

Подход к решению задач по геометрии на основании концепции Д. Пойа

Г. Г. Шеремет¹, Ю. И. Пухова²

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Пермский государственный национальный исследовательский университет.

Россия, г. Пермь. E-mail: sheremet@pspu.ru

²учитель математики, Гимназия № 17.

Россия, г. Пермь. E-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается метод решения геометрических задач на основании концепции Д. Пойа, базирующейся на тщательно разработанной системе вопросов, позволяющей разбить решение задачи на отдельные, явные и интуитивно понятные обучающемуся этапы. На конкретном примере одной задачи ЕГЭ иллюстрируются четыре основных шага решения: понимание постановки задачи (анализ входных данных и искомой величины), поиск алгоритма решения (построение идеального чертежа), осуществление плана, взгляд назад.

При работе с чертежом рекомендуется использовать системы компьютерной математики, программы Geogebra и «Живая геометрия», так как они позволяют выполнять динамические чертежи.

Приведенный метод решения задач, несмотря на свою эффективность, в принципе является достаточно простым, универсальным и может быть легко адаптирован для применения как в рамках других учебных предметов, так и для решения произвольных задач в целом.

Ключевые слова: метод решения геометрических задач, как решать задачу.

В современном обществе повышается рост общественного запроса на качественное математическое образование и математическую грамотность обучающихся 9–11 классов.

Форма государственной итоговой аттестации – единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике – содержит задания базового и повышенного уровней. Анализ и статистика решаемости ЕГЭ по математике позволила выявить основной блок проблемных тем, и ими оказались геометрические задачи. Из года в год по этим задачам получают низкие результаты – от 2 % до 24 % верных ответов. При этом с такими задачами справляется лишь категория учащихся с «высокой» математической подготовкой [4].

Такое неблагоприятное положение с геометрической подготовкой обучающихся не соответствует значимости курса геометрии в основной школе и, как следствие, в любой сфере деятельности человека.

Е. В. Потоскуев отмечает: «Хорошее геометрическое образование, пространственное воображение и логическое мышление – необходимые атрибуты не только математика, но и инженера, и экономиста, и дизайнера, и юриста, и программиста, а также специалистов многих других профессий. <...> В основе геометрического образования лежит один из самых нравственных принципов – принцип доказательности» [2, с. 3].

В данной статье предложим один из вариантов подхода к обучению решению геометрических задач, основой которого является использование концепции, предлагаемой Д. Пойа [1], и основанной на тщательно разработанной системе вопросов, позволяющей разбить решение задачи на отдельные, явные и интуитивно понятные обучающемуся этапы. Общая методология предлагаемого подхода заключается в разбиении процесса решения задачи на четыре основных шага. Проиллюстрируем эти шаги на примере обсуждения одной задачи ЕГЭ [3]. При этом отметим, что при работе с чертежом удобно использовать системы компьютерной математики, программы Geogebra и «Живая геометрия», так как они позволяют выполнять динамические чертежи.

Задача. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$ [4].

Шаг 1. Понимание постановки задачи (анализ входных данных и искомой величины).

Понимание постановки задачи

Что нам дано и как это использовать?	
Длины всех сторон трапеции	Длины сторон трапеции однозначно определяют трапецию: • ее можно построить, • можно вычислить все углы.
$\angle CPD$ – прямой	$\triangle CPD$ прямоугольный, PN – медиана, проведенная к гипотенузе: • $PN = CP = PD$ (в прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине гипотенузы).
Точки M, N, P и Q лежат на одной окружности	Сумма противоположных углов в четырехугольнике $MPNQ$ равна 180° .
Что нам требуется найти? В какую фигуру входит искомая величина?	
Отрезок QN	Сторона треугольника PQN

Шаг 2. Поиск алгоритма решения (построение идеального чертежа):

- Треугольник ABD' со сторонами AB , $BD' = CD$, $AD' = AD - BC$ построить можно. Его достроить до искомой трапеции также можно (рис. 1).

