

Мировоззренчески ориентированные задачи как средство мировоззренческого обучения математическим дисциплинам будущих специалистов

А. И. Дзундза¹, И. А. Моисеенко², В. А. Цапов³

¹доктор педагогических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики,
Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0003-1950-3735. E-mail: alladzundza@mail.ru

²доктор физико-математических наук, профессор,

декан факультета математики и информационных технологий, Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0001-9115-7801. E-mail: mia@donnu.ru

³кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0001-5260-7769. E-mail: tsapva@mail.ru

Аннотация. В статье организация мировоззренческого обучения математическим дисциплинам презентуется как актуальная и своевременная задача проектирования методических и методологических основ профессионального образования. Представлена типологизация одного из эффективных средств мировоззренческого обучения математике – мировоззренчески ориентированных задач. Впервые предложен авторский подход к определению феномена «основная и перевернутая задача». Особое внимание уделяется обоснованию целесообразности использования основных и перевернутых задач в процессе преподавания математических дисциплин. Приведены примеры использования таких задач в обучении студентов математическому анализу, дискретной математике, комплексному анализу, функциональному анализу с целью формирования у будущих специалистов навыков абстрагирования и принятия решений в условиях неопределенности, способности ориентироваться в областях практического применения математических теорий, умения интерпретировать математический результат с практической точки зрения.

Ключевые слова: мировоззренческое обучение математике, основная и перевернутая задачи.

Приоритет технократических ориентиров в векторе социокультурного развития человечества, безусловно, сужает нравственную составляющую личностной сферы молодежи. С учетом этого проектирование мировоззренчески направленной профессиональной подготовки чрезвычайно ценно для общества. Традиционно задачи формирования мировоззрения обучающихся ставятся перед преподавателями гуманитарных дисциплин. Однако, на наш взгляд, математика также имеет мощнейший потенциал формирования эстетических, интеллектуально-познавательных, морально-волевых, патриотических мировоззренческих ориентиров. В научно-педагогической литературе представлено множество исследований, раскрывающих воспитательный потенциал математического обучения. В. М. Марченко выделяет возможности формирования особого стиля мышления студентов, позволяющего развивать интеллектуальную, моральную эмоционально-волевою сферы личности [5]. По мнению Р. Д. Борисовой, воспитание нравственности и деловых качеств заложено в содержании самого предмета математики [2]. С. И. Осипова, А. Т. Автухова, В. А. Косова в процессе обучения математике особо выделяют формирование волевых качеств студентов, таких как ответственность, целеустремленность, организованность, дисциплинированность [6]. Поэтому разработка основ мировоззренческого обучения математическим дисциплинам является актуальной и своевременной.

Целью мировоззренческого обучения математическим дисциплинам мы определяем формирование у студентов ценностно-ориентированных знаний, убеждений, идеалов, волевых установок и мотивов; творческого отношения к действительности; навыков самостоятельной учебной, научно-исследовательской и педагогической деятельности; вооружение студентов способами стимулирования, оценки и самооценки познавательной и развивающей активности [3].

В качестве одного из достаточно эффективных средств мировоззренческого обучения математическим дисциплинам мы применяем систему мировоззренчески ориентированных задач как задач, при решении которых реализуется мировоззренческий потенциал математики. Воспитывающую роль математических задач особо подчеркивал А. Я. Хинчин, утверждая, что решение математической задачи предусматривает создание специального рассуждения, которое ведет к цели, то есть является продуктивно-творческим актом [7]. В процессе преподавания дискретной математи-

ки, алгебры и геометрии, математического анализа, комплексного анализа, функционального анализа и других дисциплин мы используем следующие типы задач: задачи с недостающими данными; задачи с повышающейся или понижающейся сложностью; эстетически направленные задачи (направленные на формирование эстетического вкуса, выраженного средствами образного мышления и логической культуры); задачи на обобщение и классификацию математических подходов к их решению; задачи на геометрическую интерпретацию аналитических объектов; задачи на применение метода математического моделирования; занимательные задачи и задачи из литературных источников (например, А. П. Чехов «Репетитор», Л. Н. Толстой «Много ли человеку земли нужно?»); основную и перевернутые задачи.

