

№3 (26) 2022

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN of Vyatka State University

Вятский государственный университет

**Математический вестник
Вятского государственного
университета**

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 3 (26)

Киров
2022

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместители главного редактора

С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5439-9414;

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

Состав редакционной коллегии:

Н. А. Беляева, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Н. А. Бояринцева, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров);

Ю. А. Дробышев, доктор педагогических наук, профессор, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (г. Калуга);

И. В. Игнатушина, доктор педагогических наук, доцент, Оренбургский государственный педагогический университет (г. Оренбург);

С. Н. Ильин, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань);

Г. А. Клековкин, кандидат физико-математических наук, доцент (г. Самара);

И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва), ORCID: 0000-0002-1918-6197;

Е. В. Котельников, доктор технических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-9745-1489;

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5071-6208;

А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург);

Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский), ORCID: 0000-0002-7869-8053;

В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург);

С. М. Окулов, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

Е. А. Перминов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный профессионально-педагогический университет (г. Екатеринбург);

Н. И. Петров, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

В. В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-7303-4485;

И. М. Смирнова, доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

О. А. Сотникова, доктор педагогических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Т. Н. Суворова, доктор педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет (г. Москва);

В. А. Тестов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет (г. Вологда);

А. А. Фомин, доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

В. В. Черных, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар), ORCID: 0000-0002-8650-4554;

Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-0042-3700;

А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (г. Ярославль)

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»

**как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)**

Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **А. В. Мариева**

Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**

Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Исаева С. Э.</i> Сильно диссипативные волновые уравнения с нелинейными акустическими условиями сопряжения	4
--	---

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

<i>Игнатушина И. В., [Асланов Р. М.]</i> Нужна ли история математики в подготовке будущих учителей математики?	12
<i>Блудова И. В.</i> О применении общих методов для решения стереометрических задач	16
<i>Бояринцева Н. А., Трефилова Е. С.</i> Включение игровых механик в обучение математике для повышения познавательной активности школьников	22
<i>Воронов М. В.</i> Моделирование структуры математических учебных текстов	28
<i>Дзундза А. И., Моисеенко И. А., Цапов В. А.</i> Мировоззренчески ориентированные задачи как средство мировоззренческого обучения математическим дисциплинам будущих специалистов	33
<i>Игошин В. И.</i> Логическая компетентность специалиста	38
<i>Ларин С. В., Шуманский С. В.</i> Использование виртуальных инструментов среды GeoGebra в школьной тригонометрии	49
<i>Шеремет Г. Г., Пухова Ю. И.</i> Подход к решению задач по геометрии на основании концепции Д. Пойа	54
<i>Шабанова М. В., Шестакова Л. А.</i> Реальный мир сквозь призму физики, математики и информатики	60

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

<i>Марданов М. Д., [Асланов Р. М.]</i> Насреддин Туси о правилах этикета для учителей и учеников	69
<i>Вечтомов Е. М., Варанкина В. И.</i> Математика и проблемы образования: 41-й семинар Мордковича в Кирове	74

Сильно диссипативные волновые уравнения с нелинейными акустическими условиями сопряжения

С. Э. Исаева

кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет.
Азербайджан, г. Баку. ORCID: 0000-0002-0872-1350. E-mail: isayevasevda@rambler.ru

Аннотация. Задачи сопряжения возникают в некоторых приложениях физики и биологии. Например, смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения касаются задач с двумя волновыми уравнениями, которые моделируют поперечные акустические колебания мембраны, состоящей из двух разных материалов Ω_1 и Ω_2 . Хорошо изучены задачи сопряжения для линейных гиперболических уравнений, где доказаны единственность и регулярность решений для рассматриваемой задачи. Изучена также задача сопряжения для вязкоупругих волн и доказаны существование, единственность и экспоненциальное убывание решений для такой задачи. В данной работе рассматривается начально-краевая задача для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с нелинейными акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о локальном существовании и единственности слабых решений для рассматриваемой задачи. В доказательстве теоремы использованы аппроксимации Фаэдо – Галеркина, теоремы вложения, теорема о неподвижной точке.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, локальное решение, слабое решение, акустические условия, условия сопряжения, теоремы вложения, теорема о неподвижной точке.

Пусть $\Omega \subset R^n (n \geq 1)$ – ограниченная область с гладкой границей Γ_1 , $\Omega_2 \subset \Omega$ – подобласть

с гладкой границей Γ_2 и $\Omega_1 = \Omega \setminus (\Omega_2 \cup \Gamma_2)$ – подобласть с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

В области Ω рассмотрим следующую нелинейную задачу с нелинейными акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u = f_1(u) \text{ в } \Omega_1 \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$v_{tt} - \Delta v_t - \Delta v = f_2(v) \text{ в } \Omega_2 \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t \text{ на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, \infty), \quad (4)$$

$$u = v, \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_t}{\partial \nu} + \rho(u_t) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \quad (6)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \quad (7)$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial v_1}{\partial \nu} + \rho(u_1) \equiv \delta_1, x \in \Gamma_2, \quad (8)$$

где ν – внешняя нормаль границы Γ ; $f_1, f_2, \rho: (-\infty; +\infty) \rightarrow (-\infty; +\infty)$, $M, D, K: \Gamma_2 \rightarrow (-\infty; +\infty)$,

$u_0, u_1: \Omega_1 \rightarrow (-\infty; +\infty)$, $v_0, v_1: \Omega_2 \rightarrow (-\infty; +\infty)$, $\delta_0: \Gamma_2 \rightarrow (-\infty; +\infty)$ – заданные функции.

Задачи сопряжения изучались, например, в [3–6]. В [1] авторы сравнивают некоторые граничные условия, в том числе и акустические граничные условия. Гиперболические уравнения с акустическими граничными условиями впервые рассмотрены в работе [2] и изучены в работах различных авторов [7–11].

В этой работе доказывается теорема о существовании и единственности локальных решений задачи (1)–(8).

Введем следующие обозначения.

Скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$) и $L^2(\Gamma_2)$ обозначаются, соответственно, как

$$(u, v)_i = \int_{\Omega_i} u(x)v(x) dx, \|u\|_i = \left(\int_{\Omega_i} (u(x))^2 dx \right)^{1/2}, i = 1, 2,$$

$$(\delta, \theta)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \delta(x)\theta(x) d\Gamma_2, \|\delta\|_{\Gamma_2} = \left(\int_{\Gamma_2} (\delta(x))^2 d\Gamma_2 \right)^{1/2}.$$

Введем замкнутое подпространство $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ пространства $H^1(\Omega_1)$, как

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) = \{u \in H^1(\Omega_1): \gamma_0(u) = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_1\},$$

где $\gamma_0: H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ – оператор следа нулевого порядка и $H^{1/2}(\Gamma)$ есть пространство Соболева порядка $\frac{1}{2}$ [12]. Заметим, что норма в $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

и норма в $H^1(\Omega_1)$ эквивалентны, так как неравенство Пуанкаре удовлетворяется в $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$. Таким образом, рассматриваем $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ с вышеуказанной нормой.

Отображение $\gamma_1: H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2)$ – оператор следа Неймана на $H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2)$, где пространства

$$H(\Delta, \Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i): \Delta u \in L^2(\Omega_i)\}, i = 1, 2$$

снабжены нормами

$$\|u\|_{\Delta, \Omega_i} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \|\Delta u\|_i^2 \right)^{1/2}, i = 1, 2.$$

Определение 1. Тройку функций $(u(x, t), v(x, t), \delta(x, t))$, где

$$u: \Omega_1 \times [0, T] \rightarrow R, v: \Omega_2 \times [0, T] \rightarrow R, \delta: \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow R,$$

назовем слабым решением задачи (1)–(8), если

$$u \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{ п. в. на } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), v_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)),$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2))$$

и выполнены следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} (u_t, \Phi)_1 + (\nabla u_t, \nabla \Phi)_1 + (\nabla u, \nabla \Phi)_1 +$$

$$+ \frac{d}{dt} (v_t, \Psi)_2 + (\nabla v_t, \nabla \Psi)_2 + (\nabla v, \nabla \Psi)_2 +$$

$$+ \left(\rho(\gamma_0(u_t)), \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} - (\delta_t, \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = (f_1(u), \Phi)_1 + (f_2(v), \Psi)_2$$

для $\forall \Phi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1), \forall \Psi \in H^1(\Omega_2)$ таких, что $\Phi = \Psi$ на Γ_2 , в смысле распределений в $D'(0, T)$ и $\frac{d}{dt} (\gamma_0(u) + M\delta_t, e)_{\Gamma_2} + (D\delta_t + K\delta, e)_{\Gamma_2} = 0$

для $\forall e \in L^2(\Gamma_2)$, в смысле распределений в $D'(0, T)$, а также:

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_1,$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_2,$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \delta_1(x) \text{ п. в. на } \Gamma_2.$$

Теорема 1. Пусть

$$M, D, K \in C(\Gamma_2), M > 0, D > 0, K > 0 \text{ для } \forall x \in \Gamma_2; \quad (9)$$

$f_1, f_2 \in C^1(-\infty; +\infty)$ и существуют постоянные $c_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ такие, что

$$|f_1(s)| \leq c_1|s|^p, |f_1'(s)| \leq c_2|s|^{p-1}, |f_2(s)| \leq c_3|s|^p, |f_2'(s)| \leq c_4|s|^{p-1}; \quad (10)$$

$$1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}, \text{ если } n \geq 3 \text{ и } p \geq 1, \text{ если } n = 1, 2; \quad (11)$$

$$1 \leq q \leq \frac{n+2}{n-2}, \text{ если } n \geq 3, q \geq 1, \text{ если } n = 1, 2; \quad (12)$$

$$\rho \in C^1(-\infty; +\infty), |\rho(s)| \leq c_5|s|^q (c_5 > 0); \quad (13)$$

$\rho(s)$ – монотонно возрастающая функция на $(-\infty; +\infty)$. (14)

Тогда для $\forall (u_0, v_0, \delta_0) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2), \forall (u_1, v_1, \delta_1) \in L^{2q}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$ существует число $T > 0$ такое, что задача (1)–(8) имеет единственное слабое решение (u, v, δ) , удовлетворяющее условиям

$$u \in C([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)),$$

$$v \in C([0, T]; H^1(\Omega_2)), v_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_2)), \\ \delta, \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2));$$

кроме того, если T_{max} – длина максимального интервала существования решения (u, v, δ) , то справедлива следующая альтернатива:

либо T_{max} ;

либо

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} (\|u_t\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta\|_{\Gamma_2}^2).$$

Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U = F_1 \text{ в } \Omega_1 \times (0, T), \quad (15)$$

$$V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V = F_2 \text{ в } \Omega_2 \times (0, T), \quad (16)$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (17)$$

$$U = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (18)$$

$$U = V, \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \rho(U_t) \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (19)$$

$$U(x, 0) = u_0(x), U_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \quad (20)$$

$$V(x, 0) = v_0(x), V_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \quad (21)$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), x \in \Gamma_2, \quad (22)$$

где $T > 0$; $F_1 = F_1(x, t)$ и $F_2 = F_2(x, t)$ – некоторые фиксированные функции, определенные на $\Omega_1 \times (0, T)$ и $\Omega_2 \times (0, T)$, соответственно.

Чтобы доказать теорему 1, нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (9), (12)–(14) и

$$F_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1)), F_2 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (23)$$

$$u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1), u_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^{2q}(\Omega_1), \quad (24)$$

$$v_0 \in H^2(\Omega_2), v_1 \in H^2(\Omega_2), \quad (25)$$

$$\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2). \quad (26)$$

Тогда задача (15)–(22) имеет единственное слабое решение (U, V, δ) , удовлетворяющее условиям

$$U \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), U_t \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), U_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad (27)$$

$$V \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), V_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), V_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (28)$$

$$-\Delta U(t) \in L^2(\Omega_1), -\Delta V(t) \in L^2(\Omega_2) \text{ п. в. на } (0, T), \quad (29)$$

$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (30)$$

Доказательство леммы 1. Аппроксимации Фаэдо – Галеркина. Пусть $\{(\Phi_j, \Psi_j)\}$ и $\{e_j\}$ ($j \in N$)

линейно независимые, полные системы в пространствах

$$W = \{(u, v) \in (H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \times H^2(\Omega_2), \gamma_0(u) = \gamma_0(v) \text{ п. в. на } \Gamma_2\} \cap L^2(\Gamma_2),$$

соответственно. Так как Γ_1 и Γ_2 являются достаточно гладкими, то $\Phi_j \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$

и $\Psi_j \in H^2(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ для любого $j \in N$. Будем искать «приближенное» решение рассматриваемой задачи в виде

$$(U_m(x, \vec{\tau} t), V_m(x, \vec{\tau} t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t) (\Phi_i, \Psi_i), \delta_m(x, \vec{\tau} t) = \sum_{i=1}^m \beta_{im}(t) e_i, m \in N,$$

где $\alpha_{im}(t)$ и $\beta_{im}(t)$ определяются из равенств:

$$\begin{aligned} & (U_{mtt}, \Phi_j)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi_j)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi_j)_1 + \\ & + (V_{mtt}, \Psi_j)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi_j)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi_j)_2 - \\ & - (\delta_{mt}, \gamma_0(\Phi_j))_{\Gamma_2} + (\rho(U_{mt}), \gamma_0(\Phi_j))_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi_j)_1 + (F_2, \Psi_j)_2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$(M\delta_{mt} + D\delta_{mt} + K\delta_{mt}, e_j)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e_j)_{\Gamma_2}, 1 \leq j \leq m, \quad (32)$$

$$\delta_{mt} = \frac{\partial U_m}{\partial \nu} - \frac{\partial V_m}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu} - \frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu} + \rho(U_{mt}), x \in \Gamma_2, \quad (33)$$

$$(U_m(x, \vec{\tau} 0), V_m(x, 0)) = (U_{0m}, V_{0m}) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} (\Phi_i, \Psi_i) \rightarrow (u_0, v_0) \text{ в } W, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & (U_{mt}(x, 0), V_{mt}(x, 0)) = (U_{1m}, V_{1m}) = \sum_{i=1}^m \beta_{im} (\Phi_i, \Psi_i) \rightarrow \\ & \rightarrow (u_1, v_1) \text{ в } (H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap L^{2q}(\Omega_1)) \times H^1(\Omega_2), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\delta_m(x, \vec{\tau} 0) = \delta_{0m} = \sum_{i=1}^m c_{im} e_i \rightarrow \delta_0 \text{ в } L^2(\Gamma_2), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{mt}(x, 0) = \gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \\ & + \gamma_0(\rho(U_{1m})) = \sum_{i=1}^m d_{im} e_i \rightarrow \delta_1 \text{ в } L^2(\Gamma_2) \end{aligned} \quad (37)$$

при $m \rightarrow \infty$. Задача (31)–(37) имеет решение (U_m, V_m, δ_m) ($m \in N$) на интервале $[0, T_m]$ (оценка 1 показывает, что $T_m = T$). Из (31), (32) имеем

$$\begin{aligned} & (U_{mtt}, \Phi)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 + \\ & + (V_{mtt}, \Psi)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 - (\delta_{mt}, \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} + \\ & + (\rho(U_{mt}), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$(M\delta_{mtt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e)_{\Gamma_2}, \quad (39)$$

для $\forall \Phi \in \text{Span}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m, \dots\}$, $\forall \Psi \in \text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\}$, $\forall e \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$.

Оценка 1. Полагая $\Phi = 2U_{mt}$, $\Psi = 2V_{mt}$ в (38) и $e = 2\delta_{mt}$ в (39), получаем равенства

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|U_{mt}\|_1^2 + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla U_m\|_1^2 + \\ & + \frac{d}{dt} \|V_{mt}\|_2^2 + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|\nabla V_m\|_2^2 - (\delta_{mt}, \gamma_0(2U_{mt}))_{\Gamma_2} + \\ & + 2(\rho(U_{mt}), \gamma_0(U_{mt}))_{\Gamma_2} = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2, \\ & \frac{d}{dt} \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \frac{d}{dt} \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + (\gamma_0(U_{mt}), 2\delta_{mt})_{\Gamma_2} = 0, \end{aligned}$$

складывая которых и используя (33), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2) + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \\ & + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + 2(\rho(U_{mt}), U_{mt})_{\Gamma_2} + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2. \end{aligned}$$

Или так как в силу (14): $\rho(s)s \geq 0$, $\forall s \in (-\infty, +\infty)$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2) + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \\ & + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Интегрируя равенство (40) от 0 до t ($t \leq T_m$), используя (34)–(37) и неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2 \int_0^t (\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2) ds \leq \\ & \leq \|U_{1m}\|_1^2 + \|\nabla U_{0m}\|_1^2 + \|V_{1m}\|_2^2 + \|\nabla V_{0m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m}))\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \|\sqrt{K}\delta_{0m}\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|F_1\|_1^2 ds + \int_0^t \|F_2\|_2^2 ds + \int_0^t (\|U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2) ds, \end{aligned}$$

откуда, согласно (9), (12), (23)–(26) и неравенству Гронуолла, получаем Оценку 1:

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \int_0^t (\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2) d\tau \leq C_1, \end{aligned}$$

где C_1 – положительная константа, не зависящая от m . Отсюда следует, что $T_m = T$.

Оценка 2. Оценим нормы $\|U_{mtt}(0)\|_1^2$, $\|V_{mtt}(0)\|_2^2$ и $\|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2$. Используя (33) в (38) имеем

$$\begin{aligned} & (U_{mtt}, \Phi)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + (V_{mtt}, \Psi)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} = (F_1, \Phi)_1 + (F_2, \Psi)_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Полагая $\Phi = U_{mt}$ и $\Psi = V_{mt}$ в (41), $e = \delta_{mt}$ в (39) и $t = 0$ в полученных равенствах, получаем

$$\begin{aligned} & \|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 = (\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} + F_1(x, 0), U_{mtt}(0))_1 + \\ & + (\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} + F_2(x, 0), V_{mtt}(0))_2 \leq (\|\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} + F_1(x, 0)\|_1 + \\ & + \|\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} + F_2(x, 0)\|_2) (\|U_{mtt}(0)\|_1 + \|V_{mtt}(0)\|_2), \\ & \|\sqrt{M}\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 = \left(-D \left(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m})) \right) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}), \delta_{mtt}(0) \right)_{\Gamma_2} \leq \\ & \leq \left\| -D \left(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m})) \right) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}) \right\|_{\Gamma_2} \|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}, \end{aligned}$$

откуда, согласно (9), (12), (13), (23)–(26), имеем

$$\|U_{mt}(0)\|_1^2 + \|V_{mt}(0)\|_2^2 + \|\delta_{mt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \leq C_2, \quad (42)$$

где C_2 – положительная константа, не зависящая от m .

Дифференцируя равенства (38), (39) и полагая $\Phi = 2U_{mt}$, $\Psi = 2V_{mt}$, $e = 2\delta_{mt}$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2) + \\ & + 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + (\rho'(U_{mt})U_{mtt}, \gamma_0(2U_{mtt}))_{\Gamma_2} + \\ & = 2(F_{1t}, U_{mtt})_1 + 2(F_{2t}, V_{mtt})_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя неравенство Юнга в (43), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2) + \\ & + 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + (\rho'(U_{mt})U_{mtt}, \gamma_0(2U_{mtt}))_{\Gamma_2} + \\ & \leq \|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2 + \|U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство вдоль $(0, t)$ и используя тот факт, что в силу (13):

$\rho'(s) \geq 0, \forall s \in (-\infty, +\infty)$, имеем

$$\begin{aligned} & \|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2 \int_0^t (\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2) ds \leq \\ & \leq \|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|\nabla U_{1m}\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 + \|\nabla V_{1m}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \|\sqrt{K}(\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) + \gamma_0(\rho(U_{1m})))\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \int_0^t (\|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2) ds + \int_0^t (\|U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2) ds, \end{aligned}$$

откуда, используя (23)–(26) и (42), согласно неравенству Гронуолла получаем Оценку 2:

$$\begin{aligned} & \|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2 \int_0^t (\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \|\sqrt{D}\delta_{mtt}\|_{\Gamma_2}^2) ds \leq C_3, \end{aligned}$$

где C_3 – положительная константа, не зависящая от m .

Доказательство существования решений завершается таким же образом, как в теореме 2.1 из [13].

Единственность. Пусть (U_1, V_1, δ_1) и (U_2, V_2, δ_2) – два решения задачи (15)–(22). Тогда для $U_1 - U_2 = \tilde{U}$, $V_1 - V_2 = \tilde{V}$, $\delta_1 - \delta_2 = \tilde{\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} & (\tilde{U}_{tt}, \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}_t, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial \tilde{U}_t}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + (\nabla \tilde{U}, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + \\ & + (\tilde{V}_{tt}, \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}_t, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + (\nabla \tilde{V}, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$(\tilde{U}_{tt}, \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}_t, \nabla \Phi)_1 + (\nabla \tilde{U}, \nabla \Phi)_1 + (\tilde{V}_{tt}, \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}_t, \nabla \Psi)_2 + (\nabla \tilde{V}, \nabla \Psi)_2 -$$

$$- (\tilde{\delta}_t + \rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), \gamma_0(\Phi))_{\Gamma_2} = 0, \quad (44)$$

$$(M\tilde{\delta}_{tt} + D\tilde{\delta}_t + K\tilde{\delta}, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(\tilde{U}_t), e)_{\Gamma_2}, \quad (45)$$

для любого $(\Phi, \Psi, e) \in W$, п. в. на $(0, T)$;

$$\tilde{U} = 0 \text{ п. в. в } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (46)$$

$$\tilde{U} = \tilde{V}, \tilde{\delta}_t = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \nu} + \frac{\partial \tilde{U}_t}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial \nu} + \rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}) \text{ п. в. в } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (47)$$

$$\tilde{U}(x, 0) = 0, \quad \tilde{U}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega_1, \quad (48)$$

$$\tilde{V}(x, 0) = 0, \quad \tilde{V}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega_2, \quad (49)$$

$$\tilde{\delta}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\delta}_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Gamma_2. \quad (50)$$

Полагая $\Phi = 2\tilde{U}_t$, $\Psi = 2\tilde{V}_t$ в (44) и $e = 2\tilde{\delta}_t$ в (45) получаем

$$\frac{d}{dt} (\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2) + 2\|\nabla \tilde{U}_t\|_1^2 + 2\|\nabla \tilde{V}_t\|_2^2 +$$

$$+ 2\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + 2(\rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), U_{1t} - U_{2t})_{\Gamma_2} = 0. \quad (51)$$

Так как в силу (13):

$$(\rho(U_{1t}) - \rho(U_{2t}), U_{1t} - U_{2t})_{\Gamma_2} \geq 0,$$

то из (51) имеем

$$\frac{d}{dt} (\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2) \leq 0.$$

Используя (48)–(50) в последнем неравенстве, получаем

$$\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \leq 0.$$

Отсюда имеем $\tilde{U} = 0$, $\tilde{V} = 0$, $\tilde{\delta} = 0$.

Лемма 1 доказана.

Для заданных $u \in C([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_1))$, $v \in C([0, T]; H^1(\Omega_2)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_2))$, которые удовлетворяют условию $u|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}$, рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U = f_1(u) \text{ в } \Omega_1 \times (0, T), \\ V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V = f_2(v) \text{ в } \Omega_2 \times (0, T), \\ M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \text{ на } \Gamma_2 \times (0, T), \\ U = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times (0, T), \\ U = V, \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} + \rho(U_t) \text{ на } \Gamma_2, \\ U(x, 0) = u_0(x), U_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega_1, \\ V(x, 0) = v_0(x), V_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \\ \delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (52)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (9)–(13) и $u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $u_1 \in L^{2q}(\Omega_1)$, $v_0 \in H^1(\Omega_2)$, $v_1 \in L^2(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$, $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$. Тогда существует число $T > 0$ такое, что задача (52) имеет единственное слабое решение (U, V, δ) , удовлетворяющее условиям

$$U \in C([0, T]; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), U_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_1)),$$

$$V \in C([0, T]; H^1(\Omega_2)), V_t \in C([0, T]; L^2(\Omega_2)),$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)).$$

Доказательство леммы 2, а также завершение доказательства Теоремы 1 осуществляем таким же образом, как в теореме 2.1 из [13].