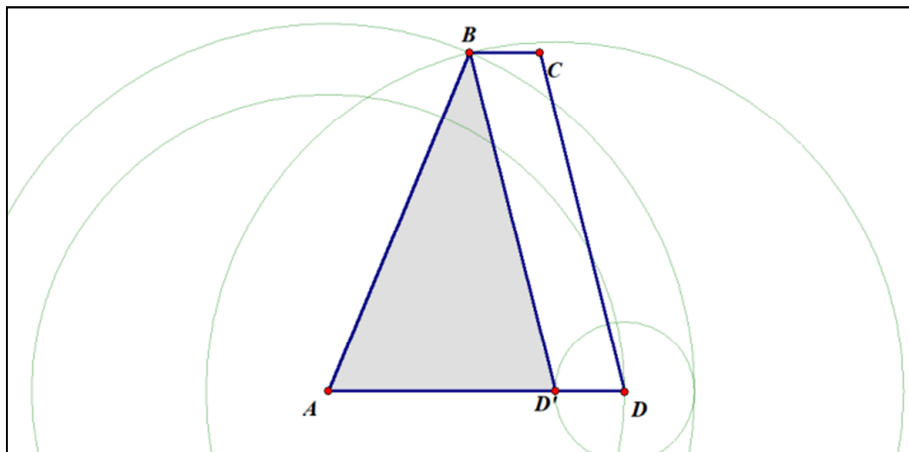


Рис. 1. Построение трапеции

- Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Далее можно построить точку P , так как по условию угол CPD прямой. Значит, точка P лежит на пересечении отрезка BM и окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре. Данному условию удовлетворяют две точки P_1 и P_2 на чертеже (рис. 2). Оба ли эти варианта подходят?

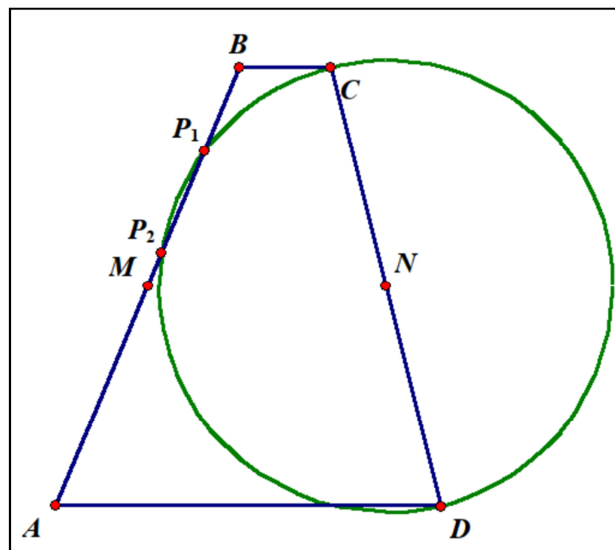


Рис. 2. Построение точки P

• Точки М, N, Р и Q лежат на одной окружности (рис. 3). Следовательно, точка Q лежит на окружности, описанной около треугольника MNP и внутри отрезка CN. Но для точки P2 описанная окружность на чертеже касается отрезка CD. Этот факт надо еще доказать!

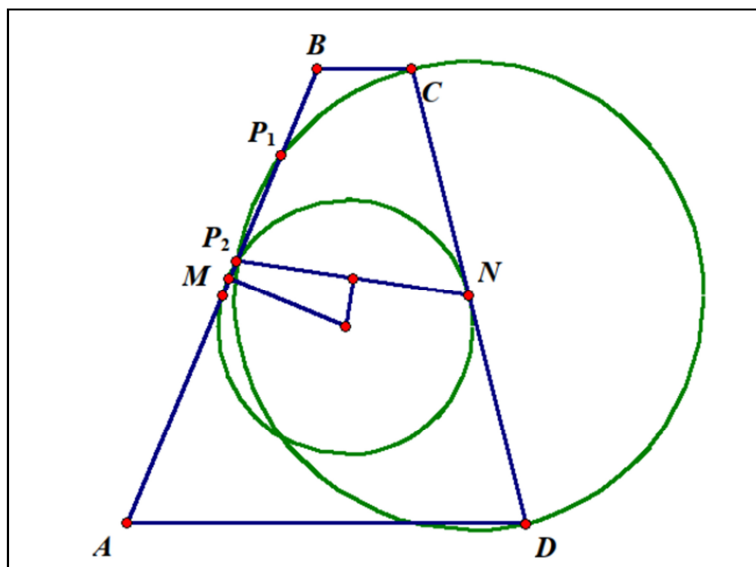


Рис. 3. Нахождение точек, лежащих на одной окружности

• Итак, положение точки Р на стороне АВ определяется однозначно, и она определяет однозначное положение точки Q на стороне CD. Значит, длины всех отрезков, связанных с точками, отмеченными на чертеже, находятся однозначно, в том числе и длина отрезка QN (рис. 4).

