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD основания и пересекающей боковое ребро TC.

Решение.

Нам надо из бесконечного множества треугольников с общим основанием AD и вершиной N, лежащей на ребре TC, выбрать треугольник с наименьшей площадью (рис. 6). Точнее, нужно вычислить его площадь.

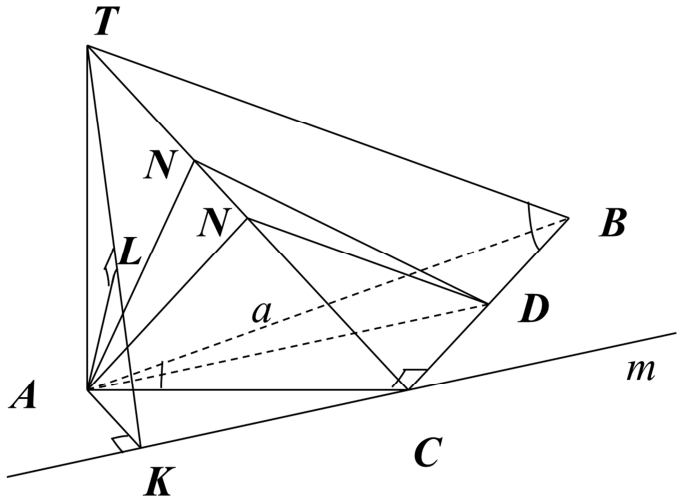

Рис. 6. Задача 1

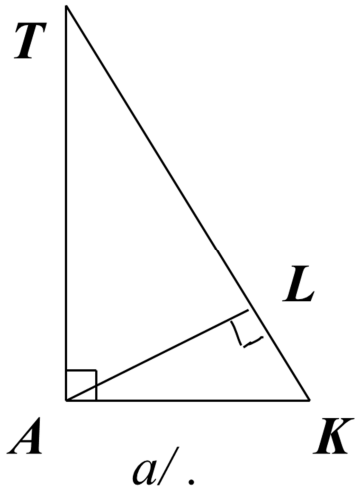

Рис. 7. Нормальный треугольник

Пусть S – площадь треугольника ADN, тогда $S = \frac{1}{2}AD \cdot NH$, где NH – высота, опущенная из вершины N на основание AD. Мы видим, что площадь будет наименьшей у треугольника с наименьшей высотой NH.

Очевидно, что если отрезок NH будет перпендикулярен не только AD, но и TC, т. е. будет общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AD и TC, то его длина будет наименьшей. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми, т. е.

$NH_{\text{НАИМ}} = \rho(AD, TC)$. Вычислим это расстояние. Известно, что $\rho(AD, TC) = \rho(A, \alpha)$, здесь α есть плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые TC и m, где $m||AD$ и $A \in m$.

Обозначим через β плоскость нижнего основания ABC пирамиды. Так как $A \in \beta$ и $TA \perp \beta$, то $\rho(A, \alpha)$ есть длина высоты, опущенной из вершины прямого угла A на гипотенузу нормального треугольника для плоскостей α и β. Построим нормальный треугольник для α и β (рис. 6).

1. $\alpha \cap \beta = m$.
2. $T \in \alpha$.
3. $TA \perp \beta$.
4. $AK \perp m$.
5. Треугольник TAK – нормальный для α и β.

Пусть $AL \perp TK$, тогда $AL = \rho(A, \alpha) = \rho(AD, TC) = NH_{НАИМ}$. Вычислим AL, для этого сначала надо будет вычислить катеты AK и TA треугольника TAK (рис. 7).

Так как $\angle ABC = 30°$, то $AC = \frac{a}{2}$. Так как AD – биссектриса угла A (рис. 8), то $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, т. е. $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$.

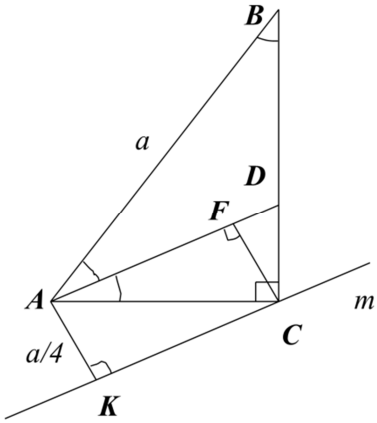

Рис. 8. Планиметрический фрагмент

Далее, $CF \perp AD$, $AK = CF = \frac{a}{4}$.

В треугольнике ADC имеем:

$$DC = AC \cdot tg30° = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда $AD = 2DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Треугольник TCB – прямоугольный и равнобедренный (так как по теореме о трех перпендикулярах из того, что $AC = np_\beta TC$, а $BC \perp AC$, следует, что $BC \perp TC$. Кроме того, по условию $\angle TBC = 45°$). Отсюда получаем:

$$TC = BC = 3 \cdot DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим треугольник TAC. В нем $AT^2 = TC^2 - AC^2 = \frac{a^2}{2}$. Следовательно, $AT = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Теперь, когда катеты нормального треугольника TAK известны, вычислим его высоту AL.