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М, 1971.
2. Aliev A. B., Mammadhasanov E. H. Well-posedness of initial boundary value problem on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40. № 14. Pp. 5380–5390.
3. Bae J. J. Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type // Acta, Appl. Math. 2010. № 2. Pp. 907–919.
4. Beale J. T. Acoustic scattering from locally reacting surfaces // Indiana Univ. Math. 1977. J. 26. Pp. 199–222.
5. Beale J. T., Rosencrans S. I. Acoustic boundary conditions // Bull. Amer. : Math. Soc. 1974. № 6. Pp. 1276–1278.
6. Boukhatem Y., Benabderrahmane B. Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis. 2014. № 97. Pp. 191–209.
7. Dautray R., Lions J. L. Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques. Paris, 1984. Vol. 1.
8. Frota C. L., Vicente A. A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions // Int. J. Pure Appl. Math. 2008. № 2. Pp. 185–198.
9. Gal C. G., Goldstein G. R., Goldstein J. A. Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations // J. Evol. Equ. 2003. № 3 (4). Pp. 623–635.
10. Isayeva S. E. Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2021. V. 47. № 2. Pp. 232–249.
11. Muñoz Rivera J. E., Portillo Oquendo H. The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae. 2000. № 60. Pp. 1–21.
12. Mugnolo D. Abstract wave equations with acoustic boundary conditions // Math. Nachr., 279. 2006. № 3. Pp. 299–318.
13. Vicente A. Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // Bol. Soc. Parana. Mat. (3). 2009. № 27 (1). Pp. 29–39.

Highly dissipative wave equations with nonlinear acoustic coupling conditions

S. E. Isaeva

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Baku State University.
Azerbaijan, Baku. ORCID: 0000-0002-0872-1350. E-mail: isayevasevda@rambler.ru

Abstract. Coupling problems arise in some applications of physics and biology. For example, mixed problems with acoustic coupling conditions concern problems with two wave equations that simulate transverse acoustic vibrations of a membrane consisting of two different materials X and Y. Conjugation problems for linear hyperbolic equations are well studied, where the uniqueness and regularity of solutions for the problem under consideration are proved. The conjugation problem for viscoelastic waves is also studied and the existence, uniqueness and exponential decrease of solutions for such a problem are proved. In this paper, we consider an initial boundary value problem for nonlinear highly dissipative wave equations with nonlinear acoustic coupling conditions. The theorem on the local existence and uniqueness of weak solutions for the problem under consideration is proved. In the proof of the theorem, Faedo-Galerkin approximations, embedding theorems, and the fixed point theorem are used.

Keywords: nonlinear wave equation, local solution, weak solution, acoustic conditions, conjugation conditions, embedding theorems, fixed point theorem.

References

1. Lyons J. L., Majenes E. Neodnorodnye granichnye zadachi i ih prilozheniya [Inhomogeneous boundary value problems and their applications]. M. 1971.
2. Aliev A. B., Mammadhasanov E. H. Well-posedness of initial boundary value problem on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40. No. 14. Pp. 5380–5390.
3. Bae J. J. Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type // Acta, Appl. Math. 2010. No. 2. Pp. 907–919.
4. Beale J. T. Acoustic scattering from locally reacting surfaces // Indiana Univ. Math. 1977. J. 26. Pp. 199–222.
5. Beale J. T., Rosencrans S. I. Acoustic boundary conditions // Bull. Amer. : Math. Soc. 1974. No. 6. Pp. 1276–1278.
6. Boukhatem Y., Benabderrahmane B. Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis. 2014. No. 97. Pp. 191–209.
7. Dautray R., Lions J. L. Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques. Paris, 1984. Vol. 1.
8. Frota C. L., Vicente A. A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions // Int. J. Pure Appl. Math. 2008. No. 2. Pp. 185–198.
9. Gal C. G., Goldstein G. R., Goldstein J. A. Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations // J. Evol. Equ. 2003. No. 3 (4). Pp. 623–635.

10. *Isayeva S. E.* Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2021. V. 47. No. 2. Pp. 232–249.
11. *Muñoz Rivera J. E., Portillo Oquendo H.* The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae. 2000. No. 60. Pp. 1–21.
12. *Mugnolo D.* Abstract wave equations with acoustic boundary conditions // Math. Nachr., 279. 2006. No. 3. Pp. 299–318.
13. *Vicente A.* Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // Bol. Soc. Parana. Mat. (3). 2009. No. 27 (1). Pp. 29–39.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 37.016

DOI 10.25730/VSU.0536.22.020

Нужна ли история математики в подготовке будущих учителей математики?

И. В. Игнатушина¹, Р. М. Асланов²

¹кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент,
Оренбургский государственный педагогический университет.

Россия, г. Оренбург. ORCID: 0000-0001-9641-9962. E-mail: streleec@yandex.ru

²кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор,
Институт математики и механики Национальной академии наук.

Азербайджан, г. Баку. ORCID:0000-0001-5237-7158. E-mail: r_aslanov@list.ru

Аннотация. В работе рассматривается дисциплина истории математики, ее роль и место в подготовке учителей математики. Представлено основное содержание дисциплины «История математики», изучаемой на направлении подготовки бакалавриата «Педагогическое образование», профиль «Математика». Авторами проведен анализ предметно-методического модуля «Ядра высшего педагогического образования» и соответствующих учебных планов для набора 2022 г. на предмет содержания в них дисциплины «История математики» и сделаны соответствующие выводы. Отмечается, что в результате освоения дисциплины «История математики» у студента педагогического вуза происходит формирование историко-математической компетенции, декомпозиция которой подробно представлена в статье. Показано, к каким негативным последствиям приводит удаление этой дисциплины из подготовки будущих учителей математики. В частности то, что молодые педагоги, у которых в учебном плане отсутствовал курс истории математики, будут испытывать явные затруднения при выполнении ФГОС ОО.

Ключевые слова: история математики, подготовка учителей математики.

Весной 2022 г. все вузы, осуществляющие подготовку будущих учителей, разрабатывали новые учебные планы и ОПОП в соответствии с методическими рекомендациями по подготовке педагогических кадров по программам бакалавриата на основе единых подходов к их структуре и содержанию («Ядро высшего педагогического образования»), одобренными на заседании Коллегии Министерства просвещения Российской Федерации 25 ноября 2021 г. [2].

В предметно-методическом модуле «Ядра» по каждому из профилей подготовки прописаны обязательные дисциплины, приведены примерные рабочие программы к ним и фонды оценочных средств, что позволяет организовать единое образовательное пространство вузов на территории РФ и унифицировать подготовку педагогов-предметников. В «Ядре» отражено 75 % всего учебного времени (инвариантный компонент), 4 % отведено на Государственную итоговую аттестацию, а 21 % – на часть, формируемую вузами самостоятельно (вариативный компонент).

К сожалению, в «Ядро» по профилю подготовки «Математика» не вошла дисциплина «История математики». Анализ соответствующих учебных планов для набора 2022 г. показал, что некоторые вузы нашей страны не стали вводить эту дисциплину в образовательный процесс будущих учителей математики.

Этот шаг является крайне опрометчивым, поскольку именно история математики позволяет студенту увидеть математику «в целом» и понять закономерности ее развития. Она крайне важна в подготовке учителя математики, так как показывает, что ученик в процессе освоения математики проходит весь путь, по которому шло ее развитие, и для него оказываются трудными именно те вопросы, которые вызвали затруднение в реальной истории. Поэтому учитель должен использовать генетический метод, избрав естественный путь обучения растущего ребенка.

История математики демонстрирует объективные закономерности развития математической науки, прослеживает, как возникли математические понятия, как развивались идеи и методы математики, какие периоды она прошла до современного состояния. Она показывает, что:

- математика не является порождением чистого разума, а возникла из практики;
- математика развивалась от конкретного к абстрактному, и степень ее абстрактности менялась с течением времени;

• доказательство как основной метод математики появилось лишь на определенной стадии ее развития.

В результате освоения дисциплины «История математики» у студента педагогического вуза происходит формирование историко-математической компетенции, которая включает следующие компоненты.

Знать: основные этапы развития математики в контексте социальной истории общества в ее взаимодействии с другими науками и техникой.

Уметь: видеть решаемую задачу и раздел математики, к которой она относится, в исторической перспективе, оценивать их место в современной математике.

Владеть: необходимой для учителя математики историко-математической культурой, позволяющей адекватно оценивать настоящее и возможные перспективы развития математической науки.

Объем часов, отводимых на изучение этой дисциплины, в учебных планах вузов колеблется от 36 до 108. Основное содержание дисциплины «История математики», излагаемое в педагогическом университете, отражено в следующей таблице [1].

Таблица 1

Основное содержание дисциплины «История математики» в педагогическом вузе

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Математика как наука и учебный предмет. Периодизация истории математики	Общая характеристика математики как науки и учебного предмета. Основные периоды развития математической науки.
2	Период зарождения математики (до VI–V вв. до н. э.)	Общая характеристика периода зарождения математики. Возникновение понятия числа в древнем мире. Системы счисления. Математика основных древних цивилизаций.
3	Период математики постоянных величин, или элементарной математики (VI–V вв. до н. э. – XVII в.)	Математика Древней Греции VI–IV вв. до н. э. Первые натурфилософские школы. Фалес Милетский. Пифагор, основы его философского учения. Евклид и его «Начала». Открытие иррациональностей. Расширение понятия числа. - Формирование геометрической алгебры как выход из кризиса. Три знаменитые задачи древности. Первые исследования конических сечений. Теория конических сечений Аполлония (III–II вв. до н. э.). Клавдий Птолемей (ок. 100–178 гг.) и его «Альмагест». Диофант (III в.). Арифметизация алгебры. Гипатия (370–415). Закат греческой математики. Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (ок. 783–ок. 850) и его математические труды. «Восточный Птолемей» Абу Райхан Бируни (973–ок. 1050). Омар Хайям (ок. 1048–1131) – великий ученый и поэт Востока. Насир ад-Дин Туси (1201–1274) – выдающийся мыслитель, ученый-энциклопедист, математик и астроном XIII в. Самаркандская научная школа. Улугбек (1394–1449). Краткая характеристика европейской науки в средние века. «Век великих переводов». - Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180–1240) и его «Книга абака». Основные события XV в., способствовавшие пробуждению научной мысли в области математики. Первые самостоятельные открытия в области математики в Европе. Выдающиеся ученые XV–XVI вв. Решение уравнений 3-й и 4-й степеней. Сципиондель Ферро (1465–1526), Николо Тарталья (ок. 1499–1557), Дж. Кардано (1501–1576), Л. Феррари (1526–1565). Появление комплексных чисел. Р. Бомбелли (ок. 1530–1572). Совершенствование алгебраической символики. Франсуа Виет (1540–1603).
4	Период создания математики переменных величин (XVII–середина XIX в.)	Общая характеристика науки XVII в. Дальнейшая математизация естествознания. Теория Коперника (1473–1543) и ее развитие в XVII в. Первые математические описания движения как предпосылки введения переменной в математику. Создание аналитической геометрии Р. Декартом (1596–1650) и П. Ферма (1601–1665).

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела
		Интеграционные методы И. Кеплера (1571–1630), Б. Кавальери (ок. 1598–1647), Э. Торричелли (1608–1647). Дифференциальные методы Ж. Т. Роберваля (1602–1673), Э. Торричелли, Р. Декарта, П. Ферма. Возникновение дифференциального и интегрального исчисления. И. Ньютон (1643–1727) и Г. В. Лейбниц (1646–1716). • Швейцарские математики Бернулли – ученики Лейбница. • Леонард Эйлер (1707–1783) – величайший математик восемнадцатого столетия. Энциклопедисты. Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783). Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – теоретическая механика.
5	Период современной математики	• Происхождение теории групп. • Нильс Хенрик Абель (1802–1829), Эварист Галуа (1811–1832). • Неевклидовы геометрии. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). • Теория множеств Георга Кантора (1845–1918). • Влияние ЭВМ на развитие математики.

История математики дает учителю дополнительное средство развития логического мышления учащихся.

Использование историко-математического материала – это надежный методический прием, вызывающий интерес к учебному предмету даже у тех учащихся, которые не имеют к нему особых способностей.

Кроме того, те молодые педагоги, у которых в учебном плане отсутствовал курс истории математики, будут испытывать явные затруднения при выполнении Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования [3], выделяющего в качестве одного из предметных результатов изучения математики в школе умение описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки; приводить примеры математических открытий и их авторов в отечественной и всемирной истории. Таким образом, ФГОС ОО в явном виде нацеливает учителя на использование исторического компонента при обучении школьников математике.

Разумеется, что для выполнения этого требования учитель математики должен обладать хорошей подготовкой в области истории математики.

На педагогических направлениях при изучении курса истории математики-студенты не только знакомятся непосредственно с самой историей математики, но и узнают о методических аспектах ее изложения в школе, работают с многообразием соответствующей литературы, информацию из которой они будут использовать в своей профессиональной деятельности.

Список литературы

1. Игнатушина И. В., Асланов Р. М. О курсе истории математики в педагогическом вузе // Вестник Набережночелнинского государственного педагогического университета : сб. научных трудов. Вып. 2 (27). Набережные Челны : НГПУ, 2020. С. 24–27.

2. Методические рекомендации по подготовке кадров по программам педагогического бакалавриата на основе единых подходов к их структуре и содержанию («Ядро высшего педагогического образования») (Одобрено Коллегией Министерства просвещения Российской Федерации 25 ноября 2021 г.). URL: <https://apkprou.ru/upload/docs/Методические%20рекомендации.pdf>.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287). URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/#1000>.

Is the history of mathematics necessary in the preparation of future teachers of mathematics?

I. V. Ignatushina¹, R. M. Aslanov²

¹PhD in Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, associate professor, Orenburg State Pedagogical University. Russia, Orenburg. ORCID: 0000-0001-9641-9962. E-mail: streleec@yandex.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences. Azerbaijan, Baku. ORCID:0000-0001-5237-7158. E-mail: r_aslanov@list.ru

Abstract. The paper examines the discipline of the history of mathematics, its role and place in the training of mathematics teachers. The main content of the discipline "History of mathematics", studied in the direction of bachelor's degree "Pedagogical education", profile "Mathematics", is presented. The authors analyzed the subject-methodical module "The Core of higher pedagogical education" and the corresponding curricula for the set of 2022 for the content of the discipline "History of Mathematics" in them and made the appropriate conclusions. It is noted that as a result of mastering the discipline "History of Mathematics", a student of a pedagogical university develops a historical and mathematical competence, the decomposition of which is presented in detail in the article. It is shown what negative consequences the removal of this discipline from the training of future teachers of mathematics leads to. In particular, the fact that young teachers who did not have a course in the history of mathematics in the curriculum will experience obvious difficulties in fulfilling the Federal State Educational Standard.

Keywords: history of mathematics, training of teachers of mathematics.

References

1. Ignatushina I. V., Aslanov R. M. *O kurse istorii matematiki v pedagogicheskom vuze* [About the course of the history of mathematics at a pedagogical university] // *Vestnik Naberezhnochelninskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta : sb. nauchnykh trudov* – Herald of Naberezhnye Chelny State Pedagogical University : collection of scientific papers. Is. 2 (27). Naberezhnye Chelny. NSPU. 2020. Pp. 24–27.
2. *Metodicheskie rekomendacii po podgotovke kadrov po programmam pedagogicheskogo bakalavriata na osnove edinykh podhodov k ih strukture i sodержaniyu ("Yadro vysshego pedagogicheskogo obrazovaniya")* – Methodological recommendations for training personnel for pedagogical bachelor's degree programs based on unified approaches to their structure and content ("Core of higher pedagogical education") (Approved by the Board of the Ministry of Education of the Russian Federation on November 25, 2021). Available at: <https://apkpro.ru/upload/docs/Методические%20рекомендации.pdf>.
3. Federal State Educational Standard of Basic General Education (approved by Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 287 dated May 31, 2021). Available at: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/#1000> (in Russ.).

О применении общих методов для решения стереометрических задач

И. В. Блудова

кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Университетская гимназия (школа-интернат) МГУ им. М. В. Ломоносова.
Россия, г. Москва. E-mail: irina.bludova@school.msu.ru

Аннотация. Для решения стереометрических задач удобно строить так называемый «нормальный треугольник». Эта простая конструкция дает общие методы решения задач и очень удобна с методической точки зрения, особенно на этапе формирования пространственных представлений учащихся. В статье даны определение нормального треугольника, план его построения и рассмотрено применение метода нормального треугольника для решения задач. Термин «нормальный треугольник» впервые применила Н. Г. Окромешко. Несмотря на то, что данная конструкция не претендует на рассмотрение всех классических приемов решения задач, она оказалась очень удобной и для обучающихся, и для учителей. Классические методы не только позволяют решать стереометрические задачи, но и являются содержательной основой векторных методов.

Ключевые слова: нормальный треугольник, классические методы решения стереометрических задач.

Для решения стереометрических задач, связанных с вычислением:

- угла между плоскостями;
- площадей сечений многогранников;
- расстояния от точки до плоскости;
- расстояния между скрещивающимися прямыми;

а также в задачах, связанных с построением:

- ортогональной проекции точки на плоскость;
- общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым;
- перпендикулярных сечений многогранников (через данную точку перпендикулярно заданной прямой и через данную прямую перпендикулярно заданной плоскости)

удобно применять конструкцию, основой которой служит метод построения нормального к двум неортогональным пересекающимся плоскостям треугольника. Эта конструкция, конечно, не является единственным приемом для решения перечисленных выше задач, но дает общие методы решения и достаточно простая, чтобы быть доступной обычному школьнику, знающему геометрию в пределах обязательного школьного курса. Разумеется, что в ряде случаев для решения названных задач наиболее оптимально применение векторных методов. По существу, уровень овладения предметом определяется способностью в каждом конкретном случае найти простейший способ решения задачи, а для этого необходимо знать и уметь применять на практике различные методы.

Сформулируем свойства нормального треугольника и дадим план его построения.

Нормальным треугольником к двум неортогональным пересекающимся плоскостям называется треугольник, который лежит в плоскости, перпендикулярной заданным плоскостям. При этом один из его катетов является нормалью к одной из плоскостей, а высота, опущенная на гипотенузу, является нормалью к другой плоскости. Гипотенуза и второй катет образуют линейный угол двугранного угла между данными плоскостями. Для построения нормального треугольника для пересекающихся неортогональных плоскостей α и β можно воспользоваться следующим планом:

1. Строим линию пересечения плоскостей α и β , $l = \alpha \cap \beta$ (рис. 1).

2. В одной из данных плоскостей, например в плоскости α , выбираем «удобную» точку M и опускаем из нее перпендикуляр на вторую плоскость; $M \in \alpha$, $MM' \perp \beta$, $M' \in \beta$ (рис. 2).

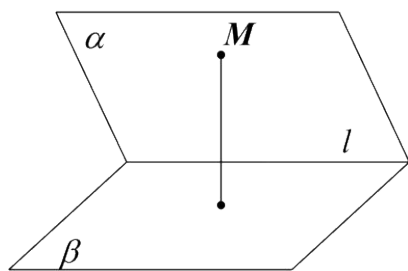


Рис. 1. Линия пересечения

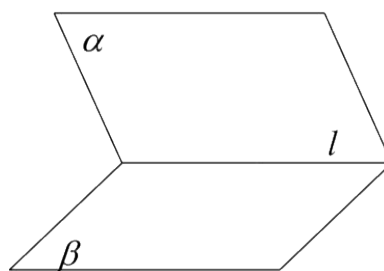


Рис. 2. Перпендикуляр к β

3. Из точки M' в плоскости β опускаем перпендикуляр на линию пересечения плоскостей (рис. 3): $M'K \perp l, K \in l$.

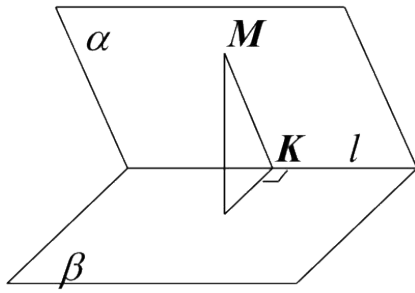


Рис. 3. Построение

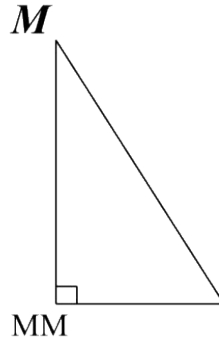


Рис. 4. Выносной чертеж

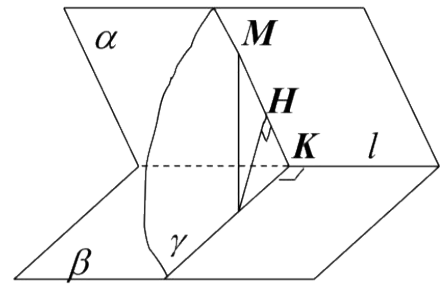


Рис. 5. Плоскость γ

4. Соединяем точки M и K . Получаем прямоугольный треугольник $MM'K$ с прямым углом M (рис. 4).

Легко доказать, что построенный таким образом треугольник $MM'K$ является нормальным треугольником для плоскостей α и β .

Заметим, что если решается задача не на построение, а на вычисление, то изображение точки K (см. п. 3) и точки H – основания высоты, опущенной на гипотенузу, осуществляется не по правилам параллельного проектирования, здесь допустим схематический рисунок. Если же решается задача на построение, то положение точек K и H нужно выяснить точно с помощью вычислений, а затем построить эти точки.

Если при решении конкретной задачи одной из плоскостей α и β является основание многогранника (призмы или пирамиды), то именно эту плоскость удобно принять в качестве плоскости β , поскольку в этом случае ортогональное проектирование на плоскость β параллельно высоте многогранника.

После того как нормальный треугольник построен, начинается расчетная часть задачи.

Заметим еще, что для двух пересекающихся неортогональных плоскостей α и β можно построить бесконечно много нормальных треугольников, но все они имеют параллельные соответственные стороны, поэтому все они **подобны**! А в связи с этим, если задача сводится к построению перпендикуляра из данной точки (M') на плоскость (α) или только к вычислению длины этого перпендикуляра, то не обязательно строить нормальный треугольник, у которого вершиной прямого угла является именно эта точка (M'). Можно построить и произвести все расчеты для треугольника $M_1M'_1K'$, у которого вершиной прямого угла является другая «удобная» точка M'_1 . Затем придется вычислить коэффициент подобия k «удобного» и «желаемого» треугольников и вычислить $M'H = \rho(M', \alpha)$ по формуле:

$$M'H = k \cdot M'_1H'.$$

Все названные выше задачи в большинстве случаев сводятся к построению нормальных треугольников и вычислению их элементов:

- угла, если требуется найти угол между плоскостями;
- высоты, опущенной на гипотенузу, если требуется вычислить расстояние от точки до плоскости;
- отношения, в котором основание данной высоты делит гипотенузу, если строится ортогональная проекция этой точки на плоскость.

Продemonстрируем применение нормальных треугольников для решения некоторых задач.

Задача 1.

Основанием треугольной пирамиды $TABC$ является прямоугольный треугольник ABC , в котором величина угла A равна 60° , а длина гипотенузы AB равна a . Высота пирамиды совпадает с ребром TA . Угол между прямыми TB и CB равен 45° . Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD основания и пересекающей боковое ребро TC .

Решение.

Нам надо из бесконечного множества треугольников с общим основанием AD и вершиной N , лежащей на ребре TC , выбрать треугольник с наименьшей площадью (рис. 6). Точнее, нужно вычислить его площадь.

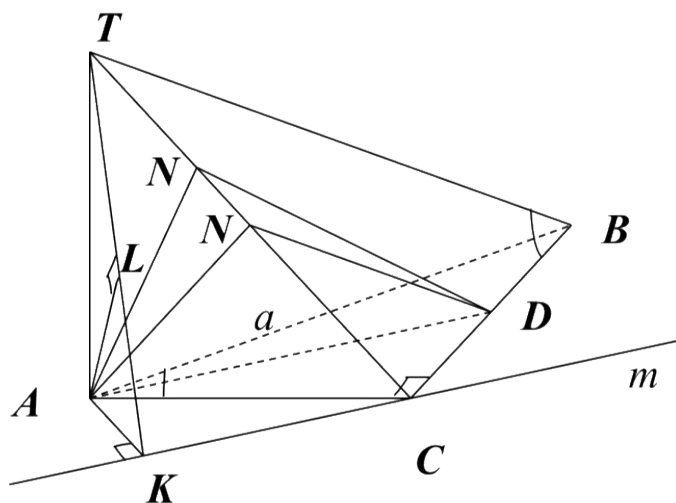


Рис. 6. Задача 1

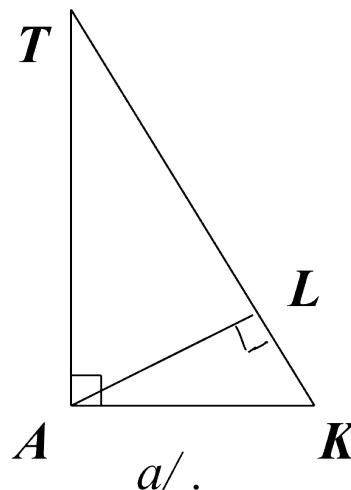


Рис. 7. Нормальный треугольник

Пусть S – площадь треугольника ADN , тогда $S = \frac{1}{2}AD \cdot NH$, где NH – высота, опущенная из вершины N на основание AD . Мы видим, что площадь будет наименьшей у треугольника с наименьшей высотой NH .

Очевидно, что если отрезок NH будет перпендикулярен не только AD , но и TC , т. е. будет общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AD и TC , то его длина будет наименьшей. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми, т. е.