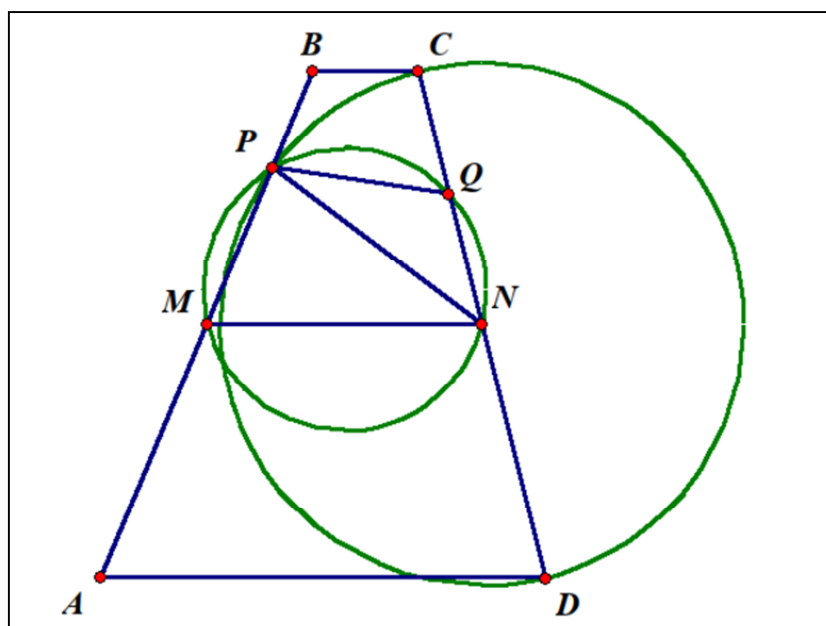


Рис. 4. Итоговый чертеж к задаче

Алгоритм решения. Подводя итоги всех проведенных рассуждений, приходим к тому, что искомый отрезок QN – сторона треугольника PQN . В этом треугольнике сторону PN и угол PQN найти можем. Если сумеем найти остальные углы этого треугольника, то сможем воспользоваться теоремой синусов и найти искомую сторону. Угол PNQ является также углом при вершине равнобедренного треугольника PNC , для нахождения углов в котором необходимо метрически описать положение точки P на стороне AB (рис. 5).



Рис. 5. План решения

Шаг 3. Осуществление плана.

Третий шаг посвящен непосредственному решению задачи. Описывая его в своей работе, Д. Пойа акцентирует свое внимание на следующем: «Осуществляя план решения, контролируйте каждый свой шаг. Ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?» [1, с. 203] (рис. 6).

Вычисление величины угла BAD В треугольнике ABD' известны длины всех трех сторон: $AB = 21$, $BD' = CD = 20$, $AD' = AD - BC = 17 - 4 = 13$ По теореме косинусов $\cos BAD = \frac{21^2 + 13^2 - 20^2}{2 \cdot 21 \cdot 13} = \frac{5}{13}.$ Отсюда $\sin BAD = \frac{12}{13}.$	
Нахождение длины PB Обозначим $PB = x$. Тогда $AP = 21 - x$. Из треугольников PAD и PBC выразим PD и PC через x. По теореме косинусов: $PD^2 = PA^2 + AD^2 - 2 \cdot PA \cdot AD \cdot \cos PAD;$ $PD^2 = (21 - x)^2 + 17^2 - 34 \cdot (21 - x) \cdot \frac{5}{13}.$ $PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2 \cdot PB \cdot BC \cdot \cos PBC;$ $PC^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right);$ Так как треугольник CPD по условию прямоугольный, то $CD^2 = PC^2 + PD^2$. Получили уравнение для нахождения x. Решая его, получаем $x = 4$ или $x = 116/13$.	

Рис. 6. Осуществление плана

Шаг 4. Взгляд назад. При построении идеального чертежа мы выяснили, что окружность, построенная на CD как на диаметре, пересекает сторону AB в двух точках. Необходимо обосновать, что решение $x = 116/13$ не удовлетворяет условиям на точку Q (рис. 7).