Так как $AL \cdot TK = AK \cdot AT$, то $AL = \frac{AK \cdot AT}{\sqrt{AK^2 + AT^2}} = \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Теперь осталось вычислить

$$S_{НАИМ} = \frac{1}{2} AD \cdot AL = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^2}{6\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{6\sqrt{6}}$.

Задача 2.

Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, походящей через медиану AM боковой грани ASB и параллельной высоте ST боковой грани ASC, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{3}$, а расстояние от центра основания пирамиды до секущей плоскости равно $\sqrt{\frac{1}{32}}$.

Решение.

Построим сечение пирамиды плоскостью α, такой, что $AM \subset \alpha$, $ST || \alpha$. Для этого в плоскости STB проведем прямую MK такую, что $MK || ST$, $K \in TB$. Плоскость α проходит через пересекающиеся прямые AM и MK. Прямые AK и BC пересекаются в точке F. Треугольник AFM – искомое сечение (рис. 10).

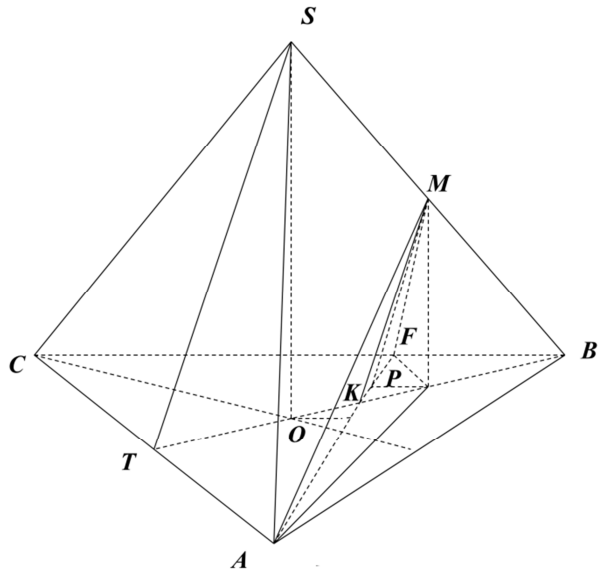

Рис. 9. Задача 2

Для вычисления площади сечения воспользуемся формулой:

$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\phi}$, где ϕ есть угол между секущей плоскостью α и плоскостью β нижнего основания пирамиды.

Треугольник AM_1F, где $M_1 = пр_\beta M$, является ортогональной проекцией треугольника AMF на плоскость β.

Построим «удобный» нормальный треугольник для плоскостей α и β.

1) $\alpha \cap \beta = AF$.

2) $M \in \alpha$.

3) $MM_1 \perp \beta$.

4) $M_1P \perp AF$.

5) ΔMM_1P – нормальный для α и β (рис. 11).

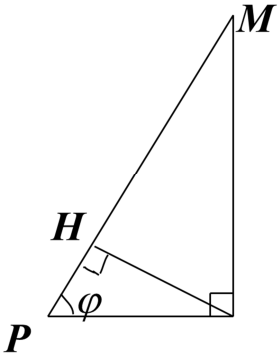

Рис. 10. Нормальный треугольник

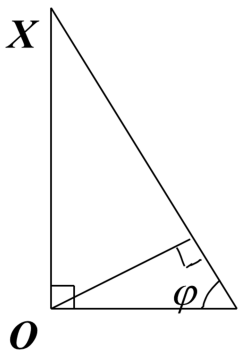

Рис. 11. Неудобный треугольник

По свойству нормального треугольника имеем: $\angle MPM_1 = \phi = \angle(\alpha;\beta)$.

Высота M_1H равна расстоянию $\rho(M_1;\alpha)$ от точки M_1 до плоскости α, а в условии известно расстояние $\rho(O;\alpha)$ от центра основания пирамиды O до плоскости α.

Нормальный треугольник для плоскостей α и β с вершиной прямого угла в точке O строить неудобно, но мы знаем, что такой треугольник XOP_1 (рис. 12) существует и он подобен треугольнику MM_1P.

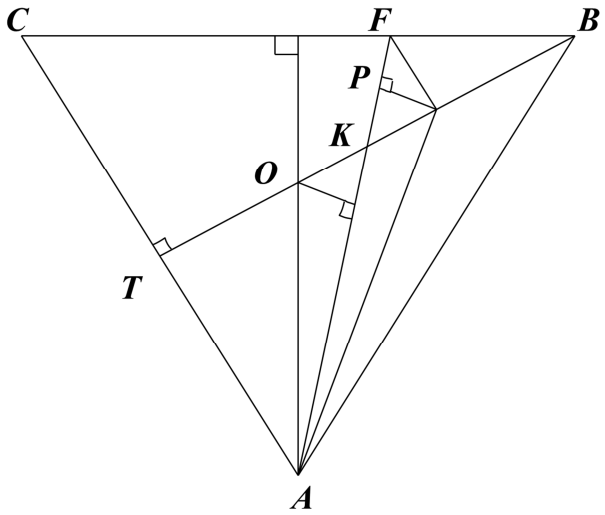

Рис. 12. Нижнее основание

Вычислим коэффициент подобия этих треугольников:

$$k = \frac{OP_1}{M_1P}.$$

Для этого сделаем выносной чертеж нижнего основания (рис. 13). Так как отрезок MK есть средняя линия треугольника TSB, то K – середина TB. Точка M_1 – середина отрезка OB (т. к. MM_1 есть средняя линия треугольника SOB). Таким образом, $TO = OM_1 = M_1B$ и, следовательно, $OK = KM_1$. Мы получили, что прямоугольные треугольники OP_1K и M_1PK равны, поэтому $OP_1 = M_1P$. Следовательно, нормальные треугольники MM_1P и XOP_1 также равны и $M_1H = \sqrt{\frac{1}{32}}$. Теперь для вычисления $cos\,\phi$ достаточно вычислить, например, катет PM_1 нормального треугольника MM_1P.

Это будет нетрудно сделать после того, как будет известна площадь проекции, т. е. площадь треугольника AFM_1. Заметим, что $S_{np} = S_{\Delta AFM_1} = S_{\Delta AFB} - S_{\Delta FBM_1} - S_{\Delta M_1BA}$.

Чтобы воспользоваться этим фактом, выясним, в каком отношении точка F делит отрезок QB, где Q – середина BC. Применим теорему Менелая для ΔQBO и прямой AK. Прямая AK пересекает стороны QB и BO треугольника ΔQBO соответственно в точках F и K и пересекает продолжение стороны QO в точке A.

Поэтому $\frac{QF}{FB}\cdot\frac{BK}{KO}\cdot\frac{OA}{AQ} = 1$. Так как $\frac{BK}{KO} = \frac{3}{1}$, а $\frac{OA}{AQ} = \frac{2}{3}$, то $\frac{QF}{FB}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{3} = 1$. Отсюда имеем: $\frac{QF}{FB} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $FB = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta FBA} = \frac{1}{2}FB\cdot AQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, так как

$$AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

$$S_{\Delta FBM_1} = \frac{1}{2}\cdot FB\cdot BM_1\,sin\,FBM_1 = \frac{1}{2}\cdot FB\cdot BM_1\,sin\,30^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8\sqrt{3}}.$$

$$S_{\Delta BM_1A} = \frac{1}{2}BM_1\cdot BA\cdot sin\,30^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Тогда $S_{\Delta AFM_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$, т. е. $S_{np} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Вычислим теперь AF из треугольника AFB по теореме косинусов, получим: $AF = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Из равенства $S_{\Delta AFM_1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AF\cdot PM_1$ вычислим PM_1. Получим: $PM_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Рассмотрим снова нормальный треугольник MM_1P. По теореме Пифагора

$$PH = \sqrt{{PM_1}^2 - M_1H^2} = \frac{1}{4\sqrt{14}}.$$

Осталось вычислить $cos\ \phi$ и площадь сечения.

$$cos\ \phi = \frac{PH}{PM_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{cos\ \phi} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}\left(ед^2\right)$.

Список литературы

1. Геометрия 10 класса в вопросах и задачах / Блудова И. В., Бугрова М. И., Граськин С. С., Гутнер М. Е. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007.

2. Ортогональное проектирование / Окромешко Н. Г., Дегтярёва И. Г., Родников А. В., Подпорина О. А. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.

On the application of general methods for solving stereometric problems

I. V. Bludova

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University,
University Gymnasium (boarding school) Lomonosov Moscow State University.
Russia, Moscow. E-mail: irina.bludova@school.msu.ru

Abstract. To solve stereometric problems, it is convenient to build a so-called "normal triangle". This simple construction provides general methods for solving problems and is very convenient from a methodological point of view, especially at the stage of forming spatial representations of students. The article gives the definition of a normal triangle, a plan for its construction and considers the application of the normal triangle method to solve problems. The term "normal triangle" was first used by N. G. Okromeshko. Despite the fact that this design does not pretend to consider all the classical methods of solving problems, it turned out to be very convenient for both students and teachers. Classical methods not only allow us to solve stereometric problems, but also are the substantial basis of vector methods.

Keywords: normal triangle, classical methods for solving stereometric problems.

References

1. *Geometriya 10 klassa v voprosah i zadachah* [Geometry of the 10th grade in questions and problems] / *Bludova I. V., Bugrova M. I., Gras'kin S. S., Gutner M. E.* M. Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 2007.

2. *Ortogonal'noe proektirovanie* [Orthogonal design] / *Okromeshko N. G., Degtyaryova I. G., Rodnikov A. V., Podporina O. A.* M. Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 2003.