$NH_{\text{наим}} = \rho(AD, TC)$. Вычислим это расстояние. Известно, что $\rho(AD, TC) = \rho(A, \alpha)$, здесь α есть плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые TC и m , где $m \parallel AD$ и $A \in m$.

Обозначим через β плоскость нижнего основания ABC пирамиды. Так как $A \in \beta$ и $TA \perp \beta$, то $\rho(A, \alpha)$ есть длина высоты, опущенной из вершины прямого угла A на гипотенузу нормального треугольника для плоскостей α и β . Построим нормальный треугольник для α и β (рис. 6).

1. $\alpha \cap \beta = m$.
2. $T \in \alpha$.
3. $TA \perp \beta$.
4. $AK \perp m$.
5. Треугольник TAK – нормальный для α и β .

Пусть $AL \perp TK$, тогда $AL = \rho(A, \alpha) = \rho(AD, TC) = NH_{\text{наим}}$. Вычислим AL , для этого сначала надо будет вычислить катеты AK и TA треугольника TAK (рис. 7).

Так как $\angle ABC = 30^\circ$, то $AC = \frac{a}{2}$. Так как AD – биссектриса угла A (рис. 8), то $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, т. е. $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$.

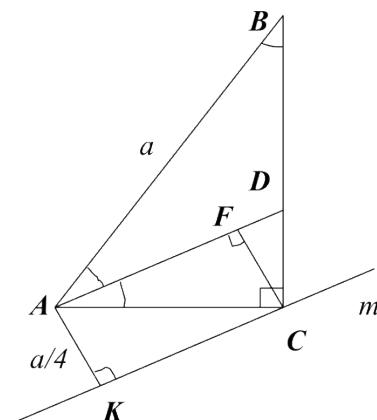


Рис. 8. Планиметрический фрагмент

Далее, $CF \perp AD$, $AK = CF = \frac{a}{4}$.

В треугольнике ADC имеем:

$$DC = AC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда $AD = 2DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Треугольник $TСВ$ – прямоугольный и равнобедренный (так как по теореме о трех перпендикулярах из того, что $AC = \text{пр}_\beta TC$, а $BC \perp AC$, следует, что $BC \perp TC$. Кроме того, по условию $\angle TBC = 45^\circ$). Отсюда получаем:

$$TC = BC = 3 \cdot DC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим треугольник TAC . В нем $AT^2 = TC^2 - AC^2 = \frac{a^2}{2}$. Следовательно, $AT = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Теперь, когда катеты нормального треугольника TAK известны, вычислим его высоту AL .

Так как $AL \cdot TK = AK \cdot AT$, то $AL = \frac{AK \cdot AT}{\sqrt{AK^2 + AT^2}} = \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Теперь осталось вычислить

$$S_{\text{НАИМ}} = \frac{1}{2} AD \cdot AL = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^2}{6\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{6\sqrt{6}}$.

Задача 2.

Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через медиану AM боковой грани ASB и параллельной высоте ST боковой грани ASC , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{3}$, а расстояние от центра основания пирамиды до секущей плоскости равно $\sqrt{\frac{1}{32}}$.

Решение.

Построим сечение пирамиды плоскостью α , такой, что $AM \subset \alpha$, $ST \parallel \alpha$. Для этого в плоскости STB проведем прямую MK такую, что $MK \parallel ST$, $K \in TB$. Плоскость α проходит через пересекающиеся прямые AM и MK . Прямые AK и BC пересекаются в точке F . Треугольник AFM – искомое сечение (рис. 10).

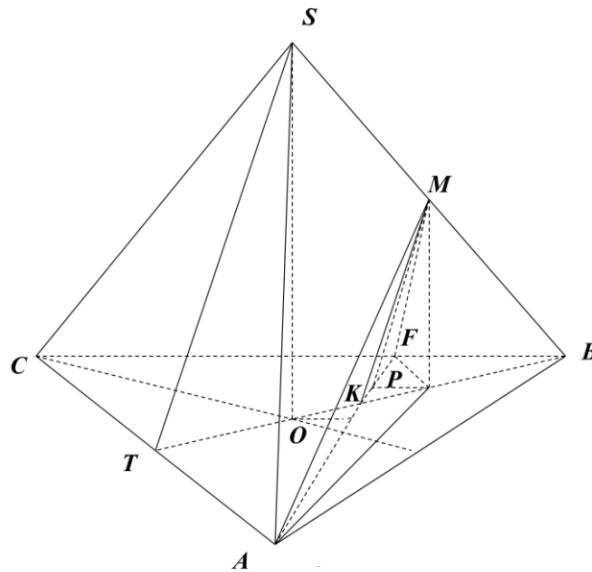


Рис. 9. Задача 2

Для вычисления площади сечения воспользуемся формулой:

$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \phi}$, где ϕ есть угол между секущей плоскостью α и плоскостью β нижнего основания пирамиды.

Треугольник AM_1F , где $M_1 = \text{пр}_\beta M$, является ортогональной проекцией треугольника AMF на плоскость β .

Построим «удобный» нормальный треугольник для плоскостей α и β .

- 1) $\alpha \cap \beta = AF$.
- 2) $M \in \alpha$.
- 3) $MM_1 \perp \beta$.
- 4) $M_1P \perp AF$.
- 5) $\triangle MM_1P$ – нормальный для α и β (рис. 11).

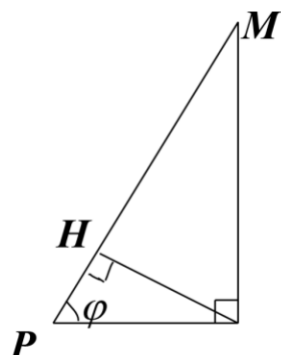


Рис. 10. Нормальный треугольник

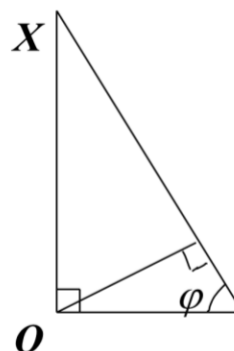


Рис. 11. Неудобный треугольник

По свойству нормального треугольника имеем: $\angle MPM_1 = \phi = \angle(\alpha; \beta)$.

Высота M_1H равна расстоянию $\rho(M_1; \alpha)$ от точки M_1 до плоскости α , а в условии известно расстояние $\rho(O; \alpha)$ от центра основания пирамиды O до плоскости α .

Нормальный треугольник для плоскостей α и β с вершиной прямого угла в точке O строить неудобно, но мы знаем, что такой треугольник XOP_1 (рис. 12) существует и он подобен треугольнику MM_1P .

Вычислим коэффициент подобия этих треугольников:

$$k = \frac{OP_1}{M_1P}.$$

Для этого сделаем выносной чертеж нижнего основания (рис. 13). Так как отрезок MK есть средняя линия треугольника TSB , то K – середина TB . Точка M_1 – середина отрезка OB (т. к. MM_1 есть средняя линия треугольника SOB). Таким образом, $TO = OM_1 = M_1B$ и, следовательно, $OK = KM_1$. Мы получили, что прямоугольные треугольники OP_1K и M_1PK равны, поэтому $OP_1 = M_1P$. Следовательно, нормальные треугольники MM_1P и XOP_1 также равны и $M_1H = \sqrt{\frac{1}{32}}$. Теперь для вычисления $\cos \phi$ достаточно вычислить, например, катет PM_1 нормального треугольника MM_1P .

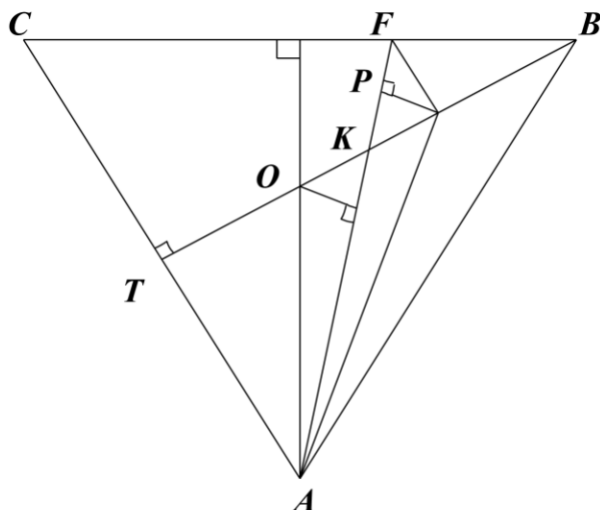


Рис. 12. Нижнее основание

Это будет нетрудно сделать после того, как будет известна площадь проекции, т. е. площадь треугольника AFM_1 . Заметим, что $S_{np} = S_{\Delta AFM_1} = S_{\Delta AFB} - S_{\Delta FBM_1} - S_{\Delta M_1BA}$.

Чтобы воспользоваться этим фактом, выясним, в каком отношении точка F делит отрезок QB , где Q – середина BC . Применим теорему Менелая для ΔQBO и прямой AK . Прямая AK пересекает стороны QB и BO треугольника ΔQBO соответственно в точках F и K и пересекает продолжение стороны QO в точке A .

Поэтому $\frac{QF}{FB} \cdot \frac{BK}{KO} \cdot \frac{OA}{AQ} = 1$. Так как $\frac{BK}{KO} = \frac{3}{1}$, а $\frac{OA}{AQ} = \frac{2}{3}$, то $\frac{QF}{FB} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$. Отсюда имеем: $\frac{QF}{FB} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $FB = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta FBA} = \frac{1}{2}FB \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, так как

$$AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

$$S_{\Delta FBM_1} = \frac{1}{2} \cdot FB \cdot BM_1 \sin \angle FBM_1 = \frac{1}{2} \cdot FB \cdot BM_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8\sqrt{3}}.$$

$$S_{\Delta BM_1A} = \frac{1}{2}BM_1 \cdot BA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Тогда $S_{\Delta AFM_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$, т. е. $S_{np} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Вычислим теперь AF из треугольника AFB по теореме косинусов, получим: $AF = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Из равенства $S_{\Delta AFM_1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AF \cdot PM_1$ вычислим PM_1 . Получим: $PM_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Рассмотрим снова нормальный треугольник MM_1P . По теореме Пифагора

$$PH = \sqrt{PM_1^2 - M_1H^2} = \frac{1}{4\sqrt{14}}.$$

Осталось вычислить $\cos \phi$ и площадь сечения.

$$\cos \phi = \frac{PH}{PM_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}; S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \phi} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6} (e\partial^2)$.

Список литературы

1. Геометрия 10 класса в вопросах и задачах / Блудова И. В., Бугрова М. И., Граськин С. С., Гутнер М. Е. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007.
2. Ортогональное проектирование / Окромешко Н. Г., Дегтярёва И. Г., Родников А. В., Подпорина О. А. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.

On the application of general methods for solving stereometric problems

I. V. Bludova

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University,
University Gymnasium (boarding school) Lomonosov Moscow State University.
Russia, Moscow. E-mail: irina.bludova@school.msu.ru

Abstract. To solve stereometric problems, it is convenient to build a so-called "normal triangle". This simple construction provides general methods for solving problems and is very convenient from a methodological point of view, especially at the stage of forming spatial representations of students. The article gives the definition of a normal triangle, a plan for its construction and considers the application of the normal triangle method to solve problems. The term "normal triangle" was first used by N. G. Okromeshko. Despite the fact that this design does not pretend to consider all the classical methods of solving problems, it turned out to be very convenient for both students and teachers. Classical methods not only allow us to solve stereometric problems, but also are the substantial basis of vector methods.

Keywords: normal triangle, classical methods for solving stereometric problems.

References

1. *Geometriya 10 klassa v voprosah i zadachah* [Geometry of the 10th grade in questions and problems] / Bludova I. V., Bugrova M. I., Gras'kin S. S., Gutner M. E. M. Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 2007.
2. *Ortogonal'noe proektirovanie* [Orthogonal design] / Okromeshko N. G., Degtyaryova I. G., Rodnikov A. V., Podporina O. A. M. Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 2003.

Включение игровых механик в обучение математике для повышения познавательной активности школьников

Н. А. Бояринцева¹, Е. С. Трефилова²

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, декан факультета компьютерных и физико-математических наук, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-9709-1804. E-mail: na_bushmeleva@vyatsu.ru

²старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11265@vyatsu.ru

Аннотация. Развитие познавательной активности обучающихся в цифровой школе – актуальное научно-методическое направление в сфере информатизации образования. Современные требования общества к качеству подготовки выпускников, сформированности soft skills обуславливают необходимость поиска новых методов и средств, способных создавать дополнительные условия для повышения качества обучения, в том числе и по математике. Использование игровых элементов в образовании соответствует международным рекомендациям ЮНЕСКО и целям устойчивого развития, приоритетам проекта «Современная цифровая образовательная среда», познавательным потребностям и психологическим особенностям подростков поколений «Z» и «Альфа». В статье для активизации учебно-познавательной деятельности школьников при обучении математике предлагается использовать игровые механики, включающие наборы правил взаимодействия и методов применения цифровых сервисов. Методология исследования основывается на анализе потенциала игрофикации для образования, для поддержки инициатив ЮНЕСКО, для выявления проблем их внедрения в обучение математике. В качестве результатов описаны ключевые идеи применения игровых элементов в математическом образовании и особенности практической реализации некоторых механик.

Ключевые слова: игрофикация, цифровая школа, образовательная среда, математическая деятельность, игровая технология, информационный ресурс, качество обучения.

Рекомендации ЮНЕСКО – международные правила в сфере образования, определяют, что инновационные педагогические технологии и цифровые сервисы позволяют существенно расширить и улучшить возможности для обучения в самых разных условиях [5]. Кроме того, в российской системе образования требования к уровню сформированности компетенций выпускников школы сформулированы в положениях федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (далее – ФГОС ООО) [2], паспорта национальных проектов «Современная школа», «Успех каждого ребенка», «Цифровая образовательная среда», «Молодые профессионалы (Повышение конкурентоспособности профессионального образования)» как частей проекта «Образование» [1].

Эти положения во многом совпадают с рекомендациями ЮНЕСКО и определяют приоритетные направления, которыми руководствуются педагоги-новаторы при разработке уроков, систем задач и соответствующих информационных образовательных ресурсов. В частности, согласно указанным положениям, педагогу цифровой школы рекомендуется использовать информационные технологии для организации творческой, проектной, совместной деятельности обучающихся. Будущий выпускник должен быть способен применять технологические новации и ресурсы Интернет для проверки математических гипотез, поиска математических фактов и решения математических задач.

1. Основные понятия исследования

Важнейшим принципом современного образования является стимулирование познавательной активности подростков, так называемых психологами поколений «Z» и «Альфа», путем применения инновационных педагогических и компьютерных технологий. Особенностью таких подростков является «клиповость» мышления. Это проявляется через их увлечение видеоиграми, короткими сюжетами, анимационными роликами. Возникают методические трудности организации процесса обучения и подготовки выпускников для нового цифрового общества: падение интереса школьников к изучению теоретического материала (математических понятий, фактов законов и тому подобное), усталость и раздражение после длительной рутинной работы при математических вычислениях, отвлечение внимания на внешние факторы, неконтролируемую активность в социальных сетях, чатах мобильных игр.

В науке проблемы повышения познавательной активности обучающихся подробно исследованы в работах Г. И. Щукиной [9]. По ее выводам познавательная активность является устойчивой

духовной потребностью школьника. Эти идеи развиваются Т. В. Сясиной применительно к изучению теоретических положений учебного материала по математике, его практического приложения, проявления волевых усилий по достижению образовательных математических целей [8].

В. В. Слепушкин предлагает для развития познавательной активности обучающихся использовать различные электронные средства обучения [3]. По его заключениям, в условиях комплексной информатизации общества появляются новые ресурсы, способные повысить качество математического образования. Например, С. С. Стадник, К. А. Паладян убедительно доказывают, что цифровая среда обучения наиболее эффективно реализует обозначенные выше возможности при поддержке ресурсов геймификации [6].

Е. В. Соболева, В. А. Суровцева, обобщая практический опыт, заключают, что для обучения математике игровые ресурсы образовательного назначения практически не разрабатываются [5]. Выбор интерактивной технологии и цифрового сервиса остается за преподавателем. По их выводам, современная информационная среда для эффективного обучения математике должна ориентироваться на новые реалии дидактики; предоставлять возможности адаптации к конкретным особенностям предмета.

В то же время, по заключению ЮНЕСКО, технология игрофикации может стать основой современной стратегии преподавания для новых цифровых школ XXI в. [7]. Игровые технологии позволяют создавать именно небольшие по длительности истории, вызывающие интерес и эмоциональную вовлеченность учеников, поддерживающие формирование прочных ассоциативных связей [4]. При этом подключаются дополнительные механизмы запоминания, оказывающие больший дидактический эффект, чем теоретические факты и абстрактные рассуждения.

В общем случае под игровой механикой следует понимать набор правил и способов, поддерживающих интерактивное взаимодействие участников игровой образовательной среды и самого пространства игры (персонажи, дизайн, сюжет).

2. Применение игровых механик при обучении математике

Для практической реализации игровых механик были выбраны механики «Достижение», «Совместное исследование», «Сдерживающие факторы», «Весело один раз – весело всегда», «Прогресс пользователя».

2.1. Механику «Достижение» можно реализовать при изучении системы параграфов, разделов теоретического материала. Например, если в главе учебника есть 24 параграфа с вопросами и заданиями, 2 контрольные работы и как минимум 3 теста. В дополнение могут использоваться электронные учебники, тесты, задания с подробным объяснением.

Педагогу полезно ввести отдельную систему оценивания. Баллы можно распределить, например, следующим образом:

- за ответ на вопрос по теории школьник может максимально получить 2 балла (ответ полный и правильный, уверенный);
- за полную и правильно самостоятельно решенную задачу школьник может максимально получить 3 балла (методически правильное решение, то есть есть краткая запись, подробное решение, ответ в нужных единицах измерения);
- дополнительный доклад по темам – максимум 3 балла (доклад структурированный, правильно оформленный, с логическим и обоснованным выводом);
- по результатам двух контрольных работ школьник может максимально получить 48 баллов;
- правильное выполнение тестовых заданий – обучающиеся получают по 1 баллу.

В результате использования данной механики у каждого ученика будет свой балловый рейтинг, по итогам которого педагог выберет 3-х победителей с наибольшим количеством баллов. Для победителей призами могут выступать: определенное число использования гаджетов на уроках, обращение к учебнику во время следующей контрольной работы, а для остальных участников – увеличение времени на подготовку и защиту проекта.

По желанию педагог может включить в игровую механику уровни, если обучающиеся плохо написали промежуточную проверочную или контрольную работу.

2.2. Механику «Совместное исследование» можно предложить для решения практико-ориентированных задач. Например, для задачи по поиску высоты дерева (если известны длина тени и рост исследователя). Местом игры может быть школьный стадион или ближайший парк (аллея). Педагогу необходимо заранее разделить всех обучающихся класса на 3–4 группы. Можно использовать следующие приемы:

- жребий с цветными флэш-картами ([ресурс https://color.adobe.com/ru/explore](https://color.adobe.com/ru/explore));
 - цифровой сервис для деления на группы (например, <https://ciox.ru/split-a-list-into-groups>).
- Этот онлайн-ресурс работает на основе списка класса (имена с фамилиями, где каждый новый

участник вводится с новой строки). Также можно указать, на сколько человек будет происходить деление группы.

Каждой команде необходимо выбрать капитана, название команды и распределить роли (систематизатор, теоретик, измеритель, стенографист, корректор и тому подобное).

В назначенный день школьники приходят на урок. Педагог определяет деревья, которые необходимо измерить для каждой команды. Идет четкое объяснение правил, целей и задач на игру. Приборы и материалы, необходимые для игры: несколько рулеток или длинных линеек на команду, раздаточный материал с теорией и объяснением, таблица для записи результатов измерений и расчетов, ручка и карандаш.

Такое занятие предоставит следующие дополнительные возможности:

- сплотить коллектив;
- проявить физическую активность;
- проверить исследовательские способности;
- навыки нестандартного мышления (например, находить выход из затруднительной ситуации);
- получить новые математические знания в игровой форме.

Для домашнего задания предлагаем отдельную методическую рекомендацию: представить и оформить материалы в электронных таблицах. Например, в OpenOffice.Org Calc (рис. 1).

Высота человека (м)	Длина тени от дерева (м)	Длина тени от человека (м)	Высота дерева (м)
?	3	0,6	9
1,7	2,5	16	?

Рис. 1. Пример оформления результатов по механике «Совместное исследование»

Победителями будут все те участники команд, которые успешно справятся с измерениями, оформлением, расчетом и представлением результатов в информационной среде. Награждение для победителей может быть произведено в форме, описанной ранее для механики «Достижение».

Рекомендации по выполнению механики «Совместное исследование»:

- заранее оповещать обучающихся о возможности изучения материала в такой форме, учитывать физиологические особенности и познавательные интересы;
- предварительно разделить школьников на команды, распределить роли;
- обсудить правила игры и исключить их двоякое толкование;
- предоставить материал для самостоятельного дополнительного изучения теории по теме исследования;
- позаботиться о мерах защиты и охране здоровья.

2.3. Для реализации игровой механики «Сдерживающие факторы» опишем содержание игры «Контакт».

Учитель загадывает математическое понятие (существительное, нарицательное, единственного числа) и называет вслух его первую букву. Задача школьников – отгадать слово, вспоминая другие слова на эту букву, задавая о них вопросы и проверяя, не то ли понятие загадал педагог. Задача учителя – как можно дольше не открывать игрокам следующие буквы в слове. Например, загадан математический термин, факт, ученый на букву «Д». Кто-то из игроков задает вопрос: «Это не он придумал систему координат?» Ведущий должен оперативно сообразить, что имеет в виду игрок, и сказать: «Нет, это не «Декарт» (если это и был «Декарт», то следует в этом признаться). Но параллельно о том же самом думают и другие игроки. И если они раньше ведущего понимают, что имеется в виду «Декарт», то говорят: «контакт» или «есть контакт». Далее школьники начинают хором считать до десяти. Пока идет счет, у ведущего есть возможность сохранить репутацию и назвать, что именно «угадали» участники. Затем игроки называют слово. Если хотя бы два мнения совпали, то есть на счет «десять» школьники вместе сказали: «Декарт», то учитель должен раскрыть следующую букву. Таким образом, новый вариант будет начинаться на известные теперь буквы «Д» + следующая. Если обыграть на этом вопросе ведущего не удалось, то отгадывающие предлагают новый вариант.

Обязательное условие игры при реализации механики «Сдерживающие факторы» – «контакт» между двумя учащимися.

2.4. Механика «Весело один раз – весело всегда» может быть использована для активизации полученных ранее знаний. Обучающиеся, передвигаясь к доске, на каждый шаг называют термин,

понятие, явление и так далее из изученного ранее материала. Например, тема «Системы счисления». Участник шагает к доске. И каждый шаг сопровождается перечислением понятий, видов систем счисления. Условие реализации механики «Весело один раз – весело всегда» – учащиеся повторяют одно и то же простое действие (шаг, поворот, взмах веером) несколько раз.

2.5. Механика «Прогресс пользователя» позволяет в игровой форме проводить проверку качества запоминания школьниками математических правил, алгоритмов.

Игра проводится в классе, для нее необходимо следующее оборудование: математические приборы, интерактивная или школьная доска для записей.

Ход игры:

1. Педагог с помощью генератора случайных чисел (<https://randomus.ru/>) определяет главного персонажа – Игрока.

2. Когда Игрок нашелся, то ему необходимо выйти на время из класса. В это время педагог подготавливает инструменты: (мел, циркуль и так далее). Все приборы необходимо разложить на столе хаотично.

3. Педагог негромко называет теоремы, правила, алгоритмы, методы, которые Игрок может проверить имеющимися инструментами. Все остальные участники единогласно выбирают один – например, алгоритм деления отрезка пополам. Далее следует продумать практические ситуации, в которых этот алгоритм может пригодиться (на даче, в строительстве, в путешествиях).

4. Игрок приглашается в аудиторию. Педагог объясняет, что он должен сделать (найти необходимые инструменты; отгадать алгоритм, о котором говорят одноклассники). Игрок находит нужные инструменты и называет их.

5. Далее остальные ученики рассказывают применение этого метода, алгоритма в жизни, а Игрок формулирует свои догадки.

6. Если Игрок понял, что это за алгоритм / метод, то демонстрирует его реализацию на практике с помощью выбранных инструментов. Для записи теоретического материала можно использовать следующие цифровые доски (<https://limnu.com/>, <https://www.twiddla.com/>).

Механика помогает выполнить проверку остаточных знаний. За урок можно провести две или три игры с разными методами, теоремами и инструментами. Такая игра развивает логику, интеллектуальные способности, формирует коммуникативные умения, навыки владения математическими и цифровыми инструментами.