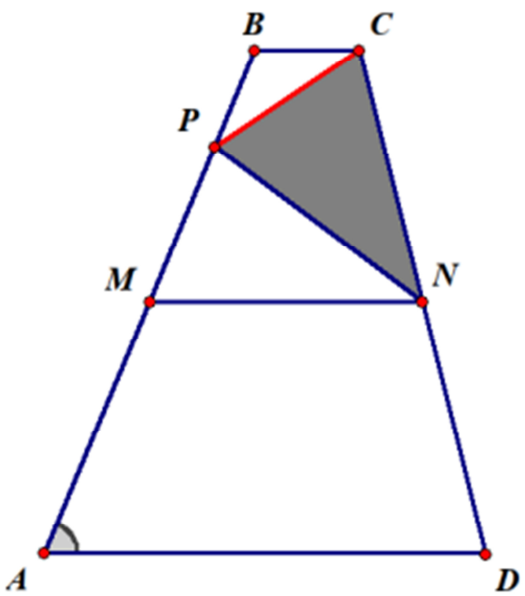
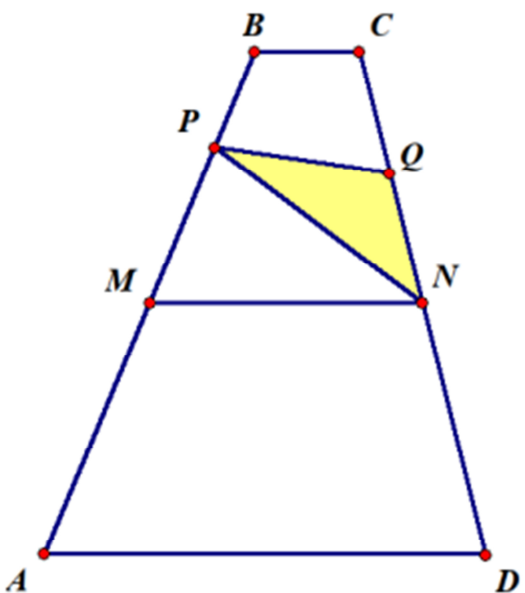
<i>Нахождение длины PC</i> $PC^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right), \quad PC^2 = \frac{576}{13}.$	
<i>Вычисление величины угла CNP</i> По теореме косинусов для треугольника CPN $\cos CNP = \frac{PN^2 + CN^2 - PC^2}{2 \cdot PN \cdot CN}$ $\cos CNP = \frac{100 + 100 - \frac{576}{13}}{200} = \frac{253}{325}, \text{ тогда}$ $\sin CNP = \frac{204}{325}.$	
<i>Нахождение величины NPQ</i> В треугольнике NPQ известно, что $\sin PQN = \frac{12}{13}, \quad \cos PQN = \frac{-5}{13},$ $\cos QNP = \frac{253}{325}, \quad \sin QNP = \frac{204}{325}.$ Тогда $\sin NPQ = \sin(180 - (PQN + QNP)),$ $\sin NPQ = \sin PQN \cdot \cos QNP + \cos PQN \cdot \sin QNP$ $\sin NPQ = \frac{2016}{13 \cdot 325}$	
<i>Нахождение длины QN</i> По теореме синусов $QN = \frac{\sin NPQ \cdot PN}{\sin PQN}.$ Вычислите самостоятельно. Для проверки результат измерения в Живой геометрии QN = 5.17 cm	

Рис. 7. Взгляд назад

Можно отметить, что приведенный метод решения задач, несмотря на свою эффективность, в принципе является достаточно простым универсальным и может быть легко адаптирован для применения как в рамках других учебных предметов, так и для решения произвольных задач в целом. Кроме того, использование такого подхода позволяет развить критическое восприятие, а также навыки логического мышления, которые являются крайне востребованными в процессе школьного обучения, а также остаются таковыми и в течение всей жизни.

Список литературы

1. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Гос. уч.-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1959. 207 с.
2. Потоскуев Е. В. О роли геометрии и проблемах при ее изучении в средней и высшей школе // Математика. 2010. № 21. С. 3–7.
3. Сдам ГИА: решу ЕГЭ. URL: <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=525120> (дата обращения: 30.06.2022).
4. Яценко И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике. М., 2021. С. 31.

Approach to solving geometry problems based on the concept of D. Poya

G. G. Sheremet¹, Yu. I. Pukhova²

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics,
Perm State National Research University. Russia, Perm. E-mail: sheremet@pspu.ru

²math teacher, Gymnasium No. 17. Russia, Perm. E-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

Abstract. The article discusses a method for solving geometric problems based on the concept of D. Poya, based on a carefully developed system of questions that allows you to break the solution of the problem into separate, explicit and intuitive stages for the student. Using a specific example of one USE problem, four main steps of solving are illustrated: understanding the problem statement (analysis of input data and the desired value), searching for a solution algorithm (building an ideal drawing), implementing a plan, looking back.

When working with a drawing, it is recommended to use computer mathematics systems, Geogebra and "Living Geometry" programs, as they allow you to perform dynamic drawings.

The given method of solving problems, despite its effectiveness, is in principle quite simple, universal and can be easily adapted for use both in other academic subjects and for solving arbitrary problems in general.

Keywords: method of solving geometric problems, how to solve the problem.

References

1. Poya D. *Kak reshat' zadachu* [How to solve the problem]. M. State Academic and Pedagogical Publishing house of the Ministry of Education of the RSFSR. 1959. 207 p.
2. Potoskuev E. V. *O roli geometrii i problemah pri ee izuchenii v srednej i vysshej shkole* [On the role of geometry and problems in its study in secondary and higher schools] // *Matematika* – Mathematics. 2010. No. 21. Pp. 3–7.
3. *Sdam GIA: reshu EGE* – I will pass the GIA: I will solve the Unified State Exam. Available at: <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=525120> (date accessed: 30.06.2022).
4. Yashchenko I. V. *Metodicheskie rekomendacii dlya uchitelej, podgotovlennye na osnove analiza tipichnyh oshibok uchastnikov EGE 2021 goda po matematike* [Methodological recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes of participants of the Unified State Exam 2021 in mathematics]. M. 2021. P. 31.