Систему мировоззренчески ориентированных задач мы используем для а) организации учебной деятельности в аудитории, б) организации самостоятельной работы студентов, в) разработки учебных пособий, в) разработки дистанционных курсов. Задачи с недостающими или противоречивыми данными направлены на развитие познавательного интереса, инициативности, настойчивости у студентов. Задачи с повышающейся или понижающейся сложностью развивают мыслительную активность, самостоятельность и гибкость мышления, дисциплинированность, самоконтроль. Задачи на обобщение математических понятий и утверждений расширяют математический кругозор, переводят восприятие математических объектов на более высокий интеллектуальный уровень, демонстрируют емкость, лаконичность и точность математического языка, совершенство математических категорий. Задачи на геометрическую интерпретацию аналитических объектов направлены на формирование пространственного мышления, воспитания эстетических качеств, восприятия разделов математики как единого целого. Занимательные задачи позволяют включить в учебный процесс элементы историзма, познакомить студентов с биографическими фактами, нравственными и волевыми устремлениями отечественных и зарубежных ученых [1]. Задачи на применение метода математического моделирования направлены на развитие навыков математической абстракции, принятия решений в условиях неопределенности, способности ориентироваться в областях практического применения математических теорий, умения интерпретировать математический результат с практической точки зрения.

Достаточно высокую эффективность в мировоззренческом развитии студентов демонстрируют основные и перевернутые задачи [4]. Остановимся подробнее на анализе этого средства мировоззренческого обучения математике. Не стремясь в настоящей статье к абсолютной научной строгости, поясним кратко наше понимание феномена «основная и перевернутая задачи». В качестве основной мы используем любую корректную задачу из множества задач $Z = \{z_p\}_{p=1}^P$, (например, z_p – задача дифференцирования функции). При этом рассматриваются: множество $A = \{a_n\}_{n=1}^N$, состоящее из наборов исходных данных задачи (например, $a_n = tg\ x$); множество отображений (алгоритмов, методов решения) F_n , (например, нахождение производной одним из методов: по определению или с помощью таблицы производных); множество $B = \{b_n\}_{n=1}^N$, состоящее из наборов искомого значений (например, $b_n = \{\text{производная от } tg\ x\} = \frac{1}{\cos^2 x}$); набор отображений $\Phi = \{F_n\}_{n=1}^N$ множества A во множество B . Подчеркнем, что задача $z_p \in Z$ корректна, если существует функциональное отображение $F_n \in \Phi$, такое, что $F_n(a_n) = b_n$. Как известно, если для некоторой корректной задачи отображение $F_n \in \Phi$ является взаимно однозначным, то для нее существует обратная задача. В обратной задаче известен набор $b_n \in B$ (образ), а найти нужно его прообраз $a_n \in A$, используя обратное отображение $F_n^{-1} \in \Phi$.

Однако в целом ряде математических задач, в силу разных причин, отсутствует взаимная однозначность отображения множества образов во множество прообразов, то есть некоторому набору $b \in B$ может соответствовать несколько значений $a \in A$, что не позволяет формулировать корректную обратную задачу. В таких случаях мы и предлагаем рассматривать пару «основная и перевернутая задача».

Фабуну перевернутой задачи мы формулируем в обратной постановке к основной задаче. Для решения перевернутой задачи студенты должны по известному значению b_n из множества B найти какое-либо значение a_n (или несколько значений) из множества A , пользуясь определенным $F_n \in \Phi$. При этом a_n могут быть как произвольными, так и удовлетворять определенным ограничениям. С такой точки зрения понятие «пары основной и перевернутой задачи» в определенном смысле расширяет понятие «пары прямой и обратной задачи». Работа студентов с такими задачами в значительной степени способствует формированию у них интеллектуально-познавательных и морально-волевых качеств.

Например, в качестве основной задачи студентам предлагается найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$. Нужно указать какую-либо функ-

цию $y = f(x)$, график которой и линии $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ ограничивают криволинейную трапецию, имеющую площадь $S = 10e^3$. Естественно, что задача имеет бесконечно много решений (то есть, не является обратной). Студент, оказавшись в нестандартной ситуации неопределенности, старается проявить инициативность, решительность, подойти критически к выбору вида искомой функции. В некоторых учебных ситуациях целесообразно вводить определенные ограничения, например, функция должна быть линейной, но не постоянной. В качестве ответов студенты предлагали следующие функции $y = \frac{4}{5}e^3 \cdot x$, $y = \frac{4}{17}e^3(3x + 1)$ и др. Для активизации познавательного интереса мы ставили дополнительное условие, чтобы функция не была константой, но на концах имела одинаковые значения. В качестве ответов были предложены: $y = \frac{8}{5}e^3(2,5 - |x - 2,5|)$, $y = \frac{4}{5}e^3|5 - 2x|$.