Рекомендации по выполнению механики «Прогресс пользователя»:

- педагог имеет право прервать игру в любой момент, если замечает, что Игрок не справляется;
- не следует применять наказание для Игрока, если он не может ответить на какой-нибудь вопрос или не может быстро сообразить, как выполнить задание;
- следить за тем, чтобы никто из учеников не раскрыл заранее ключевые понятия, названия явлений и законов;
- не торопиться помогать Игроку, если он запутался. Предоставить фиксированное время на обдумывание или пересмотр решения;
- предусмотреть наказание для тех, кто неслучайно проговорился о ключевых словах, действиях Игроку.

Таким образом, в работе обоснован дидактический потенциал игрофикации при обучении математике, выявлены и описаны возможности конкретных игровых механик для повышения познавательной активности школьников. Реализация игровых механик не привязана к конкретным УМК, темам или разделам школьной математики, чтобы продемонстрировать именно универсальный характер предлагаемого методического подхода.

Список литературы

1. Паспорт национального проекта «Образование» (утв. президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол от 24.12.2018 № 16). URL: <https://vg.ms-kobr.ru/files/2022/prof-of-pedagoga-dopobr/004.pasport-natsionalnogo-proekta-obrazovanie.pdf> (дата обращения: 11.01.2023).
2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027> (дата обращения: 11.01.2023).
3. Слепушкин В. В. Модель формирования познавательной активности обучающихся на основе применения электронных средств обучения // Ценности и смыслы. 2021. № 2 (72). С. 121–128. DOI: 10.24412/2071-6427-2021-2-121-128.
4. Соболева Е. В., Караваев Н. Л., Перевозчикова М. С. Совершенствование содержания подготовки учителей к разработке и применению компьютерных игр в обучении // Вестник Новосибирского государственного

педагогического университета. 2017. № 6. С. 54–70. URL: <http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1706.04> (дата обращения: 11.05.2022).

5. Соболева Е. В., Суровцева В. А. Применение мобильных технологий для развития познавательной активности учащихся при решении практико-ориентированных задач по математике // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2020. № 4 (апрель). С. 1–22. URL: <http://e-koncept.ru/2020/201023.htm>.

6. Стадник С. С. Педагогические условия и методические основы внедрения компьютерных дидактических игр в процесс обучения математике // Перспективы науки. 2021. № 12 (147). С. 134–138.

7. Структура ИКТ-компетентности учителей. Рекомендации Юнеско. URL: <https://iite.unesco.org/pics/publications/ru/files/3214694.pdf> (дата обращения: 11.01.2023).

8. Сякина Т. В. Исследование познавательной активности будущих инженеров в процессе обучения математике // Общество: социология, психология, педагогика. 2021. № 3(83). С. 125–129. DOI: 10.24158/spp.2021.3.21.

9. Щукина Г. И. Активизация познавательной деятельности в учебном процессе. М.: Просвещение, 1979. 160 с.

Inclusion of game mechanics in teaching mathematics to increase the cognitive activity of schoolchildren

N. A. Boyarintseva¹, E. S. Trefilova²

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Dean of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences, Vyatka State University.

Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-9709-1804. E-mail: na_bushmeleva@vyatsu.ru

²senior lecturer of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University.

Russia, Kirov. E-mail: usr11265@vyatsu.ru

Abstract. The development of cognitive activity of students in a digital school is an actual scientific and methodological direction in the field of informatization of education. Modern society's requirements for the quality of graduate training, the formation of soft skills necessitate the search for new methods and tools that can create additional conditions for improving the quality of education, including in mathematics. The use of game elements in education complies with UNESCO's international recommendations and the Sustainable Development Goals, the priorities of the Modern Digital Educational Environment project, the cognitive needs and psychological characteristics of adolescents of the "Z" and "Alpha" generations. In the article, to activate the educational and cognitive activity of schoolchildren in teaching mathematics, it is proposed to use game mechanics, including sets of rules for interaction and methods of using digital services. The methodology of the research is based on the analysis of the potential of gamification for education, to support UNESCO initiatives, to identify problems of their implementation in teaching mathematics. The results describe the key ideas of the use of game elements in mathematical education and the features of the practical implementation of some mechanics.

Keywords: gamification, digital school, educational environment, mathematical activity, game technology, information resource, quality of education.

References

1. *Pasport nacional'nogo proekta "Obrazovanie"* (utv. prezidiumom Soveta pri Prezidente RF po strategicheskomu razvitiyu i nacional'nym proektam, protokol ot 24.12.2018 № 16) – Passport of the national project "Education" (approved by the Presidium of the Presidential Council for Strategic Development and National Projects, Protocol No. 16 dated 24.12.2018). Available at: <https://vg.mskobr.ru/files/2022/prof-of-pedagoga-dopobr/004.pasport-nacional-nogo-proekta-obrazovanie.pdf> (date accessed: 11.01.2023).

2. *Prikaz Ministerstva prosveshcheniya Rossijskoj Federacii ot 31.05.2021 № 287 "Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta osnovnogo obshchego obrazovaniya"* – Order of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 287 dated 31.05.2021 "On Approval of the Federal State Educational Standard of the basic General education". Available at: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027> (date accessed: 11.01.2023).

3. Slepushkin V. V. *Model' formirovaniya poznavatel'noj aktivnosti obuchayushchihsy na osnove primeneniya elektronnykh sredstv obucheniya* [Model of formation of cognitive activity of students based on the use of electronic learning tools] // *Cennosti i smysly* – Values and meanings. 2021. No. 2 (72). Pp. 121–128. DOI: 10.24412/2071-6427-2021-2-121-128.

4. Soboлева Е. В., Караваяев Н. Л., Перевозчикова М. С. *Sovershenstvovanie soderzhaniya podgotovki uchitelej k razrabotke i primeneniyu komp'yuternykh igr v obuchenii* [Improving the content of teacher training for the development and application of computer games in education] // *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – Herald of the Novosibirsk State Pedagogical University. 2017. No. 6. Pp. 54–70. Available at: <http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1706.04> (date accessed: 05.11.2022).

5. Soboлева Е. В., Суровцева В. А. *Primenenie mobil'nykh tekhnologij dlya razvitiya poznavatel'noj aktivnosti uchashchihsya pri reshenii praktiko-orientirovannykh zadach po matematike* [Application of mobile technologies for the

development of cognitive activity of students in solving practice-oriented problems in mathematics] // *Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal "Koncept"* – Scientific and methodological electronic journal "Concept". 2020. No. 4 (April). Pp. 1–22. Available at: <http://e-koncept.ru/2020/201023.htm>.

6. Stadnik S. S. *Pedagogicheskie usloviya i metodicheskie osnovy vnedreniya komp'yuternyh didakticheskikh igr v process obucheniya matematike* [Pedagogical conditions and methodological foundations of the introduction of computer didactic games in the process of teaching mathematics] // *Perspektivy nauki* – Prospects of Science. 2021. No. 12 (147). Pp. 134–138.

7. *Struktura IKT-kompetentnosti uchitelej. Rekomendacii Yunesko* – The structure of ICT competence of teachers. Unesco recommendations. Available at: <https://iite.unesco.org/pics/publications/ru/files/3214694.pdf> (date accessed: 11.01.2023).

8. Syasina T. V. *Issledovanie poznavatel'noj aktivnosti budushchih inzhenerov v processe obucheniya matematike* [Research of cognitive activity of future engineers in the process of teaching mathematics] // *Obshchestvo: sociologiya, psihologiya, pedagogika* – Society: sociology, psychology, pedagogy. 2021. No. 3(83). Pp. 125–129. DOI: 10.24158/sPp.2021.3.21.

9. Shchukina G. I. *Aktivizaciya poznavatel'noj deyatel'nosti v uchebnom processe* [Activation of cognitive activity in the educational process]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1979. 160 p.

Моделирование структуры математических учебных текстов

М. В. Воронов

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики,
Московский государственный психолого-педагогический университет.
Россия, г. Москва. ORCID: 0000-0002-0691-7245. E-mail: mivoronov@yandex.ru

Аннотация. Разработка программно-технических средств процессов обучения становится все более актуальной задачей. Для их создания объекты моделирования предварительно должны быть представлены в формальном виде. Поскольку наиболее важными образовательными средствами являются учебные тексты, возникает задача разработки моделей, в формализованном виде отображающих учебные тексты. Особенности построения учебных текстов способствуют решению вопросов формализованного построения структуры представленных в них знаний. В статье анализируется структура построения учебных текстов, вводятся понятия учебный элемент и квант знаний. Предложена конструктивная модель формирования структуры знаний, представленных в рассматриваемом учебном тексте. Обсуждаются возможности приложения математических моделей структуры знаний для решения вопросов оценки качества учебных текстов и образовательных программ в целом, а также вопросы создания компьютеризированной среды поддержки самоподготовки обучающихся.

Ключевые слова: учебный текст, содержание, структура знаний, модель.

1. Постановка задачи

В самом общем случае структуру любого текста можно рассматривать как совокупность связанных между собой его частей. Причем в связях аккумулируется весьма существенная часть содержания текста. Не составляют исключения и учебные тексты в целом и математические тексты в особенности.

Обладание сведениями о структуре учебного материала обеспечивает возможность более эффективного решения целого ряда педагогических задач, что обуславливает актуальность создания средств работы с этими материалами всех участников образовательного процесса в автоматизированном режиме. Центральным на этом пути шагом является разработка модели структуры учебных материалов, представленных в виде текста.

Именно учебный текст представляет собой определенным образом организованную и представленную в виде текста информацию (учебный материал), как средство обучения он ориентирован на усвоение обучаемым соответствующих знаний, умений, навыков (здесь будем использовать термин «знание» как обобщенное имя всех трех этих понятий).

Структурно учебный текст чаще всего есть последовательность отдельных вложенных друг в друга частей (рубрик). Например, разделы состоят из глав, которые состоят из параграфов, а последние из пунктов и так далее. Фрагмент текста в каждой из этих рубрик посвящен изложению определенной и относительно самостоятельной части осваиваемого материала [5]. Тем самым учебные тексты отображают упорядоченный набор фрагментов знаний, которые содержательно в той или иной мере связаны между собой. Обычно процесс обучения и реализуется в соответствии с порядком следования рубрик.

В свою очередь даже самая небольшая из рубрицированных частей текста представляет собой последовательность еще более мелких фрагментов. Самый мелкомасштабный с образовательной точки зрения представленный в данном тексте фрагмент будем называть учебным элементом. Учебный элемент – это подлежащая усвоению логически законченная информация, как правило, получившая при введении свое имя и воспринимаемая в дальнейшем как неделимый фрагмент знаний. К учебным элементам обычно относят: определения понятий и их свойства, а также отдельные факты, формулы, правила, принципы, процедуры и тому подобное. Важно отметить, что каждый учебный элемент является носителем уникальной в рамках данного текста информации [4].

После своего усвоения учебный элемент должен восприниматься обучаемым как носящая атомарный характер целостность. При упоминании его имени у него в сознании должна актуализироваться информация, усвоенная при знакомстве с соответствующим учебным элементом.

Для удобства последующего изложения рассмотренные и обработанные (представленные в формализованном виде и включенные в модель) учебные элементы будем называть квантами знаний. При таком понимании квантов знаний они могут служить «строительным материалом» для построения новых подлежащих усвоению учебных элементов. В этом случае при формировании

новых учебных элементов между несколькими определенными квантами знаний устанавливаются соответствующие связи. Тем самым вся совокупность представленных в учебном тексте квантов знаний и множество связей между ними образуют определенную знаниевую структуру, которая является предметом нашего рассмотрения.

Поставлена задача: для рассматриваемого учебного текста сформировать представленную в формальном виде его знаниевую структуру.

2. Построение модели структуры знаний учебного текста

Присутствующие в учебном тексте элементы знаний по способу своего введения могут быть двух видов. К первым, назовем их исходными, отнесем те, относительно которых сделано предположение, что обучаемый знаком с ними до начала изучения данного материала (это первичные для данного текста учебные элементы). Предполагается, например, что студент имеет знания, включенные в программу полной средней школы. Другие учебные элементы, назовем их осваиваемыми, формируются в ходе изложения учебного материала из учебных элементов, введенных в данном тексте выше и/или относящихся к исходным.

В этой связи с позиций педагогических технологий учебный текст представляет собой упорядоченную последовательность описания процедур введения все новых и новых взаимосвязанных и взаимообусловленных учебных элементов, а логика усвоения знаний построена на синтезе двух основных процессов: освоении обучаемым конкретных учебных элементов и формировании из них новых, обычно более сложных компонентов своих знаний.

Обратим внимание на последнее утверждение, суть которого в том, что в зависимости от ситуации осваиваемые учебные элементы формируются и используются по-разному. Так, формируются они из ранее освоенных элементов путем установления между ними отношений, образуя определенную, порой не тривиальную структуру. Однако в дальнейшем они же воспринимаются и используются чаще всего как носящие атомарный характер элементы знаний и идентифицируются по присвоенным им именам.

Например, учебный элемент, сообщающий об определении обратной матрицы, обычно сопровождается формулой:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

и текстом: обратной относительно некоторой исходной квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1} , произведение которой на матрицу A образует единичную матрицу E . Здесь для введения нового учебного элемента используются учебные элементы «квадратная матрица», «единичная матрица» и «умножение матриц». Понятно, что все эти три элемента знаний должны были быть введены на предыдущих этапах учебного процесса. Заметим, это непростые конструкты, но на данном этапе они уже выступают в качестве соответствующих квантов знаний. Эту двойственность и предполагается положить в основу идеи решения поставленной задачи.

Процедура обучения может ассоциироваться с процессом наращивания ориентированного графа – графа структуры усвоенных знаний. В этой связи решение поставленной задачи предлагается осуществлять в ходе реализации соответствующего конструктивного процесса, который представляет собой осуществление последовательности стандартных шагов: выявление из текста очередного учебного элемента, фиксация участвующих в его описании акторов (квантов знаний), формализация рассматриваемого учебного элемента в качестве нового кванта знаний и соответствующее наращивание формируемого графа.

Более строго схема реализации этих действий предполагает осуществление следующего алгоритма:

1. Рассматривается очередной фрагмент текста T_k . Если такового не обнаружено, переходят к п. 5. В противном случае субъект формирования модели устанавливает факт введения в этом фрагменте текста учебного элемента u_k (в противном случае переходит к рассмотрению следующего фрагмента текста) и начинается процедура формирования фрейма Φ_k , в котором будет фиксироваться информация о данном учебном элементе u_k .

Примечание. Множество исходных учебных элементов может быть сформировано заранее или решение о том, считать ли данный элемент знаний исходным, решает субъект (эксперт) в процессе построения модели.

2. Выявляется множество квантов знаний $KV_k = \{kv_{ik}\}$, ($i = 1, 2, \dots, i_k$), которые использованы при описании учебного элемента u_k в ролях акторов.

3. Вводимый учебный элемент фиксируется в качестве элемента формируемой структуры под номером k ($u_k \rightarrow s_k$), получая статус кванта знаний s_k . Эта операция представляет собой формирование k – го фрейма (как новой вершины формируемого графа), в котором зафиксированы все кванты знаний, участвующие в формировании кванта s_k (все элементы множества KV_k), что соответствует введению входящих в k – ю вершину дуг.

4. Осуществляется проверка вхождения всех элементов KV_k в сформированную часть структуры рассматриваемого учебного текста, то есть проверяется условие:

$$\forall i: kv_{ik} \subseteq ST_k.$$

Если это условие нарушается (то есть $j: u_j \not\subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$, то это означает: учебный элемент, соответствующий кванту знаний kv_{jk} , не был введен в рассматриваемый учебный текст ранее, что свидетельствует о том, что нарушена последовательность изложения учебного материала или в нем соответствующий учебный элемент отсутствует (учебный текст изложен не с должной полнотой). Такого рода факты фиксируются. Переходят к п. 1.

5. Получена модель структуры рассматриваемого учебного текста

$$M = \{s_k, \{i, k\}, \{k, j\}\}, \forall i, j, k \in \overline{1, n},$$

которую можно интерпретировать как ориентированный граф, каждой вершине которого отвечает формализованная запись (фрейм) об отдельном учебном элементе текста с фиксацией очередности его введения в тексте и связях с другими учебными элементами.

Примечание. Поскольку учебные элементы вводятся в тексте последовательно, оправдано введение на множестве квантов знаний сквозной нумерации. Тем самым между вводимыми в тексте учебными элементами и квантами знаний построенной формальной структуры устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Кроме того, для каждого кванта знаний s_k обеспечена возможность однозначного нахождения всех квантов знаний $\{kv_{ik}\}$, освоение которых предшествует введению s_k .

Примечание. В различных местах учебных текстов могут использоваться омонимические и синонимичные термины, также встречаться дубликаты введения той или иной единицы знаний, содержательно представляющие собой повторы. Все такого рода факты должны фиксироваться [2]. Для этого, например, в описывающем данный квант знаний фрейм вводится слот, куда заносятся сведения о встретившихся в учебном тексте его синонимах. В дальнейшем это позволит строить процедуры выявления такого рода фактов, что может использоваться при построении приложений.

3. Приложения модели структуры знаний

Модель структуры представленных в исходном учебном тексте знаний позволит более эффективно решать ряд прикладных задач. В данной статье рассмотрим лишь две из них.

3.1. Анализ качества учебных текстов и образовательных программ

Учебные тексты не свободны от наличия разного рода недостатков системного и технического характера, в том числе противоречий и пробелов, нарушения последовательности изложения материала и др. [3].

Традиционно выявление такого рода недостатков проводится «вручную»: эксперт читает текст, находит и фиксирует найденные замечания, а затем, оценив множество последних, может сформулировать оценку анализируемого текста. Описанная выше модель позволяет создать средства, в существенной мере облегчающие решение такого рода задач.

Как отмечено выше, с помощью построенной для данного учебного текста модели могут быть выявлены логические разрывы двух типов: разрывы вследствие невведения всех необходимых для формирования данного учебного элемента «предшествующих» элементов знаний (конечно, исключая исходные) и вследствие нарушения порядка очередности их введения (данная учебная единица все же введена далее по тексту, но позднее, чем она была уже использована).

Поскольку имеется возможность точно указать, в каком месте текста обнаружены нарушения логики изложения и каких учебных единиц они касаются, появляется возможность оперативно устранять выявленные недостатки.

На основе полученной таким образом информации могут быть рассчитаны и другие показатели качества учебного текста. Это, например, количество введенных учебных элементов, уровень интенсивности использования каждого из них и др.

Подобного рода характеристики можно вводить для оценки качества не только отдельного учебного текста, но и всей совокупности учебных дисциплин учебного плана, ибо потребность структурирования содержания учебных программ в целом – весьма актуальная задача [6]. Для решения возникающих задач целесообразно применить предложенную модель к упорядоченной согласно учебному плану последовательности текстов, входящих в его состав учебных дисциплин. В результате будет получена оценка уровня непрерывности и непротиворечивости изложения учебного материала, что позволит оценить уровень полноты и согласованности подлежащих освоению знаний в ходе обучения по данной учебной программе в целом.

3.2. Создание среды поддержки самоподготовки

Использование представленной модели открывает новые возможности по созданию более эффективных средств поддержки учебного процесса. В частности, может быть построена система активной поддержки процесса обучения (САППО) [1].

Эта система помимо традиционных опций собственно информационной поддержки учебного процесса обеспечивает возможность осуществлять процедуры выявления «узких» мест в знаниях

обучаемого и предлагать ему в этой связи обоснованный ряд конкретных действий. Говоря об активности САППО, мы имеем в виду ее способности направлять и в некоторой мере заставлять обучаемого совершать целесообразные действия, причем эти действия относятся к конкретной учебной ситуации, в которой он оказался, то есть действовать по принципу «здесь и сейчас».

Рассмотрим одну из часто встречающихся ситуаций. Пусть обучаемый затрудняется ответить на определенный вопрос учебной программы. Как правило, это связано с невладением некоторыми элементами знаний. Пусть обучаемый не владеет учебным элементом u_k , что, например, обнаружено в результате проведения соответствующего теста. В этой ситуации САППО на основе рассмотренной выше модели формирует и поддерживает осуществление последовательности шагов, направленных на выявление корней этого незнания. Вначале определяется множество квантов $\{kv_{ik}\}$, непосредственное знание которых необходимо для ответа на поставленный вопрос, и обеспечивается проверка уровня усвоенности обучаемым каждого из них. Если при этом обнаруживается, что всеми kv_{ik} он владеет, то трудности обусловлены освоением непосредственно данной учебной единицы как таковой (обычно это связано с непониманием данного ее описания).

Если же среди элементов $\{kv_{ik}\}$ оказываются в недостаточной мере освоенные учебные элементы, то благодаря модели структуры знаний данного учебного текста определяются компоненты, знание которых необходимо для непосредственного понимания последних. Для каждого из них вновь производится проверка освоения соответствующих учебных элементов. Такого рода процесс продолжается до тех пор, пока обучаемый не дойдет до тех элементов, которые он освоил. В результате будет сформирована актуальная относительно сложившейся ситуации (для неосвоенного конкретного учебного элемента u_k) «структура незнания», на базе которой строится рекомендуемая траектория устранения выявленных пробелов знаний.

Тем самым система поддержки процессов самоподготовки на базе модели структуры знаний учебного материала показывая, разъясняя, одновременно контролируя и анализируя каждый шаг обучаемого, обладает возможностью в режиме реального времени выстраивать рациональную для него траекторию обучения и целенаправленно вести по ней обучаемого.

4. Заключение

Учебные тексты в целом и математические в первую очередь представляют собой множество связанных друг с другом и находящихся в отношении следования фрагментов знаний, что открывает возможности формализованного отображения формируемой ими знаниевой структуры. Таким отображением может выступать модель знаниевой структуры учебного текста, представляющая собой ориентированный граф, элементы которого отображают содержащиеся в тексте элементы знаний и взаимосвязи между ними.

Построение модели знаниевой структуры учебного текста осуществляется в ходе реализации конструктивного процесса, что позволяет отразить в этой модели композиционно-смысловой аспект учебного текста.

В модели использована фреймовая форма представления знаний. Это обеспечивает фиксацию в ней не только связей между элементами знаний, но и их описание, которое может быть представлено в любом виде (текст, формула, рисунок, график и тому подобное).

Процедура построения модели производится в автоматизированном режиме в соответствующей программно-технической среде, что обеспечивает удобство ее осуществления.

Наличие модели знаниевой структуры учебного текста расширяет возможности для разработки средств, обеспечивающих автоматизированный анализ учебных текстов, и реализацию новых более эффективных технологий поддержки процессов обучения.

Список литературы

1. Воронов М. В., Герасименко П. В., Письменский Г. И. Разработка виртуальной среды самостоятельной подготовки студентов // *Инновации в образовании*. 2017. № 9. С. 31–44.
2. Воронов М. В., Сафонов М. А. Оценка качества учебных курсов на основе математического моделирования // *Моделирование и анализ данных*. 2015. № 1. С. 20–26.
3. Долматов А. В., Долматова Л. А. Качество учебников: вызовы, новые требования, оценка, перспективы : сб. статей XXI Международной научно-практической конференции «Личность, общество, образование» / под ред. О. В. Ковальчук, А. Е. Марон, В. И. Реброва, Санкт-Петербург, 30 марта 2018 г. СПб. : Ленинградский областной институт развития образования, 2018. С. 71–85.
4. Лаврентьев Г. В., Лаврентьева Н. Б., Неудахина Н. А. Инновационные обучающие технологии в профессиональной подготовке специалистов : учеб. пособие. Ч. 2. Барнаул : Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2002. Т. 2. 323 с.
5. Сабина А. А. Учебный текст: структура и прагматика // *Известия РГПУ им. А. И. Герцена*. 2009. № 97. С. 222–225.
6. Шихнабиева Т. Ш. Методы структуризации знаний в интеллектуальных обучающих системах // *Казанский педагогический журнал*. 2014. № 6 (107). С. 14–21.

Modeling of the structure of mathematical educational texts

M. V. Voronov

Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of applied mathematics,
Moscow State Psychological and Pedagogical University.
Russia, Moscow. ORCID: 0000-0002-0691-7245. E-mail: mivoronov@yandex.ru

Abstract. The development of software and hardware tools for learning processes is becoming an increasingly urgent task. To create them, modeling objects must first be presented in a formal form. Since the most important educational tools are educational texts, the task arises of developing models that display educational texts in a formalized form. The features of the construction of educational texts contribute to solving the issues of formalized construction of the structure of the knowledge presented in them. The article analyzes the structure of the construction of educational texts, introduces the concepts of educational element and quantum of knowledge. A constructive model of the formation of the structure of knowledge presented in the considered educational text is proposed. The possibilities of applying mathematical models of the knowledge structure to solve issues of assessing the quality of educational texts and educational programs in general, as well as issues of creating a computerized environment to support self-training of students are discussed.

Keywords: educational text, content, knowledge structure, model.

References

1. Voronov M. V., Gerasimenko P. V., Pis'menskij G. I. *Razrabotka virtual'noj sredy samostoyatel'noj podgotovki studentov* [Development of a virtual environment for independent training of students] // *Innovacii v obrazovanii* – Innovations in education. 2017. No. 9. Pp. 31–44.
2. Voronov M. V., Safonov M. A. *Ocenka kachestva uchebnyh kursov na osnove matematicheskogo modelirovaniya* [Assessment of the quality of training courses based on mathematical modeling] // *Modelirovanie i analiz dannyh* – Modeling and data analysis. 2015. No. 1. Pp. 20–26.
3. Dolmatov A. V., Dolmatova L. A. *Kachestvo uchebnikov: vyzovy, novye trebovaniya, ocenka, perspektivy : sb. statej XXI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Lichnost', obshchestvo, obrazovanie"* [Textbook quality: challenges, new requirements, assessment, prospects : collection of articles of the XXI International Scientific and Practical Conference "Personality, Society, education"] / ed. by O. V. Kovalchuk, A. E. Maron, V. I. Rebrova. St. Petersburg, March 30, 2018, SPb. Leningrad Regional Institute of Education Development. 2018. Pp. 71–85.
4. Lavrent'ev G. V., Lavrent'eva N. B., Neudahina N. A. *Innovacionnye obuchayushchie tekhnologii v professional'noj podgotovke specialistov : ucheb. posobie. Ch. 2* [Innovative teaching technologies in professional training of specialists : textbook. Part 2]. Barnaul. Publishing house of the Altai State University. 2002. Vol. 2. 323 p.
5. Sabinina A. A. *Uchebnyj tekst: struktura i pragmatika* [Educational text: structure and pragmatics] // *Izvestiya RGPU im. A. I. Gercena* – News of RSPU n. a. A. I. Herzen. 2009. No. 97. Pp. 222–225.
6. Shihnabieva T. Sh. *Metody strukturizacii znaniy v intellektual'nyh obuchayushchih sistemah* [Methods of structuring knowledge in intellectual learning systems] // *Kazanskij pedagogicheskij zhurnal* – Kazan Pedagogical Journal. 2014. No. 6 (107). Pp. 14–21.

Мировоззренчески ориентированные задачи как средство мировоззренческого обучения математическим дисциплинам будущих специалистов

А. И. Дзундза¹, И. А. Моисеенко², В. А. Цапов³

¹доктор педагогических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики,
Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0003-1950-3735. E-mail: alladzundza@mail.ru

²доктор физико-математических наук, профессор,

декан факультета математики и информационных технологий, Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0001-9115-7801. E-mail: mia@donnu.ru

³кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет.

Россия, г. Донецк. ORCID: 0000-0001-5260-7769. E-mail: tsapva@mail.ru

Аннотация. В статье организация мировоззренческого обучения математическим дисциплинам презентуется как актуальная и своевременная задача проектирования методических и методологических основ профессионального образования. Представлена типологизация одного из эффективных средств мировоззренческого обучения математике – мировоззренчески ориентированных задач. Впервые предложен авторский подход к определению феномена «основная и перевернутая задача». Особое внимание уделяется обоснованию целесообразности использования основных и перевернутых задач в процессе преподавания математических дисциплин. Приведены примеры использования таких задач в обучении студентов математическому анализу, дискретной математике, комплексному анализу, функциональному анализу с целью формирования у будущих специалистов навыков абстрагирования и принятия решений в условиях неопределенности, способности ориентироваться в областях практического применения математических теорий, умения интерпретировать математический результат с практической точки зрения.

Ключевые слова: мировоззренческое обучение математике, основная и перевернутая задачи.

Приоритет технократических ориентиров в векторе социокультурного развития человечества, безусловно, сужает нравственную составляющую личностной сферы молодежи. С учетом этого проектирование мировоззренчески направленной профессиональной подготовки чрезвычайно ценно для общества. Традиционно задачи формирования мировоззрения обучающихся ставятся перед преподавателями гуманитарных дисциплин. Однако, на наш взгляд, математика также имеет мощнейший потенциал формирования эстетических, интеллектуально-познавательных, морально-волевых, патриотических мировоззренческих ориентиров. В научно-педагогической литературе представлено множество исследований, раскрывающих воспитательный потенциал математического обучения. В. М. Марченко выделяет возможности формирования особого стиля мышления студентов, позволяющего развивать интеллектуальную, моральную эмоционально-волевою сферы личности [5]. По мнению Р. Д. Борисовой, воспитание нравственности и деловых качеств заложено в содержании самого предмета математики [2]. С. И. Осипова, А. Т. Автухова, В. А. Косова в процессе обучения математике особо выделяют формирование волевых качеств студентов, таких как ответственность, целеустремленность, организованность, дисциплинированность [6]. Поэтому разработка основ мировоззренческого обучения математическим дисциплинам является актуальной и своевременной.

Целью мировоззренческого обучения математическим дисциплинам мы определяем формирование у студентов ценностно-ориентированных знаний, убеждений, идеалов, волевых установок и мотивов; творческого отношения к действительности; навыков самостоятельной учебной, научно-исследовательской и педагогической деятельности; вооружение студентов способами стимулирования, оценки и самооценки познавательной и развивающей активности [3].

В качестве одного из достаточно эффективных средств мировоззренческого обучения математическим дисциплинам мы применяем систему мировоззренчески ориентированных задач как задач, при решении которых реализуется мировоззренческий потенциал математики. Воспитывающую роль математических задач особо подчеркивал А. Я. Хинчин, утверждая, что решение математической задачи предусматривает создание специального рассуждения, которое ведет к цели, то есть является продуктивно-творческим актом [7]. В процессе преподавания дискретной математи-

ки, алгебры и геометрии, математического анализа, комплексного анализа, функционального анализа и других дисциплин мы используем следующие типы задач: задачи с недостающими данными; задачи с повышающейся или понижающейся сложностью; эстетически направленные задачи (направленные на формирование эстетического вкуса, выраженного средствами образного мышления и логической культуры); задачи на обобщение и классификацию математических подходов к их решению; задачи на геометрическую интерпретацию аналитических объектов; задачи на применение метода математического моделирования; занимательные задачи и задачи из литературных источников (например, А. П. Чехов «Репетитор», Л. Н. Толстой «Много ли человеку земли нужно?»); основную и перевернутые задачи.

Систему мировоззренчески ориентированных задач мы используем для а) организации учебной деятельности в аудитории, б) организации самостоятельной работы студентов, в) разработки учебных пособий, в) разработки дистанционных курсов. Задачи с недостающими или противоречивыми данными направлены на развитие познавательного интереса, инициативности, настойчивости у студентов. Задачи с повышающейся или понижающейся сложностью развивают мыслительную активность, самостоятельность и гибкость мышления, дисциплинированность, самоконтроль. Задачи на обобщение математических понятий и утверждений расширяют математический кругозор, переводят восприятие математических объектов на более высокий интеллектуальный уровень, демонстрируют емкость, лаконичность и точность математического языка, совершенство математических категорий. Задачи на геометрическую интерпретацию аналитических объектов направлены на формирование пространственного мышления, воспитания эстетических качеств, восприятия разделов математики как единого целого. Занимательные задачи позволяют включить в учебный процесс элементы историзма, познакомить студентов с биографическими фактами, нравственными и волевыми устремлениями отечественных и зарубежных ученых [1]. Задачи на применение метода математического моделирования направлены на развитие навыков математической абстракции, принятия решений в условиях неопределенности, способности ориентироваться в областях практического применения математических теорий, умения интерпретировать математический результат с практической точки зрения.

Достаточно высокую эффективность в мировоззренческом развитии студентов демонстрируют основные и перевернутые задачи [4]. Остановимся подробнее на анализе этого средства мировоззренческого обучения математике. Не стремясь в настоящей статье к абсолютной научной строгости, поясним кратко наше понимание феномена «основная и перевернутая задачи». В качестве основной мы используем любую корректную задачу из множества задач $Z = \{z_p\}_{p=1}^P$, (например, z_p – задача дифференцирования функции). При этом рассматриваются: множество $A = \{a_n\}_{n=1}^N$, состоящее из наборов исходных данных задачи (например, $a_n = tg\ x$); множество отображений (алгоритмов, методов решения) F_n , (например, нахождение производной одним из методов: по определению или с помощью таблицы производных); множество $B = \{b_n\}_{n=1}^N$, состоящее из наборов искомого значений (например, $b_n = \{\text{производная от } tg\ x\} = \frac{1}{\cos^2 x}$); набор отображений $\Phi = \{F_n\}_{n=1}^N$ множества A во множество B . Подчеркнем, что задача $z_p \in Z$ корректна, если существует функциональное отображение $F_n \in \Phi$, такое, что $F_n(a_n) = b_n$. Как известно, если для некоторой корректной задачи отображение $F_n \in \Phi$ является взаимно однозначным, то для нее существует обратная задача. В обратной задаче известен набор $b_n \in B$ (образ), а найти нужно его прообраз $a_n \in A$, используя обратное отображение $F_n^{-1} \in \Phi$.

Однако в целом ряде математических задач, в силу разных причин, отсутствует взаимная однозначность отображения множества образов во множество прообразов, то есть некоторому набору $b \in B$ может соответствовать несколько значений $a \in A$, что не позволяет формулировать корректную обратную задачу. В таких случаях мы и предлагаем рассматривать пару «основная и перевернутая задача».

Фабуну перевернутой задачи мы формулируем в обратной постановке к основной задаче. Для решения перевернутой задачи студенты должны по известному значению b_n из множества B найти какое-либо значение a_n (или несколько значений) из множества A , пользуясь определенным $F_n \in \Phi$. При этом a_n могут быть как произвольными, так и удовлетворять определенным ограничениям. С такой точки зрения понятие «пары основной и перевернутой задачи» в определенном смысле расширяет понятие «пары прямой и обратной задачи». Работа студентов с такими задачами в значительной степени способствует формированию у них интеллектуально-познавательных и морально-волевых качеств.

Например, в качестве основной задачи студентам предлагается найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2e^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$. Нужно указать какую-либо функ-

цию $y = f(x)$, график которой и линии $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ ограничивают криволинейную трапецию, имеющую площадь $S = 10e^3$. Естественно, что задача имеет бесконечно много решений (то есть, не является обратной). Студент, оказавшись в нестандартной ситуации неопределенности, старается проявить инициативность, решительность, подойти критически к выбору вида искомой функции. В некоторых учебных ситуациях целесообразно вводить определенные ограничения, например, функция должна быть линейной, но не постоянной. В качестве ответов студенты предлагали следующие функции $y = \frac{4}{5}e^3 \cdot x$, $y = \frac{4}{17}e^3(3x + 1)$ и др. Для активизации познавательного интереса мы ставили дополнительное условие, чтобы функция не была константой, но на концах имела одинаковые значения. В качестве ответов были предложены: $y = \frac{8}{5}e^3(2,5 - |x - 2,5|)$, $y = \frac{4}{5}e^3|5 - 2x|$.

В разделе теории множеств в качестве основной мы предлагаем задачу, в которой необходимо, применяя основные тождества алгебры множеств, упростить выражение: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

Очевидно, имеем: $(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$
 $= [(A \cup \bar{A}) \cap (B \cap C)] \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) =$
 $= [X \cap (B \cap C)] \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) = (B \cap C) \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) = (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = X$, здесь X – универсальное множество. В качестве перевернутой задачи мы предлагаем студентам следующую: «некоторое выражение алгебры множеств после упрощения равно универсальному множеству. Составьте пример такого выражения, используя при его упрощении 5 раз операцию объединения множеств, 2 раза операцию пересечения множеств и дважды операцию дополнения». Вызывает у студентов интерес также, например, такая перевернутая задача: «у булевой функции имеются всего пять тупиковых дизъюнктивных нормальных форм: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3$; $x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$; $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$; $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$; $x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$. Приведите пример такой функции (или нескольких функций) и ее сокращенную дизъюнктивную нормальную форму».

В процессе преподавания функционального анализа традиционно изучается следующая основная задача: «вычислить угол между элементами $x = t^2$ и $y = \sin t$ в пространстве $C[0, \pi]$ » (величина угла φ между элементами в гильбертовом пространстве вычисляется по формуле $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$). Студенты проявили интерес к следующей перевернутой задаче: «указать какие-либо функции, ортогональные в пространстве $C[a, b]$ (возможны варианты пространств $l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$) или расположенные под углом $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots$ друг к другу». Задачи не имеют единственного решения, что расширяет возможности для творчества. Значительную познавательную активность студенты проявили, когда мы ввели дополнительные ограничения на вид искомых функций (тригонометрические, степенные, показательные).

Решив основную задачу «Является ли компактным в $C[0, 1]$ оператор $(Ax)(t) = t \int_0^1 x(s)ds$ », студенты с увлечением решали, например, такую перевернутую задачу. Постройте какой-либо компактный оператор, действующий из l_2 в l_1 ($A: L_2[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$; $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$).

Приведем еще несколько вариантов перевернутых задач.

Укажите какие-либо функции, образующие равносторонний (прямоугольный) треугольник в пространстве $C[a, b]$ ($l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$).

Определите какой-либо оператор, отличный от тождественного, норма которого равна единице в пространстве $C[a, b]$ ($l_2, l_1, l_p, L_2[a, b], L_1[a, b], L_p[a, b]$).

Укажите какой-либо оператор, имеющий только дискретный спектр или только непрерывный спектр.

В процессе обучения комплексному анализу мы применяем перевернутые задачи следующего вида: «приведите пример функции, разлагающейся в ряд Лорана в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, указывая при этом конкретные значения чисел z_0, R_1, R_2 ». Основные задачи в этих примерах мы не приводим в силу их очевидности.

Заметим, что студенты активно участвуют не только в решении, но и составлении перевернутых задач.

Итак, использование системы мировоззренчески ориентированных задач в значительной мере способствует реализации целей мировоззренческого обучения математическим дисциплинам. Важным является то, что фабула таких задач направлена на формирование у студентов культуры смысловой и речевой коммуникации. Общеизвестно, что условие математической задачи принято излагать кратко, не перегружая его лишними содержательными единицами. Однако при этом нужно обозначить все необходимое и избавиться от лишнего. При работе с мировоззренчески ориентированными задачами будущий специалист приобретает навык краткого, четкого, логически обоснованного изложения своих мыслей, старается избегать математических символов, фраз, которые

не несут смысловой нагрузки. Развитие ясного и краткого математического стиля изложения своих мыслей, безусловно, способствует формированию мировоззренческих ориентиров. В фабулу мировоззренчески ориентированных задач мы включаем сведения о выдающихся отечественных ученых-математиках, исторические факты о старинных русских мерах, сюжеты из литературных источников, сведения о достижениях российских ученых (физиков, химиков, биологов и пр.), формируя при этом патриотический и нравственный ориентиры мировоззрения будущих специалистов. На наш взгляд, именно творческий характер составления и решения мировоззренчески ориентированных задач позволяет им выступать в качестве эффективного средства мировоззренческого обучения математике.

Список литературы

1. Баврин И. И., Фрибус Е. А. Старинные задачи : кн. для учащихся. М. : Просвещение, 1994. 128 с.
2. Борисова Р. Д. Усиление воспитательного потенциала уроков математики через слово : мат-лы региональной научно-методической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики в технических вузах». Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. С. 17–23.
3. Дзундза А. И., Цапов В. А. Математическое обучение как средство формирования мировоззрения будущих учителей математики : мат-лы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов». Брянск : Изд-во ИП Худовец Р. Г., 2021. С. 85–89.
4. Дзундза А. И., Цапов В. А. Профессионально-педагогические ориентиры в структуре системы мировоззренческих ориентиров будущих специалистов // Вестник Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. Вып. 39. Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). 2018. С. 58–68.
5. Марченко В. М., Борковская И. М., Пыжкова В. М. О развитии личностных качеств студентов при изучении математических дисциплин // Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 8. Учебно-методическая работа. 2014. № 8 (172). С. 43–47.
6. Осипова С. И., Автухова А. Т., Косова В. А. Воспитание личностных качеств студента в процессе обучения математике // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 4. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6556> (дата обращения: 08.10.2020).
7. Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Педагогические статьи. Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами. М. : КомКнига, 2013. С. 128–160.

Worldview-oriented tasks as a means of worldview teaching mathematical disciplines to future specialists

A. I. Dzundza¹, I. A. Moiseenko², V. A. Tsapov³

¹Doctor of Pedagogical Sciences, professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0003-1950-3735. E-mail: alladzundza@mail.ru

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Information Technology, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0001-9115-7801. E-mail: mia@donnu.ru

³PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Donetsk National University. Russia, Donetsk. ORCID: 0000-0001-5260-7769. E-mail: tsapva@mail.ru

Abstract. In the article, the organization of ideological teaching of mathematical disciplines is presented as an actual and timely task of designing methodological and methodological foundations of vocational education. The typologization of one of the effective means of worldview teaching mathematics – worldview-oriented tasks is presented. For the first time, the author's approach to the definition of the phenomenon of "the main and inverted task" is proposed. Special attention is paid to substantiating the feasibility of using basic and inverted problems in the process of teaching mathematical disciplines. Examples of the use of such tasks in teaching students mathematical analysis, discrete mathematics, complex analysis, functional analysis are given in order to form future specialists' skills of abstraction and decision-making in conditions of uncertainty, the ability to navigate in areas of practical application of mathematical theories, the ability to interpret mathematical results from a practical point of view.

Keywords: ideological teaching of mathematics, basic and inverted tasks.

References

1. Bavrini I. I., Fribus E. A. *Starinnye zadachi : kn. dlya uchashchihся* [Ancient tasks : a book for students]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1994. 128 p.
2. Borisova R. D. *Usilenie vospitatel'nogo potenciala urokov matematiki cherez slovo : mat-ly regional'noj nauchno-metodicheskoy konferencii "Aktual'nye problemy prepodavaniya matematiki v tekhnicheskikh vuzah"* [Strengthening the

educational potential of mathematics lessons through the word : materials of the regional scientific and methodological conference "Actual problems of teaching mathematics in technical universities"]. Tyumen. TSOHU. 2009. Pp. 17–23.

3. Dzundza A. I., Capov V. A. *Matematicheskoe obuchenie kak sredstvo formirovaniya mirovozzreniya budushchih uchitelej matematiki : mat-ly 40-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov "Razvitie obshchego i professional'nogo matematicheskogo obrazovaniya v sisteme nacional'nyh universitetov i pedagogicheskikh vuzov"* [Mathematical education as a means of forming the worldview of future teachers of mathematics : materials of the 40th International Scientific Seminar of teachers of mathematics and computer science of universities and pedagogical universities "Development of general and professional mathematical education in the system of national universities and pedagogical universities"]. Bryansk. Publishing house of IP Khudovets R. G. 2021. Pp. 85–89.

4. Dzundza A. I., Capov V. A. *Professional'no-pedagogicheskie orientiry v strukture sistemy mirovozzrencheskikh orientirov budushchih specialistov* [Professional and pedagogical guidelines in the structure of the system of ideological guidelines for future specialists] // *Vestnik Eleckogo gosudarstvennogo universiteta im. I. A. Bunina. Vyp. 39. Seriya "Pedagogika" (Istoriya i teoriya matematicheskogo obrazovaniya)* – Herald of I. A. Bunin Yelets State University. Is. 39. Series "Pedagogy" (History and theory of mathematical education). 2018. Pp. 58–68.

5. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M., Pyzhkova V. M. *O razvitii lichnostnykh kachestv studentov pri izuchenii matematicheskikh disciplin* [On the development of personal qualities of students in the study of mathematical disciplines] // *Trudy Belorusskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya 8. Uchebno-metodicheskaya rabota* – Proceedings of the Belarusian State Technological University. Series 8. Educational and methodical work. 2014. No. 8 (172). Pp. 43–47.

6. Osipova S. I., Avtuhova A. T., Kosova V. A. *Vospitanie lichnostnykh kachestv studenta v processe obucheniya matematike* [Education of personal qualities of a student in the process of teaching mathematics] // *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* – Modern problems of science and education. 2012. No. 4. Available at: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=6556> (date accessed: 08.10.2020).

7. Hinchin A. Ya. *O vospitatel'nom effekte urokov matematiki* [On the educational effect of mathematics lessons] // *Pedagogicheskie stat'i. Voprosy prepodavaniya matematiki. Bor'ba s metodicheskimi shtampami* – Pedagogical articles. Questions of teaching mathematics. Struggle with methodical stamps. M. KomKniga. 2013. Pp. 128–160.

Логическая компетентность специалиста

В. И. Игошин

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры геометрии,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Россия, г. Саратов. E-mail: igoshinvi@mail.ru

Аннотация. В статье обсуждается вопрос об очередной реформе отечественного высшего образования. Возможен ли возврат к советской системе высшего образования? Следует ли до основания разрушить систему болонскую? Размышлению над этими вопросами посвящена данная статья. Особое внимание обращается на компетентностный подход в высшем образовании. Детально рассматривается вопрос о логической компетентности, владение которой необходимо всякому специалисту, в какой бы сфере деятельности он ни работал. Логическая компетентность является собой неотъемлемую составную часть естественного человеческого интеллекта и в то же время служит фундаментальной теоретической основой для проектирования интеллекта искусственного. Логическая компетентность рассматривается как состоящая из трёх общелогических компетенций – умение логически грамотно оперировать с понятиями, умение логически грамотно оперировать с суждениями, способность к дедуктивной и индуктивной деятельности в соответствии с законами логики. Даются подробные характеристики трех общелогических компетенций, составляющих логическую компетентность специалиста, в форме структурно-содержательных моделей, состоящих из трех компонентов – когнитивного, деятельностного, ценностного.

Ключевые слова: советская и болонская системы высшего образования, компетентностный подход в образовании, компетенции и компетентность, общелогические компетенции и логическая компетентность.

Введение. В нашей стране вновь поднимается вопрос об очередной реформе отечественного высшего образования. Болонская двухуровневая система высшего образования, которая активно внедрялась в стране с начала XXI в., объявляется пройденным этапом. Какая система придет ей на смену? Можно ли что-нибудь вернуть из советской системы образования? Следует ли до основания разрушать систему болонскую? Какие инновации внести в новую российскую? Размышлению над этими вопросами посвящена данная статья. Особое внимание обращается на компетентностный подход в высшем образовании, являющийся неотъемлемым компонентом болонской системы. Детально рассматривается вопрос о логической компетентности, владение которой необходимо всякому специалисту, в какой бы сфере деятельности он ни работал. Логическая компетентность специалиста представляется как интерактивное качество его личности, состоящее из трех общелогических компетенций, имеющих ключевой характер, то есть относящихся к общему (метапредметному) содержанию образования. Даются подробные характеристики этих общелогических компетенций в форме структурно-содержательных моделей, состоящих из трех компонентов – когнитивного, деятельностного, ценностного.

О советской, болонской и российских системах высшего образования. Какая система высшего образования придет на смену болонской? Одни рьяно призывают возродить советскую систему высшего образования. Другие не менее рьяно, но пока только голословно призывают создать некую новую российскую систему высшего образования.

Ясно, что ни о каком возврате к советской системе высшего образования не может быть и речи, поскольку ни того общественного строя, ни той общественной атмосферы, в которых эта система создавалась и функционировала, давно уже нет в нашей стране. В подавляющем большинстве нет уже и тех ученых и педагогов, которые служили творцами и генераторами этой системы. Но в этом хоре есть и разумные голоса, и звучат разумные предложения.

Одно из таких разумных предложений состоит в том, что нужно внимательно присмотреться к тем направлениям, специальностям и профессиям, которые должно охватить высшее образование, и основательно подумать, сколько лет, а главное, чему и как учить будущих специалистов в той или иной области. А думать над этим должны специально созданные для этого Министерством образования и науки РФ научно-методические комиссии (советы). В них должны быть включены ведущие ученые и педагоги в соответствующих областях из всех вузов страны.

Не берусь судить о всей системе высшего образования в стране, но выскажу свое мнение о системе подготовки будущих учителей математики. Как отмечал еще Л. Н. Толстой, «математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении»

[17, с. 244]. К числу таких приемов человеческой мысли относятся умения определять понятия, формулировать суждения, делать умозаключения, анализировать и синтезировать, рассуждать, доказывать и опровергать. За две с половиной тысячи лет человечество пережило несметное количество научно-технических революций, но ни одна из них не отменила этих незыблемых основ человеческого мышления. Более того, именно потому, что эти основы сохранялись, развивались, передавались следующим поколениям и смогли происходить последующие все более и более впечатляющие революции в науке и в технике.

Обучить этим фундаментальным основам человеческого мышления сможет только учитель, профессионально к этому подготовленный и обученный. Вместе с таким обучением происходит неотделимое от него воспитание творческой мыслящей и созидательной личности. Всякий другой путь образования ведет к деструкции, к разрушению. Наиболее отчетливо и зримо эти приемы человеческого мышления, как заметил Л. Н. Толстой, предстают при обучении математике. Именно поэтому в современную школу (не просто в «образовательное учреждение», где оказывают образовательные услуги, а именно в школу, где учат и воспитывают), должны прийти высококвалифицированные и компетентные Учителя математики.