В разделе теории множеств в качестве основной мы предлагаем задачу, в которой необходимо, применяя основные тождества алгебры множеств, упростить выражение: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Очевидно, имеем: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$
 $= [(A \cup \bar{A}) \cap (B \cap C)] \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) =$
 $= [X \cap (B \cap C)] \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) = (B \cap C) \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) = (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = X$, здесь X – универсальное множество. В качестве перевернутой задачи мы предлагаем студентам следующую: «некоторое выражение алгебры множеств после упрощения равно универсальному множеству. Составьте пример такого выражения, используя при его упрощении 5 раз операцию объединения множеств, 2 раза операцию пересечения множеств и дважды операцию дополнения». Вызывает у студентов интерес также, например, такая перевернутая задача: «у булевой функции имеются всего пять тупиковых дизъюнктивных нормальных форм: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$; $x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$; $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$; $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$; $x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$. Приведите пример такой функции (или нескольких функций) и ее сокращенную дизъюнктивную нормальную форму».

В процессе преподавания функционального анализа традиционно изучается следующая основная задача: «вычислить угол между элементами $x = t^2$ и $y = \sin t$ в пространстве $C[0, \pi]$ » (величина угла φ между элементами в гильбертовом пространстве вычисляется по формуле $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$). Студенты проявили интерес к следующей перевернутой задаче: «указать какие-либо функции, ортогональные в пространстве $C[a, b]$ (возможны варианты пространств $l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$) или расположенные под углом $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots$ друг к другу». Задачи не имеют единственного решения, что расширяет возможности для творчества. Значительную познавательную активность студенты проявили, когда мы ввели дополнительные ограничения на вид искомых функций (тригонометрические, степенные, показательные).

Решив основную задачу «Является ли компактным в $C[0, 1]$ оператор $(Ax)(t) = t \int_0^1 x(s)ds$?», студенты с увлечением решали, например, такую перевернутую задачу. Постройте какой-либо компактный оператор, действующий из l_2 в l_1 ($A: L_2[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$; $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$).

Приведем еще несколько вариантов перевернутых задач.

Укажите какие-либо функции, образующие равносторонний (прямоугольный) треугольник в пространстве $C[a, b]$ ($l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$).

Определите какой-либо оператор, отличный от тождественного, норма которого равна единице в пространстве $C[a, b]$ ($l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$).

Укажите какой-либо оператор, имеющий только дискретный спектр или только непрерывный спектр.

В процессе обучения комплексному анализу мы применяем перевернутые задачи следующего вида: «приведите пример функции, разлагающейся в ряд Лорана в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, указывая при этом конкретные значения чисел z_0, R_1, R_2 ». Основные задачи в этих примерах мы не приводим в силу их очевидности.

Заметим, что студенты активно участвуют не только в решении, но и составлении перевернутых задач.

Итак, использование системы мировоззренчески ориентированных задач в значительной мере способствует реализации целей мировоззренческого обучения математическим дисциплинам. Важным является то, что фабула таких задач направлена на формирование у студентов культуры смысловой и речевой коммуникации. Общеизвестно, что условие математической задачи принято излагать кратко, не перегружая его лишними содержательными единицами. Однако при этом нужно обозначить все необходимое и избавиться от лишнего. При работе с мировоззренчески ориентированными задачами будущий специалист приобретает навык краткого, четкого, логически обоснованного изложения своих мыслей, старается избегать математических символов, фраз, которые

не несут смысловой нагрузки. Развитие ясного и краткого математического стиля изложения своих мыслей, безусловно, способствует формированию мировоззренческих ориентиров. В фабулу мировоззренчески ориентированных задач мы включаем сведения о выдающихся отечественных ученых-математиках, исторические факты о старинных русских мерах, сюжеты из литературных источников, сведения о достижениях российских ученых (физиков, химиков, биологов и пр.), формируя при этом патриотический и нравственный ориентиры мировоззрения будущих специалистов. На наш взгляд, именно творческий характер составления и решения мировоззренчески ориентированных задач позволяет им выступать в качестве эффективного средства мировоззренческого обучения математике.

Список литературы

1. Баврин И. И., Фрибус Е. А. Старинные задачи : кн. для учащихся. М. : Просвещение, 1994. 128 с.
2. Борисова Р. Д. Усиление воспитательного потенциала уроков математики через слово : мат-лы региональной научно-методической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики в технических вузах». Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. С. 17–23.
3. Дзундза А. И., Цапов В. А. Математическое обучение как средство формирования мировоззрения будущих учителей математики : мат-лы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов». Брянск : Изд-во ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 85–89.
4. Дзундза А. И., Цапов В. А. Профессионально-педагогические ориентиры в структуре системы мировоззренческих ориентиров будущих специалистов // Вестник Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. Вып. 39. Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). 2018. С. 58–68.
5. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова В. М. О развитии личностных качеств студентов при изучении математических дисциплин // Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 8. Учебно-методическая работа. 2014. № 8 (172). С. 43–47.
6. Осипова С. И., Автухова А. Т., Косова В. А. Воспитание личностных качеств студента в процессе обучения математике // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6556> (дата обращения: 08.10.2020).
7. Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Педагогические статьи. Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами. М. : КомКнига, 2013. С. 128–160.