Подготовка таких учителей, подобно подготовке врачей, должна быть длительной и тщательно спланированной. Весьма целесообразной и плодотворной для этого оказывается двухуровневая система подготовки – бакалавриат и магистратура. При этом статус учителя-бакалавра и учителя-магистра должен быть четко определен на государственном уровне.

Каков же должен быть статус учителя-бакалавра и учителя-магистра, в частности, учителя математики? Уровень бакалавра следует условно подразделить на две ступени. Первая ступень (1–2 курсы) – образовательная, достаточно фундаментальная, преследующая также цели выравнивания и профориентации. Вторая ступень (3–4 курсы) обеспечивает образовательную и профессиональную подготовку наиболее массовой категории учителей-предметников для неполной средней школы. В зависимости от выбранного направления и успехов в обучении выпускник получает образовательную квалификацию «бакалавр педагогического образования» (по соответствующей специальности) и профессиональную квалификацию «учитель-бакалавр 5–9 классов» (по соответствующему предмету).

Третью ступень (магистратура 1–2 года) заканчивают около 25–30 % получивших степень бакалавра. Они получают профессиональную квалификацию «учитель-магистр 10–11 классов» (по соответствующему предмету). Учителя магистерского уровня призваны также пополнять контингент учителей, работающих в лицеях, гимназиях, колледжах и прочих специализированных школах и классах с углубленным изучением математики. Кроме того, магистратура позволит готовить преподавателей (учителей) для всех типов средних учебных заведений («магистр образования»), а также преподавателей вузов и научных работников в области методики преподавания соответствующих дисциплин («магистр наук»).

В соответствии со статусом должно вестись и обучение будущих учителей в высших учебных заведениях. Для этого должны быть разработаны соответствующие учебные планы, причем, единые для всех педагогических вузов и педагогических отделений классических университетов страны.

Дело в том, что современный ФГОС, основанный на компетентностной парадигме высшего образования, предоставил вузам право разрабатывать учебные планы по направлениям высшего образования. И каждый вуз делал это в меру своего разумения. В результате стало разрушаться единое образовательное пространство страны, и из вузов стали выпускаться не просто некомпетентные, а малограмотные учителя математики. Они стали выпускать из школ математически малограмотных школьников. Подробнее современное состояние математического образования в стране охарактеризовано в [2; 3].

Современное состояние математического образования в стране вполне сопоставимо с тем его состоянием, которое сложилось в Советском Союзе в конце 20-х гг. XX в., когда дореволюционная система образования была разрушена, а новая советская система еще не создана. «В ноябре 1929 г. пленум ЦК ВКП(б) поставил перед Наркомпросом задачу повысить уровень общеобразовательной подготовки учащихся. Решение задачи было найдено не на пути инноваций, а на пути восстановления традиций русской школы. Произошел возврат к *предметной* системе обучения, «точно очерченному кругу систематизированных знаний» в программах [21, с. 161] и единым *стабильным* учебникам. В 1935 г., выступая на Всероссийском совещании по вопросам преподавания математики в средней школе, инспектор ЦИК СССР проф. Фурсенко доложил: «Приемные испытания в высшую техническую школу Союза ССР и наблюдения над работой студентов 1 и 2 курсов показали, что с каждым годом имеется *несомненное* повышение уровня знаний поступающих в высшую школу по математике» [15, с. 32]» [14, с. 43].

Этим опытом полезно воспользоваться сейчас, при создании системы российского высшего образования. Первое, с чего следует начать – разработать единые для всех педагогических вузов и

педагогических отделений классических университетов учебные планы подготовки учителей-бакалавров и учителей-магистров. Эти планы должны быть профессионально педагогически ориентированы и тщательно сбалансированы и скоординированы. Они должны удовлетворять важнейшему педагогическому принципу – принципу преемственности: в них должна быть глубоко продумана преемственная взаимосвязь в образовательных системах двух уровней – бакалавриата и магистратуры с тем, чтобы подготовка учителя-магистра явилась естественным продолжением, развитием и углублением подготовки учителя-бакалавра в соответствии с теми задачами, которые предстоит решать будущему специалисту в образовательном процессе. В этих планах, в частности, должна быть осуществлена уровневая дифференциация изучаемых предметов, то есть по каждому предмету должно быть определено, какие его разделы изучаются на уровне бакалавриата, а какие – на уровне магистратуры. Некоторые соображения на этот счет в части подготовки учителей математики высказывались автором в [4–7, 20].

Такие учебные планы для высшего педагогического образования страны должны разрабатываться научно-методическими комиссиями (совета́ми) по соответствующим направлениям высшего образования. Войти в них должны ведущие ученые и педагоги по соответствующему направлению из всех вузов страны. Такие комиссии (советы) существовали при Министерстве образования и науки РФ, и в 2017 г. был обновлен Научно-методический совет по математике (секция педагогических вузов). В него вошли доктора физико-математических и педагогических наук профессора: Вечтомов Е. М. (Вятский ГУ), Деза Е. И. (МПГУ), Игошин В. И. (Саратовский ГУ), Калинин С. И. (Вятский ГУ), Малова И. Е. (Брянский ГУ), Нижников А. И. (МПГУ), Орлов В. В. (РГПУ), Перевощикова Е. Н. (Нижегородский ГПУ), Петерсон Л. Г. (Академия повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования), Саввина О. А. (Елецкий ГУ), Смирнова И. М. (МПГУ), Тарасова О. В. (Орловский ГУ), Тестов В. А. (Вологодский ГУ), Шкерина Л. В. (Красноярский ГПУ), Утеева Р. А. (Тольяттинский ГУ), Ястребов А. В. (Ярославский ГУ). Председателем совета был Смирнов В. А. (МПГУ). И совет начал работать, был составлен проект учебного плана для подготовки учителей математики на уровне бакалавриата. Но какая-то неведомая сила остановила работу совета. И как лучше не получилось, а пошло как всегда.

Хочется надеяться, что современные реалии, в которых оказалась наша страна и высшее образование в ней, явятся тем стимулом, который позволит совету при поддержке широкой общественности педагогических вузов начать свою работу и направить ее на совершенствование высшего педагогического образования в нашей стране, Министерство образования и науки РФ примет на вооружение рекомендации совета, и педагогические вузы и классические университеты будут выпускать из своих стен учителей математики, достойных нового времени.

О компетентностной парадигме высшего образования. Вместе с болонской системой в начале XXI в. в высшее образование России была привнесена концепция компетентностного подхода. В соответствии с ней требовалось обучать не тем или иным предметам и при их обучении учить знаниям, умениям и навыкам, как это происходило в советской системе образования, а формировать у будущих специалистов те или иные компетенции. Соответствующие компетенции и компетентности позиционируются как главные показатели готовности выпускника высшей школы к профессиональной деятельности в соответствующих областях.

Работа с объявленными ФГОС компетенциями началась в стране по двум направлениям. Первое направление оседлали деканаты вузов, которые и должны были претворять в жизнь министерские ФГОСы. Тут и началась совершенно бессмысленная и порочная деятельность – вгонять в прокрустово ложе компетентностных формулировок конкретные знания, умения и навыки по конкретным математическим дисциплинам, которыми должен овладеть будущий учитель-бакалавр и учитель-магистр математики за годы учебы в педагогическом вузе. Совершенно бессмысленно выражать новоявленными названиями знания определений предела, производной, интеграла, определителя, ранга матрицы, скалярного или векторного произведения векторов, кривизны кривой или поверхности и так далее. То же относится к умению вычислять определители, производные, интегралы, ранги матриц, скалярные и векторные произведения векторов, площади поверхностей и объемы тел и так далее, вычислять по различным формулам и алгоритмам значения различных величин и выражений. Далее началась самостоятельная разработка вузами учебных планов, то есть наполнение бессодержательных ФГОСов конкретным содержанием обучения. Если не уничтоженные в результате реформы педагогические вузы еще как-то пытались сохранить положительные содержательные традиции высшего педагогического образования, то современные классические университеты, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не имея опыта подготовки школьных учителей, действовали куда более решительно в худшем смысле этого слова, и действия их напоминали поведение слона в посудной лавке. При составлении учебных планов по собственному разумению резко сокращали курс геометрии, также решительно сокращали, а порой и исключали из образования будущих

учителей математики курсы математической логики, теории алгоритмов, дискретной математики. Давно исключен из учебных планов методологически важный для будущих учителей математики курс «Числовые системы». Обоснованием для такой кастрации послужила очередная образовательная инновация – переход на так называемый прикладной бакалавриат: учителям не нужна теория, отправим их с первого же курса на практику в школу, пусть учатся коммуницировать (!) с детьми. Бездумное применение этой инновации нанесло новый мощный сокрушительный удар по педагогическому и математическому образованию будущих учителей математики.

Более вдумчиво отнеслись к концепции компетентностного подхода в образовании ученые-педагоги страны. Они проанализировали эту концепцию и выработали ряд рекомендаций по ее реализации. Анализ исходного понятия показал, что компетенция в том или ином виде деятельности представляет собой интегративное качество личности, включающее в себя не только знания, умения и навыки, но и способность и готовность применить их в решении соответствующих профессиональных задач. Компетенции можно расклассифицировать по уровням их значимости [18]:

а) ключевые компетенции – относятся к общему (метапредметному) содержанию образования;

б) общепредметные компетенции – относятся к определенному кругу учебных предметов и образовательных областей;

в) предметные компетенции – являются частными по отношению к компетенциям двух предыдущих уровней, имеют конкретное описание и возможность формирования в рамках учебных предметов.

Далее в структуре компетенции выделяются три основных компонента: знаниевый (когнитивный), деятельностьный (праксиологический), ценностный (аксиологический) [1; 19]:

а) *знаниевый компонент* компетенции представляется знаниями в области реальных объектов, по отношению к которым вводится компетенция, а также в области методов, способов и приемов деятельности в сфере данной компетенции;

б) *деятельностный компонент* компетенции представляется умениями, навыками и способами деятельности в сфере компетенции;

в) *ценностный компонент* компетенции описывается через отношение обучаемого к деятельности в сфере компетенции (проявление интереса, понимание значения деятельности и ее результатов, ориентированность на получение результата).

Наконец компетентность специалиста в той или иной области деятельности можно рассматривать как владение им полной совокупностью компетенций необходимых и достаточных для успешного решения задач, возникающих в этой области. Как отмечают специалисты, особая роль в компетентности принадлежит умениям: они «... являются составной частью компетентности, ее материализованной сущностью» [16, с. 8].

Таким образом, компетентностный подход в образовании, в частности, нацеливает образовательные учреждения каждого отдельного преподавателя на то, чтобы в каждом преподаваемом предмете видеть зерна будущей практической деятельности обучаемого специалиста и акцентировать на них его внимание.

Обратим здесь внимание на одну чрезвычайно важную для всякого специалиста компетентность – компетентность в области логического мышления.

О логической компетентности специалиста. Умение логично и точно излагать свои мысли, логически правильно рассуждать, доказывать и обосновывать свое мнение является неотъемлемым качеством не только компетентного специалиста в любой области деятельности, но и всякой интеллектуально развитой личности. Поэтому логические компетенции, обеспечивающие эти качества, вне всякого сомнения, следует отнести к ключевым компетенциям, присущим общему (метапредметному) содержанию образования.

Проанализируем структуру логических компетенций специалиста в аспекте того материала, который представлен в учебном пособии [8]. Мыслительный процесс, как известно, представляет собой отражение в нашем сознании материальной действительности. Это отражение связано с абстрагированием и имеет содержание и формы. Содержание мышления составляет окружающая действительность. Его характеристикой является истинность или ложность мысли, то есть адекватность мысли отражаемому предмету или явлению. Формы мышления – это формы, в которых осуществляется отражение материальной действительности. Выделяют три типа форм мыслительной деятельности: *понятия* о классах предметов; *суждения* – утверждения или отрицания каких-либо свойств предметов или связей между ними; *умозаключения* – мысленные переходы (уже оторванные от действительности) от одних суждений к другим. В каждом из этих трех типов существует множество разновидностей мыслительных форм. Другими словами, мышление отражает действительность в разнообразных понятиях, разнообразных суждениях и множестве типов умозаключений. Эти формы в общем и их конкретные виды составляют предмет логики как науки и образуют содержание тех логических компетенций, овладев которыми будущий специалист стано-

вится логически грамотным и компетентным. Заложённая в III в. до Р. Х. великим древнегреческим ученым Аристотелем наука логика в XIX в. начала использовать математические методы и приняла характер математической логики. Изложению основ классической аристотелевской логики с использованием методов современной математической логики посвящено учебное пособие [8]. В XX в. математической логикой были получены феноменальные результаты, устанавливающие свойства мышления в области доказательства математических теорем и познания материальной действительности математическими методами.

В соответствии с тремя формами мыслительной деятельности выделим три общелогические компетенции (ОЛК), соотносящиеся с этими формами и которыми должен овладеть каждый будущий специалист, в какой бы области он ни трудился.

ОЛК-1. Способен с логической точки зрения анализировать *понятия*: давать определение, определять вид, ограничивать и обобщать, устанавливать отношения между понятиями, делить объем и классифицировать.

ОЛК-2. Способен анализировать логическое строение суждений: определять сложные суждения и простые, применять к анализу их строения и отношений между ними методы математической логики.

ОЛК-3. Способен к логически грамотной дедуктивной и индуктивной деятельности: анализировать и строить дедуктивные умозаключения со сложными и простыми суждениями, используя методы математической логики, а также индуктивные умозаключения, отличая их от дедуктивных.

Эти три общелогические компетенции в совокупности и составляют логическую компетентность специалиста во всякой области творческой деятельности. Дадим описания каждого из трех компонентов этих компетенций в соответствии с их покомпонентным составом, охарактеризованным выше, с учетом специфики объектов, методов и способов деятельности в сфере каждой компетенции. Эти описания представим в форме структурно-содержательных моделей этих компетенций.

Таблица 1

Структурно-содержательная модель компетенции ОЛК-1

Логические знания в сфере компетенции (когнитивный компонент)	Логические умения и навыки в сфере компетенции (деятельностный компонент)	Отношение к деятельности в сфере компетенции (ценностный компонент)
<i>Знания о понятии как логической форме мышления:</i> – характеристика понятия с помощью признаков, виды признаков; – содержание и объем понятия, закон обратного отношения между содержанием и объемом; – ограничение и обобщение понятий, род и вид; – понятие как предикат; – виды понятий с точки зрения количества элементов объема; – виды понятий с точки зрения качества элементов объема; – виды понятий с точки зрения признаков, входящих в содержание; – отношения между понятиями; – деление (объема) понятия; – классификация понятий; – виды определений понятий.	<i>Умения и навыки анализировать понятия с логической точки зрения и оперировать с ними в соответствии с их логическими свойствами:</i> – характеризовать признаки понятия; – выявлять содержание и объем понятия; – находить понятия, обобщающие данное понятие и ограничивающие его; – определять вид понятия с различных точек зрения: количества элементов объема, качества элементов объема, признаков, включенных в его содержание; – определять отношение между двумя понятиями; – определять отношения между несколькими понятиями; и интерпретировать их с помощью теоретико-множественных диаграмм; – осуществлять деление (объема) понятия; – осуществлять классификацию понятий; – давать определения понятий через род и видовое отличие и определения других типов; – отличать определения понятий от их описаний; – записывать определения понятий на логико-математическом языке.	<i>Позитивное отношение студента к логико-языковой деятельности, к логически правильному и точному выражению мыслей языком и речью, осознание глубокой связи между мышлением и языком, значения этой связи для успешности коммуникативной деятельности (кто ясно мыслит – ясно излагает); нацеленность на результат:</i> – проявление интереса и активности; – мотивированность; – понимание ценности и полезности для успешной профессиональной деятельности и коммуникации грамотного и точного владения мышлением и языком и их сочетанием; – осознание того, что мыслительная деятельность как процесс отражения действительности исходит из практики, начинается с выработки понятий, обобщающих знания о предметах окружающего мира; – осознание важности и значимости успешного овладения всем арсеналом логических средств, характеризующих этот исходный элемент мыслительного процесса; – работа над самооценкой получаемого результата.

Таблица 2

Структурно-содержательная модель компетенции ОЛК-2

Логические знания в сфере компетенции (когнитивный компонент)	Логические умения и навыки в сфере компетенции (деятельностный компонент)	Отношение к деятельности в сфере компетенции (ценностный компонент)
<i>Знания о суждении как логической форме мышления:</i> – понятие о суждении и высказывании; истинностное (логическое) значение высказывания; – логические операции над высказываниями; – формулы алгебры высказываний и их классификация; тавтологии как законы логики; – равносильность и равносильные преобразования формул алгебры высказываний; специальные виды формул; – сложные суждения и моделирование их логического строения с помощью формул алгебры высказываний; – логические отношения между сложными суждениями как отношения между представляющими их формулами алгебры высказываний; – понятие n-местного предиката как обобщение понятия высказывания; одноместный предикат как свойство (признак); множество истинности предиката; – равносильность и следование предикатов; – логические операции над предикатами, их связь с операциями над их множествами истинности; – операция взятия квантора общности как обобщение конъюнкции; – операция взятия квантора существования как обобщение дизъюнкции; – формулы логики предикатов, их классификация; тавтологии как законы логики; – равносильность и равносильные преобразования формул логики предикатов; специальные виды формул; – простые суждения: субъект, предикат, связка; их деление по содержанию предиката; – простые суждения о свойствах (категорические суждения), их классификация, моделирование строения с помощью формул логики предикатов, интерпретация на языке теории множеств; – распределенность терминов в категорических суждениях; – логические отношения между категорическими суждениями как отношения между представляющими их формулами логики предикатов; логический квадрат.	<i>Умения и навыки анализировать суждения и оперировать с ними в соответствии с их логическими свойствами и законами логики:</i> – составлять таблицы истинности для формул алгебры высказываний, выявлять тавтологии; – преобразовывать равносильным образом формулы алгебры высказываний, упрощать их и приводить к нормальным формам; – выявлять логическую структуру сложного высказывания и представлять ее формулой алгебры высказываний; – используя формулу алгебры высказываний, представляющую сложное суждение, преобразовывать суждение равносильным образом, а также формулировать отрицание данного суждения и суждения, обратное, противоположное и обратное противоположному данному суждению; – выявлять отношение между двумя сложными суждениями, смоделировав их логические структуры формулами алгебры высказываний; – определять множества истинности различных конкретных предикатов; – выявлять равносильные предикаты и предикаты, находящиеся в отношении логического следования путем сравнения их множеств истинности; – определять свободные и связанные переменные в формулах логики предикатов; давать интерпретацию формулам и определять, к какому типу они относятся; выявлять тавтологии; – равносильным образом преобразовывать формулы логики предикатов, приводить их к предваренной нормальной форме; – записывать суждения (в том числе математические теоремы) на языке логики предикатов, выявив их логическую структуру; – используя логическую формулу суждения, преобразовывать суждение равносильным образом; – используя логическую формулу суждения, формулировать отрицание данного суждения.	<i>Позитивное отношение студента к успешному овладению вторым этапом мыслительной деятельности – анализом логического строения суждений:</i> – проявление интереса и активности; – мотивированность; – понимание того, что мыслительная деятельность как процесс отражения действительности, начавшись с выработки понятий о предметах окружающего мира, продолжается в формировании суждений о связях между понятиями, отражающих связи, реально существующие между предметами окружающего мира; – осознание важности и значимости овладения всем арсеналом логических средств, характеризующих суждения как важнейшие элементы мыслительного процесса, составляющие основу языковой деятельности; – направленность на овладение логическими коммуникативными качествами речи; – понимание, что владение логико-математическим языком способствует совершенствованию логической составляющей языка общечеловеческого; – работа над самооценкой полученных результатов (рефлексия).

Структурно-содержательная модель компетенции ОЛК-3

Логические знания в сфере компетенции (когнитивный компонент)	Логические умения и навыки в сфере компетенции (деятельностный компонент)	Отношение к деятельности в сфере компетенции (ценностный компонент)
1. Логические знания, относящиеся к дедуктивным рассуждениям, выраженные в понятиях, правилах, законах: – общая характеристика дедуктивных умозаключений, их отличие от индуктивных умозаключений; – логическое следование формул алгебры высказываний как логическая модель дедуктивного умозаключения; – правила дедуктивных умозаключений, выражаемые на языке алгебры высказываний: модусы, дилеммы, введение и удаление логических связей, косвенные правила, производные правила; – моделирование умозаключений на языке алгебры высказываний; – логическое следование формул логики предикатов как логическая модель дедуктивного умозаключения; – формализация дедуктивных умозаключений средствами логики одноместных предикатов; – непосредственные умозаключения из категорических суждений, их представление в логике одноместных предикатов; – аристотелевская силлогистика.	1. Умения и навыки оперировать с элементарными умозаключениями и рассуждениями: – устанавливать выполнимость или невыполнимость логического следования формул алгебры высказываний; – выводить логические следствия из данных посылок; находить достаточные условия для данного следствия; – доказывать справедливость правил дедуктивных умозаключений, выраженных на языке алгебры высказываний; – анализировать содержательные умозаключения и простейшие рассуждения средствами алгебры высказываний; – анализ дедуктивных умозаключений средствами логики одноместных предикатов; – доказательства средствами логики одноместных предикатов непосредственных умозаключений из категорических суждений; – доказательства правильности аристотелевских силлогизмов на языке одноместных предикатов и на теоретико-множественном языке; – анализ конкретных силлогизмов на правильность средствами логики одноместных предикатов и теории множеств.	1. Позитивное отношение студента к дедуктивной деятельности и ее результату: – проявление интереса и активности; – мотивированность; – осознание того, что процедура умозаключений является своего рода апофеозом мыслительного процесса, проходящая исключительно в сознании человека в полном отрыве от действительности и потому требующая глубоких логических знаний; – понимание ценности и значимости умозаключений как ключевых элементов правильных рассуждений и доказательств; – понимание значимости умений и навыков правильно и логически рассуждать и доказывать для профессиональной деятельности во всех областях (универсальный характер правил и законов логики); – понимание особой роли и ценности доказательств для математической науки; – ориентированность на достижение результата в дедуктивной деятельности и его оценка (рефлексия).
2. Логические знания, относящиеся к правдоподобным умозаключениям: – правдоподобные (индуктивные) умозаключения и их отличие от дедуктивных умозаключений; – метод полной индукции и его ограниченность; – метод неполной индукции и его разновидности; – причинно-следственная связь явлений и методы ее установления: сходства, различия, сопутствующих изменений, остатков; – умозаключения по аналогии; аналогия и моделирование; – гипотетико-дедуктивный метод: верифицируемость научной гипотезы и фальсифицируемость научной теории; – метод полной математической индукции: базис индукции, предположение индукции, шаг индукции.	2. Умения и навыки, относящиеся к правдоподобным умозаключениям: – приводить примеры суждений, полученных методом полной индукции; – приводить примеры суждений, полученных методом популярной научной индукции; – приводить примеры суждений, полученных методом научной неполной индукции; – приводить примеры причинно-следственных связей, установленных методом сходства; – приводить примеры причинно-следственных связей, установленных методом различия; – приводить примеры причинно-следственных связей, установленных методом сопутствующих изменений; – приводить примеры причинно-следственных связей, установленных методом остатков; – приводить примеры научных гипотез, не выдержавших верификации; – доказывать методом полной математической индукции утверждения из разных областей математики (алгебра, геометрия, теория чисел и так далее).	2. Позитивное отношение студента к правдоподобным (индуктивным) рассуждениям и их результатам: – проявление интереса и активности; – мотивированность; – понимание принципиального отличия правдоподобных рассуждений от строгих дедуктивных доказательств; – осознание важности роли правдоподобных рассуждений для процесса развития наук; – понимание важности и механизма сочетания правдоподобных (индуктивных) рассуждений и строгих дедуктивных доказательств в научных исследованиях, в поиске и доказательстве математических теорем. («Будем учиться доказывать, но будем также и учиться догадываться» (Д. Пойа)); – нацеленность на достижение результата в овладении методами правдоподобных рассуждений и самооценка этого результата (рефлексия).