Worldview-oriented tasks as a means of worldview teaching mathematical disciplines to future specialists

A. I. Dzundza¹, I. A. Moiseenko², V. A. Tsapov³

¹Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0003-1950-3735. E-mail: alladzundza@mail.ru

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0001-9115-7801. E-mail: mia@donnu.ru

³PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0001-5260-7769. E-mail: tsapva@mail.ru

Abstract. In the article, the organization of ideological teaching of mathematical disciplines is presented as an actual and timely task of designing methodological and methodological foundations of vocational education. The typologization of one of the effective means of worldview teaching mathematics – worldview-oriented tasks is presented. For the first time, the author's approach to the definition of the phenomenon of "the main and inverted task" is proposed. Special attention is paid to substantiating the feasibility of using basic and inverted problems in the process of teaching mathematical disciplines. Examples of the use of such tasks in teaching students mathematical analysis, discrete mathematics, complex analysis, functional analysis are given in order to form future specialists' skills of abstraction and decision-making in conditions of uncertainty, the ability to navigate in areas of practical application of mathematical theories, the ability to interpret mathematical results from a practical point of view.

Keywords: ideological teaching of mathematics, basic and inverted tasks.

References

1. Bavrinn I. I., Fribus E. A. *Starinnye zadachi : kn. dlya uchashchih-sya* [Ancient tasks : a book for students]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1994. 128 p.
2. Borisova R. D. *Usilenie vospitatel'nogo potenciala urokov matematiki cherez slovo : mat-ly regional'noj nauchno-metodicheskoy konferencii "Aktual'nye problemy prepodavaniya matematiki v tekhnicheskikh vuzah"* [Strengthening the

educational potential of mathematics lessons through the word : materials of the regional scientific and methodological conference "Actual problems of teaching mathematics in technical universities"]. Tyumen. TSOHU. 2009. Pp. 17–23.

3. Dzundza A. I., Capov V. A. *Matematicheskoe obuchenie kak sredstvo formirovaniya mirovozzreniya budushchih uchitelej matematiki : mat-ly 40-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov "Razvitie obshchego i professional'nogo matematicheskogo obrazovaniya v sisteme nacional'nykh universitetov i pedagogicheskikh vuzov"* [Mathematical education as a means of forming the worldview of future teachers of mathematics : materials of the 40th International Scientific Seminar of teachers of mathematics and computer science of universities and pedagogical universities "Development of general and professional mathematical education in the system of national universities and pedagogical universities"]. Bryansk. Publishing house of IP Khudovets R. G. 2021. Pp. 85–89.

4. Dzundza A. I., Capov V. A. *Professional'no-pedagogicheskie orientiry v strukture sistemy mirovozzrencheskikh orientirov budushchih specialistov* [Professional and pedagogical guidelines in the structure of the system of ideological guidelines for future specialists] // *Vestnik Eleckogo gosudarstvennogo universiteta im. I. A. Bunina. Vyp. 39. Seriya "Pedagogika" (Istoriya i teoriya matematicheskogo obrazovaniya)* – Herald of I. A. Bunin Yelets State University. Is. 39. Series "Pedagogy" (History and theory of mathematical education). 2018. Pp. 58–68.

5. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova V. M. *O razvitii lichnostnykh kachestv studentov pri izuchenii matematicheskikh disciplin* [On the development of personal qualities of students in the study of mathematical disciplines] // *Trudy Belorusskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya 8. Uchebno-metodicheskaya rabota* – Proceedings of the Belarusian State Technological University. Series 8. Educational and methodical work. 2014. No. 8 (172). Pp. 43–47.

6. Osipova S. I., Avtuhova A. T., Kosova V. A. *Vospitanie lichnostnykh kachestv studenta v processe obucheniya matematike* [Education of personal qualities of a student in the process of teaching mathematics] // *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* – Modern problems of science and education. 2012. No. 4. Available at: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6556> (date accessed: 08.10.2020).

7. Hinchin A. Ya. *O vospitatel'nom effekte urokov matematiki* [On the educational effect of mathematics lessons] // *Pedagogicheskie stat'i. Voprosy prepodavaniya matematiki. Bor'ba s metodicheskimi shtampami* – Pedagogical articles. Questions of teaching mathematics. Struggle with methodical stamps. M. KomKniga. 2013. Pp. 128–160.