Логические знания в сфере компетенции (когнитивный компонент)	Логические умения и навыки в сфере компетенции (деятельностный компонент)	Отношение к деятельности в сфере компетенции (ценностный компонент)
3. Знания о логических основах аксиоматического метода как фундаментального метода научного познания, теории доказательства, опровержения и аргументации: – существо содержательного (неформального) аксиоматического метода: неопределяемые понятия, аксиомы, правила вывода, теоремы; – свойства аксиоматических теорий: непротиворечивость, полнота, категоричность, независимость системы аксиом; – содержательное (интуитивное) понимание доказательства в аксиоматической теории; – анализ и синтез при доказательстве математических теорем; – метод от противного доказательства математических теорем и его модификации; – метод приведения противоположного утверждения к абсурду; – метод приведения данного утверждения к абсурду как метод опровержения суждений; – эффективное и неэффективное доказательство теорем существования; – формальные аксиоматические теории, понятие формального доказательства и метатеории; – формализованное исчисление высказываний как формальная аксиоматическая теория и ее метатеория; – формализованное исчисление предикатов как формальная аксиоматическая теория и ее метатеория; – аристотелевская силлогистика как формальная аксиоматическая теория; – формальные аксиоматические математические теории; теорема К. Гёделя о неполноте формальной арифметики; – истинность и доказуемость в формальных аксиоматических математических теориях; теорема А. Тарского о недоказуемости всякого истинного утверждения.	3. Умения и навыки оперировать с доказательствами теорем, анализировать аксиоматические теории: – анализировать логическую структуру доказываемой теоремы (ее условия, заключение); записывать формулировку теоремы на логико-математическом языке; – для данной теоремы формулировать обратное утверждение, противоположное утверждение, обратное противоположному утверждение; – с использованием логико-математического языка преобразовывать формулировку теоремы равносильным образом; – анализировать логическую структуру процесса доказательства теоремы: способ доказательства (анализ или синтез), метод доказательства; – находить контрпример для опровержения, то есть опровергать общее утверждение общего утверждения; – находить логические пробелы (пропуски) в доказательстве; – отличать логически строгие доказательства от нестрогих правдоподобных рассуждений; – строить формальные доказательства теорем в формализованном исчислении высказываний; – доказывать теоремы о свойствах формализованного исчисления высказываний как аксиоматической теории (метатеоремы); – исследовать на независимость систему аксиом формализованного исчисления высказываний; – строить формальные доказательства теорем в формализованном исчислении предикатов; – строить формальные доказательства аристотелевских силлогизмов; – проанализировать логическую структуру школьного курса геометрии.	3. Положительное отношение студента к изучению аксиоматического метода как фундаментального метода организации и приумножения научного знания: – проявление интереса и активности; – мотивированность; – важность понимания содержательного и формального подходов к анализу дедуктивных рассуждений; – понимание значимости аксиоматического подхода в науке как систематизирующего и организующего начала; – понимание роли доказательства как движущей силы аксиоматического метода; – ориентированность на использование средств и методов формальных логических систем в неформальной логико-языковой деятельности; – ориентированность на повышение логико-философского уровня с помощью овладения глубокими результатами, полученными математической логикой на пути доказательства непротиворечивости математики; – ориентированность на повышение логических коммуникативных качеств речи с помощью изучения формальных логических систем и их языков и самооценка достигаемых результатов (рефлексия).

Итак, тремя китами обще-логической компетентности специалиста в любой области деятельности и просто человека высокой культуры и образованности были и остаются три важнейшие обще-логические категории – понятие, суждение и умозаключение. Не путаться в понятиях и не подменять понятия, логически грамотно формулировать суждения, при рассуждениях и доказательствах использовать логически правильные умозаключения – вот основа этой компетентности. При подготовке специалистов в конкретных областях эти три обще-логические категории наполняются конкретными деталями. В частности, в работах [9–13] детализируется модель логико-методической подготовки будущих учителей математики в педагогических и классических университетах.

Список литературы

1. Зимняя И. А. Компетентностный подход. Какое его место в системе современных подходов к проблемам образования? (Теоретико-методологический аспект) // Высшее образование сегодня. 2006. № 8. С. 21–26.
2. Игошин В. И. О подготовке бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «Математическое образование» // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия, Психология, Педагогика. 2014. Т. 14. Вып. 3. С. 103–106.
3. Игошин В. И. О качестве подготовки бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «Математическое образование» // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 468–473. DOI: 10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473.
4. Игошин В. И. Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры // Образование и наука. 2013. № 7 (106). С. 85–100.
5. Игошин В. И. Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 19–36.
6. Игошин В. И. Курс числовых систем в формате двухуровневой подготовки учителей математики // Образование и наука. 2017. Т. 19. № 1. С. 82–104.
7. Игошин В. И. О точках и векторах в геометрии // Математическое образование (Журнал фонда математического образования и просвещения). 2017. № 2 (82), апрель – июнь. С. 27–43.
8. Игошин В. И. Логика с элементами математической логики : лекции для студентов гуманитарных специальностей. Саратов : Научная книга, 2004. 144 с.
9. Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики. Ч. I // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2019. Т. 19. Вып. 1. С. 113–117. DOI: 10.1850/1819-7671-2019-1-113-117.
10. Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики. Ч. II // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2020. Т. 20. Вып. 1. С. 105–111. DOI: 10.1850/1819-7671-2020-1-105-111.
11. Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики. Ч. III // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2022. Т. 20. Вып. 2. С. 202–207. DOI: 10.1850/1819-7671-2022-2-202-207.
12. Игошин В. И., Капитонова Т. А., Лебедева С. В. Содержательно-методические аспекты предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль – математическое образование) // Гуманитарные науки и образование / Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева (Саранск). 2012. № 1 (9). С. 14–17.
13. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. М., 2001.
14. Костенко И. П. Кризис отечественного математического образования // Педагогика. 2012. № 7. С. 41–49.
15. Материалы Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы, март – апрель, 1935. М., 1935.
16. Татур Ю. Г. Компетентностный подход в описании результатов и проектировании стандартов высшего профессионального образования // Труды методологического семинара «Россия в Болонском процессе: проблемы, задачи, перспективы». М. : Исследовательский центр проблем качества, 2004. 18 с.
17. Толстой Л. Н. Педагогические сочинения. М. : Педагогика, 1989.
18. Хуторской А. В. Технология конструирования компетентностного обучения // Вестник Института образования человека. 2011. № 2. 23 с.
19. Шкерина Л. В. Методика выявления и оценивания уровня сформированности профессиональных компетенций студентов – будущих учителей математики : учебное пособие. Красноярск : РИО КГПУ им. В. П. Афанасьева, 2015. 264 с.
20. Igoshin V. I. Mathematics and Logic: Their Relationship in the Teaching of Mathematics // Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs / E. W. Hart and J. Sandefur (eds.). Springer International Publishing AG, 2018. Pp. 253–271. DOI: 10.1007/978-3-319-70308-4_16.
21. Igoshin V. I. To the question of the method of studying the concept of proof and the axiomatic method by bachelors and masters of pedagogical education // International Journal of Advanced Science and Technology. 2020. Vol. 29. № 6. Pp. 1964–1972. ISSN: 2005 – 4238 IJAST Copyright©2020 SERSC.

Logical competence of the specialist

V. I. Igoshin

Doctor of Pedagogical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor,
professor of the Department of Geometry, Saratov National Research State University n. a. N. G. Chernyshevsky.
Russia, Saratov. E-mail: igoshinvi@mail.ru

Abstract. The article discusses the issue of the next reform of domestic higher education. Is it possible to return to the Soviet system of higher education? Should the Bologna system be completely destroyed? This article is devoted to reflection on these issues. Special attention is paid to the competence approach in higher education. The question of logical competence, the possession of which is necessary for every specialist, in whatever field of activity he works, is considered in detail. Logical competence is an integral part of natural human intelligence and at the same time serves as a fun-

damental theoretical basis for the design of artificial intelligence. Logical competence is considered as consisting of three general logical competencies – the ability to operate logically competently with concepts, the ability to operate logically competently with judgments, the ability to deductive and inductive activities in accordance with the laws of logic. The detailed characteristics of the three general logical competencies that make up the logical competence of a specialist are given in the form of structural and content models consisting of three components – cognitive, activity, value.

Keywords: Soviet and Bologna systems of higher education, competence approach in education, competencies and competence, general logical competencies and logical competence.

References

1. Zimnyaya I. A. *Kompetentnostnyj podhod. Kakoe ego mesto v sisteme sovremennyh podhodov k problemam obrazovaniya? (Teoretiko-metodologicheskij aspekt)* [Competence approach. What is its place in the system of modern approaches to the problems of education? (Theoretical and methodological aspect)] // *Vyshee obrazovanie segodnya* – Higher education today. 2006. No. 8. Pp. 21–26.
2. Igoshin V. I. *O podgotovke bakalavrov i magistrrov pedagogicheskogo obrazovaniya po profilyu "Matematicheskoe obrazovanie"* [On the preparation of bachelors and masters of pedagogical education in the profile "Mathematical education"] // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Filosofiya, Psihologiya, Pedagogika* – News of Saratov University. A new series. Series: Philosophy, Psychology, Pedagogy. 2014. Vol. 14. Is. 3. Pp. 103–106.
3. Igoshin V. I. *O kachestve podgotovki bakalavrov i magistrrov pedagogicheskogo obrazovaniya po profilyu "Matematicheskoe obrazovanie"* [On the quality of preparation of bachelors and masters of pedagogical education in the profile "Mathematical education"] // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Filosofiya, Psihologiya, Pedagogika* – News of Saratov University. A new series. Series: Philosophy, Psychology, Pedagogy. 2018. Vol. 18. Is. 4. Pp. 468–473. DOI: 10.18500/1819-7671-2018-18-4-468-473.
4. Igoshin V. I. *Podgotovka budushchih uchitelej matematiki i informatiki v oblasti disciplin diskretnoj matematiki v usloviyah bakalavriata i magistratury* [Training of future teachers of mathematics and computer science in the field of discrete mathematics disciplines in terms of bachelor's and master's degree] // *Obrazovanie i nauka* – Education and Science. 2013. No. 7 (106). Pp. 85–100.
5. Igoshin V. I. *Kurs chislovyh sistem dlya pedagogicheskogo vuza* [The course of numerical systems for a pedagogical university] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in higher education. 2010. No. 8. Pp. 19–36.
6. Igoshin V. I. *Kurs chislovyh sistem v formate dvuhurovnevoj podgotovki uchitelej matematiki* [The course of numerical systems in the format of two-level training of teachers of mathematics] // *Obrazovanie i nauka* – Education and Science. 2017. Vol. 19. No. 1. Pp. 82–104.
7. Igoshin V. I. *O tochkah i vektorah v geometrii* [On points and vectors in geometry] // *Matematicheskoe obrazovanie (Zhurnal fonda matematicheskogo obrazovaniya i prosveshcheniya)* – Mathematical Education (Journal of the Foundation for Mathematical Education and Enlightenment). 2017. No. 2 (82), April – June. Pp. 27–43.
8. Igoshin V. I. *Logika s elementami matematicheskoy logiki : lekii dlya studentov gumanitarnykh special'nostej* [Logic with elements of mathematical logic : lectures for students of humanities]. Saratov. Scientific Book. 2004. 144 p.
9. Igoshin V. I. *Uchit' logike budushchih uchitelej matematiki. Ch. I* [To teach logic to future teachers of mathematics. Part I] // *Izv. Sarat. un-ta. Novaya seriya. Seriya: Filosofiya, Psihologiya, Pedagogika* – News of Saratov University. A new series. Series: Philosophy, Psychology, Pedagogy. 2019. Vol. 19. Is. 1. Pp. 113–117. DOI: 10.18500/1819-7671-2019-1-113-117.
10. Igoshin V. I. *Uchit' logike budushchih uchitelej matematiki. Ch. II* [To teach logic to future teachers of mathematics. Part II] // *Izv. Sarat. un-ta. Novaya seriya. Seriya: Filosofiya, Psihologiya, Pedagogika* – News of Saratov University. A new series. Series: Philosophy, Psychology, Pedagogy. 2020. Vol. 20. Is. 1. Pp. 105–111. DOI: 10.18500/1819-7671-2020-1-105-111.
11. Igoshin V. I. *Uchit' logike budushchih uchitelej matematiki. Ch. III* [To teach logic to future teachers of mathematics. Part III] // *Izv. Sarat. un-ta. Novaya seriya. Seriya: Filosofiya, Psihologiya, Pedagogika* – News of Saratov University. A new series. Series: Philosophy, Psychology, Pedagogy. 2022. Vol. 20. Is. 2. Pp. 202–207. DOI: 10.18500/1819-7671-2022-2-202-207.
12. Igoshin V. I., Kapitonova T. A., Lebedeva S. V. *Soderzhatel'no-metodicheskie aspekty predmetnoj podgotovki bakalavrov pedagogicheskogo obrazovaniya (profil' – matematicheskoe obrazovanie)* [Substantive and methodological aspects of subject preparation of bachelors of pedagogical education (profile – mathematical education)] // *Gumanitarnye nauki i obrazovanie* – Humanities and education / Mordovian State Pedagogical Institute n. a. M. E. Evseev (Saransk). 2012. No. 1 (9). Pp. 14–17.
13. Kolyagin Yu. M. *Russkaya shkola i matematicheskoe obrazovanie* [Russian school and mathematical education]. M. 2001.
14. Kostenko I. P. *Krizis otechestvennogo matematicheskogo obrazovaniya* [Crisis of domestic mathematical education] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2012. No. 7. Pp. 41–49.
15. *Materialy Vserossijskogo soveshchaniya prepodavatelej matematiki srednej shkoly, mart – april', 1935* – Materials of the All-Russian meeting of secondary school mathematics teachers, March – April, 1935. M. 1935.
16. Tatur Yu. G. *Kompetentnostnyj podhod v opisani rezul'tatov i proektirovanii standartov vysshego professional'nogo obrazovaniya* [Competence approach in describing the results and designing standards of higher professional education] // *Trudy metodologicheskogo seminar "Rossiya v Bolonskom processe: problemy, zadachi, perspektivy"* – Proceedings of the methodological seminar "Russia in the Bologna process: problems, tasks, prospects". M. Research Center for Quality Problems, 2004. 18 p.

17. Tolstoj L. N. *Pedagogicheskie sochineniya* [Pedagogical works]. M. Pedagogy. 1989.
18. Hutorskoj A. V. *Tekhnologiya konstruirovaniya kompetentnostnogo obucheniya* [Technology of designing competence-based learning] // *Vestnik Instituta obrazovaniya cheloveka* – Herald of Institute of Human Education. 2011. No. 2. 23 p.
19. Shkerina L. V. *Metodika vyyavleniya i ocenivaniya urovnya sformirovannosti professional'nyh kompetencij studentov – budushchih uchitelej matematiki : uchebnoe posobie* [Methodology for identifying and assessing the level of formation of professional competencies of students – future teachers of mathematics : textbook]. Krasnoyarsk. RIO KSPU n. a. V. P. Afanasyev. 2015. 264 p.
20. Igoshin V. I. Mathematics and Logic: Their Relationship in the Teaching of Mathematics // *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs* / E. W. Hart and J. Sandefur (eds.). Springer International Publishing AG, 2018. Pp. 253–271. DOI: 10.1007/978-3-319-70308-4_16.
21. Igoshin V. I. To the question of the method of studying the concept of proof and the axiomatic method by bachelors and masters of pedagogical education // *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020. Vol. 29. No. 6. Pp. 1964–1972. ISSN: 2005 – 4238 IJAST Copyright@2020 SERSC.

Использование виртуальных инструментов среды GeoGebra в школьной тригонометрии

С. В. Ларин¹, С. В. Шуманский²

¹кандидат физико-математических наук, профессор,
Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева.
Россия, г. Красноярск. E-mail: larin_serg@mail.ru

²учитель математики, Черемшанская СОШ № 20. Россия, г. Красноярск. E-mail: s_shum_08@mail.ru

Аннотация. Анимационные возможности компьютерных сред пополняют арсенал средств построения, добавляя к классическим циркулю и линейке инструменты нового типа, реализуемые на компьютерном экране. Благодаря им в статье моделируется процесс наматывания числовой прямой на единичную окружность, что превращает ее в числовую окружность, моделируется распрямление единичной окружности в отрезок. Кроме того, эти новые виртуальные инструменты положены в основу моделирования непрерывного вычерчивания графиков основных тригонометрических функций и им обратных функций. Это вносит наглядность в преподавание тригонометрии. В статье приведены фрагменты авторского учебного пособия по тригонометрии 10 класса с использованием компьютерной анимации в среде GeoGebra, содержащего в качестве приложения альбом анимационных рисунков, готовых к использованию на уроках тригонометрии.

Ключевые слова: числовая окружность, графики тригонометрических функций, графики обратных тригонометрических функций, анимационный рисунок, программа GeoGebra.

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат с началом координат в точке O и единичной точкой E на оси абсцисс. Проведем окружность с центром в начале координат, проходящую через точку E (единичная окружность). Пусть числовая прямая касается единичной окружности в точке E . Представляя числовую прямую гибкой, будем наматывать положительную полуось против часовой стрелки, а отрицательную по часовой стрелке. Тогда все числа (точки) числовой прямой окажутся на окружности и превратят ее в числовую окружность.

На анимационном рисунке 1 после включения анимации мы наблюдаем наматывание числовой прямой на единичную окружность. При наматывании положительного луча против часовой стрелки точка A переходит на окружность в виде точки A' и числа 1, 2, 3, ... появляются последовательно на единичной окружности, отмеряя единичные дуги в 1 радиан.

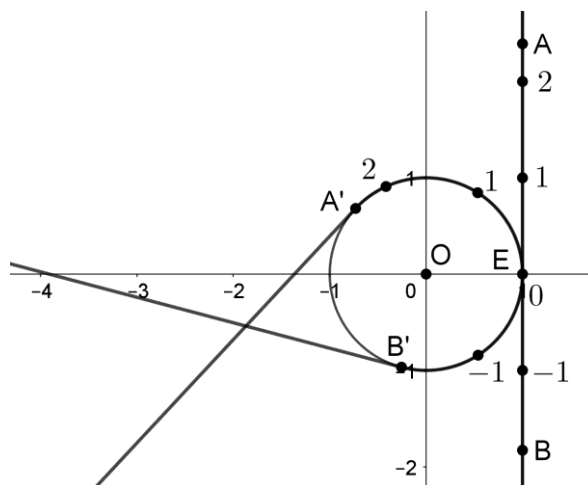


Рис. 1. Наматывание числовой прямой на единичную окружность

Однако не существует реального инструмента, позволяющего найти на числовой окружности точку с заданной координатой. Известно, что эта задача неразрешима циркулем и линейкой. Вместе с тем она легко решается виртуальными инструментами на компьютерном экране в среде GeoGebra. Приведем подробное описание соответствующих построений.

На оси абсцисс строим точку $M(t)$ (точку M с координатой t). На панели инструментов находим кнопку (виртуальный инструмент) «Угол заданной величины». Пользуемся подсказкой: «Укажите

точку стороны угла, затем его вершину и размер». После нажатия кнопки с инструментом кликнем на точки E , O и в появившемся меню указываем угол t в радианах. Тем самым на единичной окружности от точки E откладывается дуга величины t . На числовой окружности появляется точка $M'(t)$, отмечаящая конец этой дуги (рис. 2).

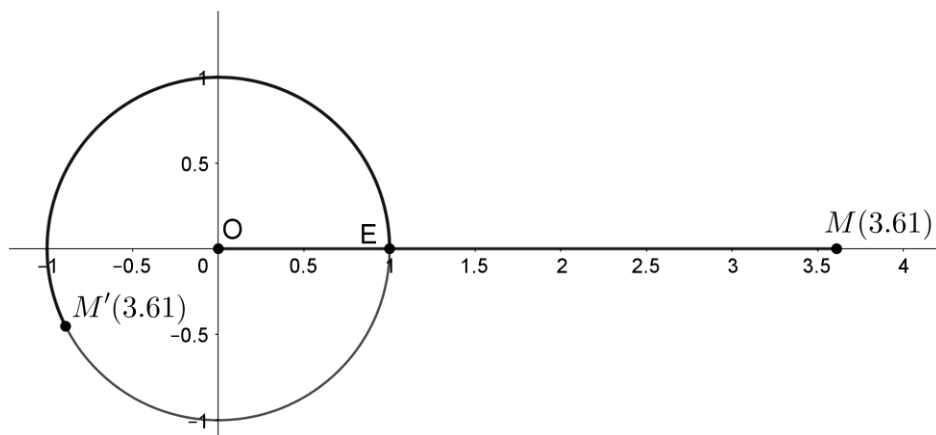


Рис. 2. Наматывание отрезка оси абсцисс на единичную окружность

Рассматриваем прямоугольные координаты построенной точки $M' = (a, b)$ (это обозначение взято из лексикона программы GeoGebra вместо $M'(a, b)$). Первую координату a называют косинусом числа t (обозначается $a = \cos t$), а вторую координату синусом числа t (обозначается $b = \sin t$). При анимации точки M она непрерывно перемещается по оси абсцисс, а вслед за ней точка $M'(t)$ перемещается по единичной окружности. Строим точку $S = (t, b)$, она при анимации точки M , оставляя след, непрерывно вычерчивает график функции $y = \sin x$ (рис. 3).

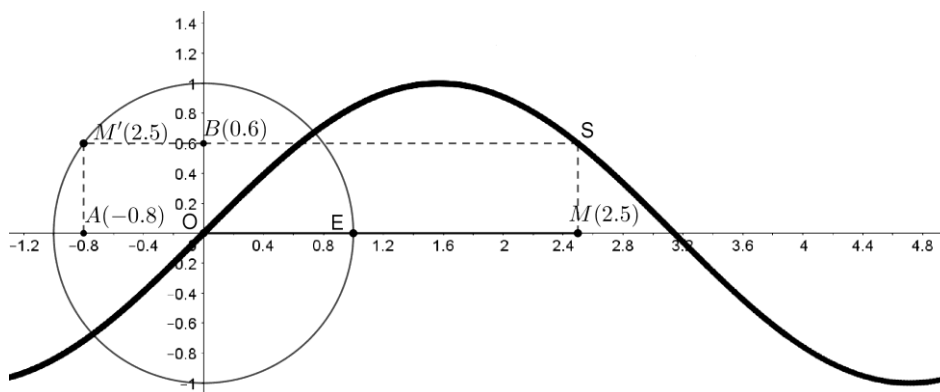


Рис. 3. График функции $y = \sin(x)$

При конкретном $x = t$ получаем $y = b$. Аналогично строим точку $C = (t, a)$, она при анимации точки M непрерывно вычерчивает график функции $y = \cos x$. (Заметим, что наблюдаемое непрерывное перемещение на самом деле представляет собой смену отдельных кадров анимации, но на этом не будем заострять внимание). Задавая различные значения аргумента t , по положению точки $M'(t)$ можно сравнивать значения $a = \cos t$ и $b = \sin t$.

Аналогично вычерчиваются графики функций $y = \tan(x)$ и $y = \cot(x)$. Появляется возможность сначала увидеть свойства графиков данных функций, сформулировать их, и только потом обосновать аналитически.

На анимационном рисунке 4 при включении анимации точка T перемещается вправо по отрезку OA длины 2π . Инструментом «Дуга по заданной величине» построена дуга TT' длины $2\pi - x(T)$. Наблюдаем увеличивающийся спрямленный участок OT дуги окружности.

Вместе с тем анимационный рисунок 4 можно преобразовать в вычерчивание графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Например, для вычерчивания графика функции $y = \sin x$ на рисунке 4 достаточно построить точку $S = (x(T); y(T'))$ и заставить ее оставлять след ($x(T)$ обозначает абсциссу точки T , а $y(T')$ обозначает ординату точки T').

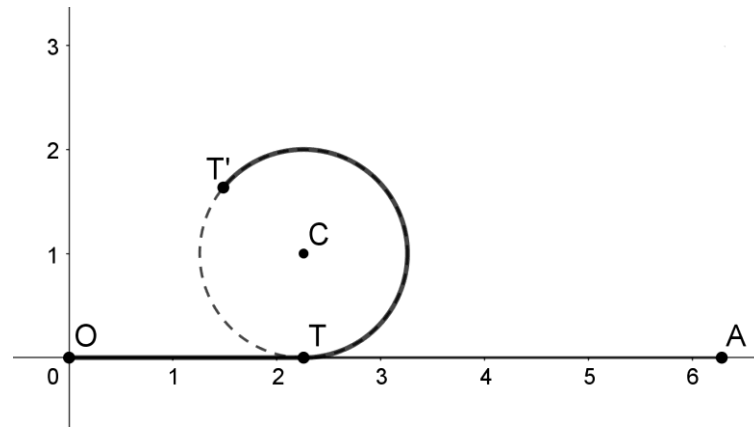
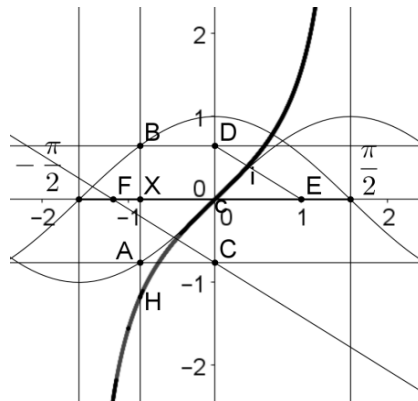


Рис. 4. Спряmlение окружности

Рассмотрим построения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ с помощью геометрического моделирования деления чисел (см. [1] и [2]). На анимационном рисунке 5 построена тангенсоида как результат деления функции $y = \sin x$ на функцию $y = \cos x$.

Рис. 5. Построение тангенсоиды как результат деления функции $y = \sin x$ на функцию $y = \cos x$

Вводим функции $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ и получаем их графики. На оси абсцисс строим отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, изображающий период, и на нем строим точку X , изображающую переменную. Через точку X проводим вертикаль и отмечаем точки пересечения вертикали с графиками построенных функций. Делим геометрически одну точку на другую и получаем искомую точку тангенсоиды. Заставляем ее оставлять след и анимируем точку X . Наблюдаем вычерчивание тангенсоиды.

Аналогично строится график функции $y = \operatorname{ctg} x$ как результат деления функции $y = \cos x$ на функцию $y = \sin x$. Геометрически можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$, используя соотношение $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

В школьном учебнике предлагается построить график обратной тригонометрической функции $y = \arcsin x$ как кривой, симметричной синусоиде относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Обратим внимание на то, что при таком построении графика функции $y = \arcsin x$ мы не видим дуги единичной окружности, «синус которой равен x ». Построим график функции $y = \arcsin x$ на основе осмысления этой записи. Здесь написано, что y есть величина дуги, синус которой равен x . При построении задействуем еще один виртуальный инструмент из арсенала анимационных средств программы GeoGebra. Он называется «Дуга по центру и двум точкам» и по построенной дуге выдает ее длину.

Построение (рис. 6). Строим начало координат $O = (0,0)$ и единичные точки $E = (1,0)$, $E_1 = (-1,0)$ и $E_2 = (0,1)$. Строим отрезок E_1E и отмечаем на нем «текущую» точку X , изображающую переменную x – синус искомой дуги. Проводим через нее вертикаль. Переносим X на ось ординат. Для этого строим отрезок E_2E , проводим прямую через точку X параллельно построенному отрезку и отмечаем искомую точку A пересечения построенной прямой с осью ординат.

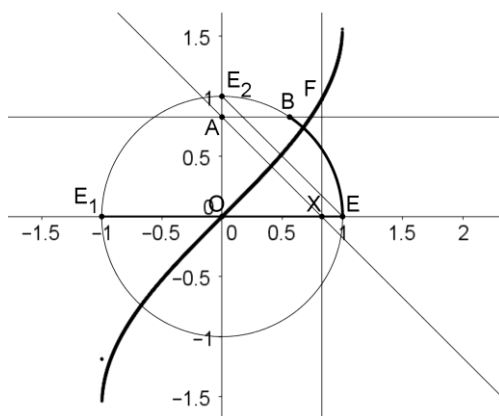


Рис. 6. График функции $y = \arcsin(x)$

Строим единичную окружность, через точку A проводим горизонталь и отмечаем точку B пересечения горизонтали с окружностью. Инструментом «Дуга по центру и двум точкам» строим дугу EB и на панели объектов обнаруживаем ее длину h . Строим точки $F = (x(X), h)$ и $H = (x(X), 2\pi - h)$ и заставляем их оставлять следы. Устанавливаем для точки H условие видимости $x(X) < 0$, а для точки F условие $x(X) \geq 0$.

Включаем анимацию точки X и наблюдаем, как точки F и H , оставляя следы, вычерчивают график функции $y = \arcsin x$ на отрезке $[-1, 1]$.

Аналогично построен анимационный рисунок 7, на котором вычерчивается график функции $y = \arccos x$.

На оси абсцисс строим отрезок $[-1, 1]$ – область определения функции $y = \arccos x$, на нем отмечаем точку X , которая изображает число x . Через точку X проводим перпендикуляр к оси абсцисс, который пересечет верхнюю дугу единичной окружности в точке B . Строим дугу EB , компьютер любезно нам выдает длину этой дуги d (на панели объектов). Таким образом, $x = \cos d$ и точка $C = (x, d)$ есть искомая точка графика обратной функции. Строим эту точку и заставляем ее оставлять след. Включаем анимацию точки X и наблюдаем вычерчивание графика функции $y = \arccos x$.

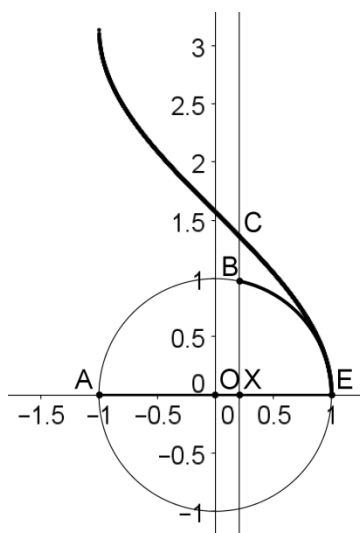


Рис. 7. График функции $y = \operatorname{arccosh} x$

Таким образом, использование анимационных возможностей среды GeoGebra пополняет средства построения, добавляя виртуальные инструменты. Оценивая роль и значение анимационных рисунков, подчеркнем, что на уроке предполагается использование готового анимационного контента. Технология создания анимационных рисунков отодвигается на второй план и адресована лишь любознательным учащимся. В то же время самостоятельное изготовление анимационных рисунков может составить отдельное творческое задание, направленное на компьютерное моделирование математических понятий и утверждений, что позволяет приобщиться к цифровому образованию и освоению компьютерных технологий для будущего. Альбом анимационных рисунков по тригонометрии размещен в виде электронного ресурса [4], при этом мы придерживаемся изложения материала в [3]. С программой GeoGebra и ее анимационными возможностями можно познакомиться, например, по [2] и [5].

Список литературы

1. Ларин С. В. Вычисления с помощью виртуальных геометрических инструментов // Математика в школе. 2007. № 8. С. 35–43.
2. Ларин С. В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов н/Д : Легион, 2015. 192 с.
3. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. Профильный уровень. Ч. 1. Учеб. 10. М. : Мнемозина, 2008. 424 с.
4. Тригонометрия. URL: <https://www.geogebra.org/m/x7gcycqk>.
5. GeoGebra. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>.

The use of virtual tools of the GeoGebra environment in school trigonometry

S. V. Larin¹, S. V. Shumanskiy²

¹PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor, Krasnoyarsk State Pedagogical University n. a. V. P. Astafiev. Russia, Krasnoyarsk. E-mail: larin_serg@mail.ru

²math teacher, Cheremshanskaya Secondary School No. 20. Russia, Krasnoyarsk. E-mail: s_shum_08@mail.ru

Abstract. The animation capabilities of computer environments replenish the arsenal of construction tools, adding a new type of tools implemented on a computer screen to the classic compass and ruler. Thanks to them, the article models the process of winding a numerical straight line onto a unit circle, which turns it into a numerical circle, and models the straightening of a unit circle into a segment. In addition, these new virtual tools are the basis for modeling the continuous drawing of graphs of basic trigonometric functions and their inverse functions. This brings clarity to the teaching of trigonometry. The article contains fragments of the author's textbook on trigonometry of the 10th grade using computer animation in the GeoGebra environment, containing as an application an album of animated drawings ready for use in trigonometry lessons.

Keywords: numerical circle, graphs of trigonometric functions, graphs of inverse trigonometric functions, animation drawing, GeoGebra program.

References

1. Larin S. V. *Vychisleniya s pomoshch'yu virtual'nyh geometricheskikh instrumentov* [Calculations using virtual geometric tools] // *Matematika v shkole* – Mathematics at school. 2007. No. 8. Pp. 35–43.
2. Larin S. V. *Komp'yuternaya animatsiya v srede GeoGebra na urokah matematiki* [Computer animation in the GeoGebra environment at math lessons]. Rostov n/D. Legion. 2015. 192 p.
3. Mordkovich A. G., Semenov P. V. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. Profil'nyj uroven'. Ch. 1. Ucheb. 10* [Algebra and the beginning of mathematical analysis. Profile level. Part 1. Textbook 10]. M. Mnemosyne. 2008. 424 p.
4. *Trigonometriya*. Available at: <https://www.geogebra.org/m/x7gcycqk>.
5. *GeoGebra*. Available at: <http://ru.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>.

Подход к решению задач по геометрии на основании концепции Д. Пойа

Г. Г. Шеремет¹, Ю. И. Пухова²

¹кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Пермский государственный национальный исследовательский университет.

Россия, г. Пермь. E-mail: sheremet@pspu.ru

²учитель математики, Гимназия № 17.

Россия, г. Пермь. E-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается метод решения геометрических задач на основании концепции Д. Пойа, базирующейся на тщательно разработанной системе вопросов, позволяющей разбить решение задачи на отдельные, явные и интуитивно понятные обучающемуся этапы. На конкретном примере одной задачи ЕГЭ иллюстрируются четыре основных шага решения: понимание постановки задачи (анализ входных данных и искомой величины), поиск алгоритма решения (построение идеального чертежа), осуществление плана, взгляд назад.

При работе с чертежом рекомендуется использовать системы компьютерной математики, программы Geogebra и «Живая геометрия», так как они позволяют выполнять динамические чертежи.

Приведенный метод решения задач, несмотря на свою эффективность, в принципе является достаточно простым, универсальным и может быть легко адаптирован для применения как в рамках других учебных предметов, так и для решения произвольных задач в целом.

Ключевые слова: метод решения геометрических задач, как решать задачу.

В современном обществе повышается рост общественного запроса на качественное математическое образование и математическую грамотность обучающихся 9–11 классов.

Форма государственной итоговой аттестации – единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике – содержит задания базового и повышенного уровней. Анализ и статистика решаемости ЕГЭ по математике позволила выявить основной блок проблемных тем, и ими оказались геометрические задачи. Из года в год по этим задачам получают низкие результаты – от 2 % до 24 % верных ответов. При этом с такими задачами справляется лишь категория учащихся с «высокой» математической подготовкой [4].

Такое неблагоприятное положение с геометрической подготовкой обучающихся не соответствует значимости курса геометрии в основной школе и, как следствие, в любой сфере деятельности человека.

Е. В. Потоскуев отмечает: «Хорошее геометрическое образование, пространственное воображение и логическое мышление – необходимые атрибуты не только математика, но и инженера, и экономиста, и дизайнера, и юриста, и программиста, а также специалистов многих других профессий. <...> В основе геометрического образования лежит один из самых нравственных принципов – принцип доказательности» [2, с. 3].

В данной статье предложим один из вариантов подхода к обучению решению геометрических задач, основой которого является использование концепции, предлагаемой Д. Пойа [1], и основанной на тщательно разработанной системе вопросов, позволяющей разбить решение задачи на отдельные, явные и интуитивно понятные обучающемуся этапы. Общая методология предлагаемого подхода заключается в разбиении процесса решения задачи на четыре основных шага. Проиллюстрируем эти шаги на примере обсуждения одной задачи ЕГЭ [3]. При этом отметим, что при работе с чертежом удобно использовать системы компьютерной математики, программы Geogebra и «Живая геометрия», так как они позволяют выполнять динамические чертежи.

Задача. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$ [4].

Шаг 1. Понимание постановки задачи (анализ входных данных и искомой величины).

Понимание постановки задачи

Что нам дано и как это использовать?	
Длины всех сторон трапеции	Длины сторон трапеции однозначно определяют трапецию: • ее можно построить, • можно вычислить все углы.
$\angle CPD$ – прямой	$\triangle CPD$ прямоугольный, PN – медиана, проведенная к гипотенузе: • $PN = CP = PD$ (в прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине гипотенузы).
Точки M, N, P и Q лежат на одной окружности	Сумма противоположных углов в четырехугольнике $MPNQ$ равна 180° .
Что нам требуется найти? В какую фигуру входит искомая величина?	
Отрезок QN	Сторона треугольника PQN

Шаг 2. Поиск алгоритма решения (построение идеального чертежа):

- Треугольник ABD' со сторонами AB , $BD' = CD$, $AD' = AD - BC$ построить можно. Его достроить до искомой трапеции также можно (рис. 1).

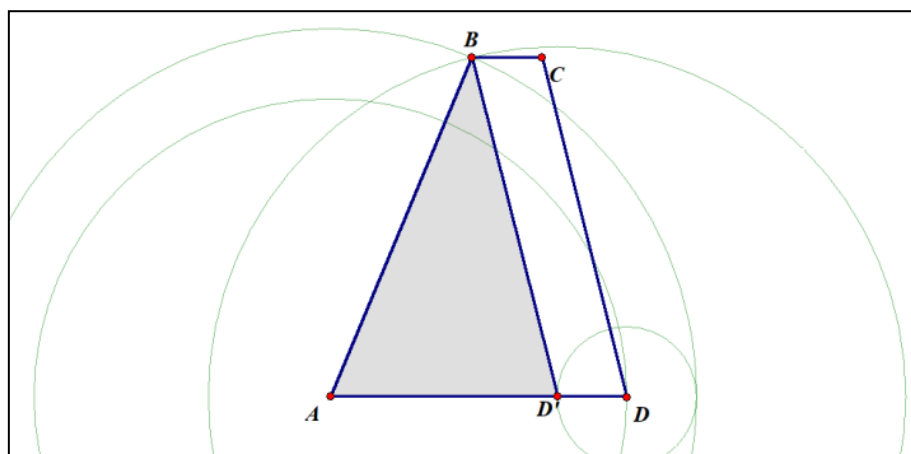


Рис. 1. Построение трапеции

- Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Далее можно построить точку P , так как по условию угол CPD прямой. Значит, точка P лежит на пересечении отрезка BM и окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре. Данному условию удовлетворяют две точки P_1 и P_2 на чертеже (рис. 2). Оба ли эти варианта подходят?

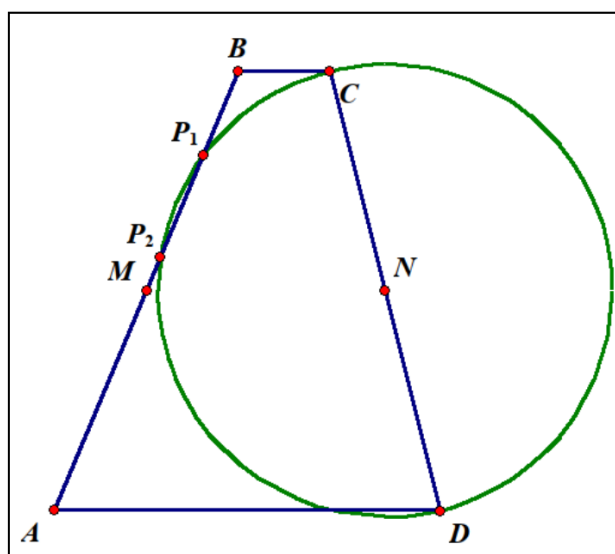


Рис. 2. Построение точки P

• Точки M , N , P и Q лежат на одной окружности (рис. 3). Следовательно, точка Q лежит на окружности, описанной около треугольника MNP и внутри отрезка CN . Но для точки P_2 описанная окружность на чертеже касается отрезка CD . Этот факт надо еще доказать!

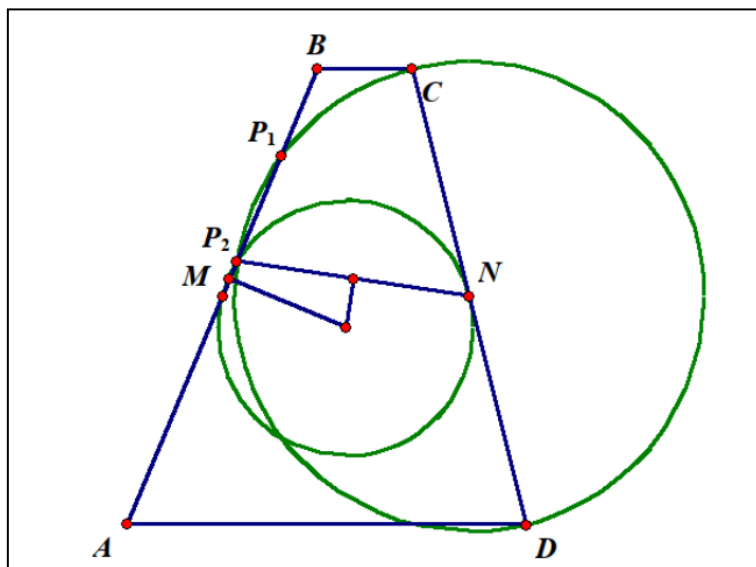


Рис. 3. Нахождение точек, лежащих на одной окружности

• Итак, положение точки P на стороне AB определяется однозначно, и она определяет однозначное положение точки Q на стороне CD . Значит, длины всех отрезков, связанных с точками, отмеченными на чертеже, находятся однозначно, в том числе и длина отрезка QN (рис. 4).

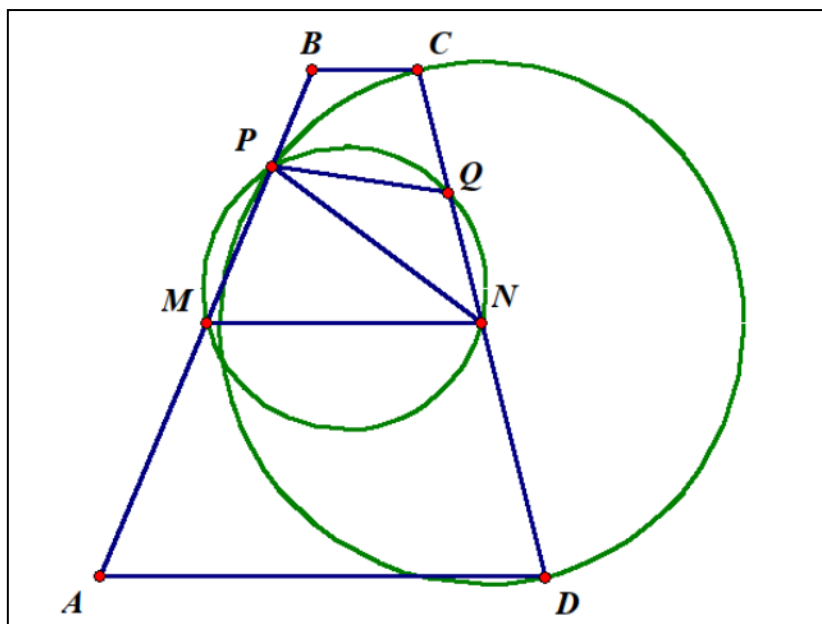


Рис. 4. Итоговый чертеж к задаче

Алгоритм решения. Подводя итоги всех проведенных рассуждений, приходим к тому, что искомый отрезок QN – сторона треугольника PQN . В этом треугольнике сторону PN и угол PQN найти можем. Если сумеем найти остальные углы этого треугольника, то сможем воспользоваться теоремой синусов и найти искомую сторону. Угол PNQ является также углом при вершине равнобедренного треугольника PNC , для нахождения углов в котором необходимо метрически описать положение точки P на стороне AB (рис. 5).



1. В трапеции $ABCD$ вычислить величину угла BAD .
2. Найти длину PB .
3. Найти длину PC .
4. Из треугольника PCN найти величину угла CNP .
5. Используя тригонометрические формулы, найти величину NPQ .
6. По теореме синусов найти длину QN .

Рис. 5. План решения

Шаг 3. Осуществление плана.

Третий шаг посвящен непосредственному решению задачи. Описывая его в своей работе, Д. Пойа акцентирует свое внимание на следующем: «Осуществляя план решения, контролируйте каждый свой шаг. Ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен? Сумеете ли доказать, что он правилен?» [1, с. 203] (рис. 6).

Вычисление величины угла BAD В треугольнике ABD' известны длины всех трех сторон: $AB = 21$, $BD' = CD = 20$, $AD' = AD - BC = 17 - 4 = 13$ По теореме косинусов $\cos BAD = \frac{21^2 + 13^2 - 20^2}{2 \cdot 21 \cdot 13} = \frac{5}{13}.$ Отсюда $\sin BAD = \frac{12}{13}.$	
Нахождение длины PB Обозначим $PB = x$. Тогда $AP = 21 - x$. Из треугольников PAD и PBC выразим PD и PC через x. По теореме косинусов: $PD^2 = PA^2 + AD^2 - 2 \cdot PA \cdot AD \cdot \cos PAD;$ $PD^2 = (21 - x)^2 + 17^2 - 34 \cdot (21 - x) \cdot \frac{5}{13}.$ $PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2 \cdot PB \cdot BC \cdot \cos PBC;$ $PC^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right);$ Так как треугольник CPD по условию прямоугольный, то $CD^2 = PC^2 + PD^2$. Получили уравнение для нахождения x. Решая его, получаем $x = 4$ или $x = 116/13$.	

Рис. 6. Осуществление плана

Шаг 4. Взгляд назад. При построении идеального чертежа мы выяснили, что окружность, построенная на CD как на диаметре, пересекает сторону AB в двух точках. Необходимо обосновать, что решение $x = 116/13$ не удовлетворяет условиям на точку Q (рис. 7).

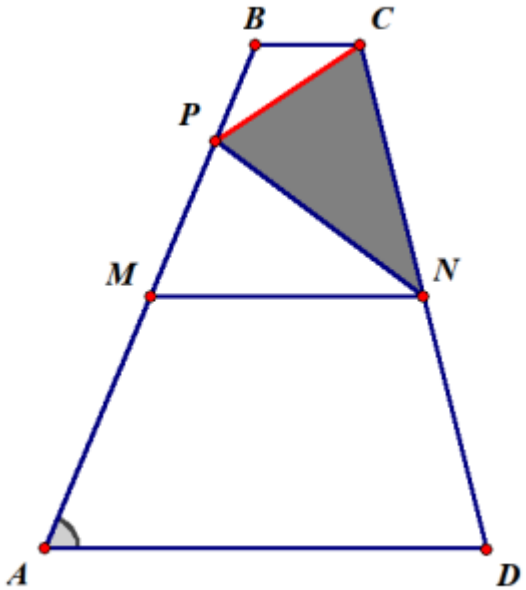
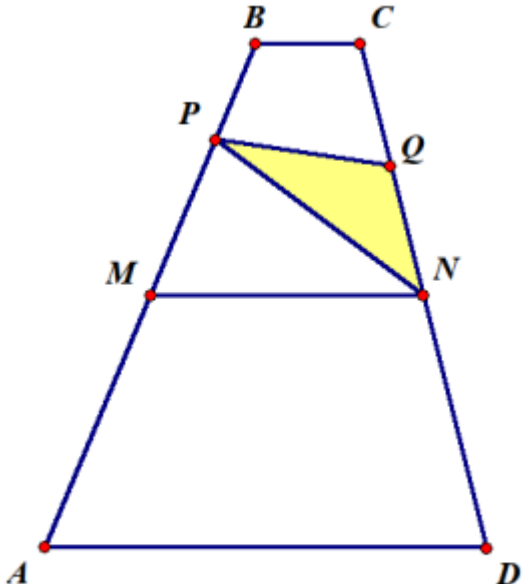
<i>Нахождение длины PC</i> $PC^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right), \quad PC^2 = \frac{576}{13}.$	
<i>Вычисление величины угла CNP</i> По теореме косинусов для треугольника CPN $\cos CNP = \frac{PN^2 + CN^2 - PC^2}{2 \cdot PN \cdot CN}$ $\cos CNP = \frac{100 + 100 - \frac{576}{13}}{200} = \frac{253}{325}, \text{ тогда}$ $\sin CNP = \frac{204}{325}.$	
<i>Нахождение величины NPQ</i> В треугольнике NPQ известно, что $\sin PQN = \frac{12}{13}, \quad \cos PQN = \frac{-5}{13},$ $\cos QNP = \frac{253}{325}, \quad \sin QNP = \frac{204}{325}.$ Тогда $\sin NPQ = \sin(180 - (PQN + QNP)),$ $\sin NPQ = \sin PQN \cdot \cos QNP + \cos PQN \cdot \sin QNP$ $\sin NPQ = \frac{2016}{13 \cdot 325}$	
<i>Нахождение длины QN</i> По теореме синусов $QN = \frac{\sin NPQ \cdot PN}{\sin PQN}.$ Вычислите самостоятельно. Для проверки результат измерения в Живой геометрии QN = 5.17 cm	

Рис. 7. Взгляд назад

Можно отметить, что приведенный метод решения задач, несмотря на свою эффективность, в принципе является достаточно простым универсальным и может быть легко адаптирован для применения как в рамках других учебных предметов, так и для решения произвольных задач в целом. Кроме того, использование такого подхода позволяет развить критическое восприятие, а также навыки логического мышления, которые являются крайне востребованными в процессе школьного обучения, а также остаются таковыми и в течение всей жизни.

Список литературы

1. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Гос. уч.-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1959. 207 с.
2. Потоскуев Е. В. О роли геометрии и проблемах при ее изучении в средней и высшей школе // Математика. 2010. № 21. С. 3–7.
3. Сдам ГИА: решу ЕГЭ. URL: <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=525120> (дата обращения: 30.06.2022).
4. Яценко И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике. М., 2021. С. 31.

Approach to solving geometry problems based on the concept of D. Poya

G. G. Sheremet¹, Yu. I. Pukhova²

¹PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics,
Perm State National Research University. Russia, Perm. E-mail: sheremet@pspu.ru

²math teacher, Gymnasium No. 17. Russia, Perm. E-mail: malshakova.ylia@yandex.ru

Abstract. The article discusses a method for solving geometric problems based on the concept of D. Poya, based on a carefully developed system of questions that allows you to break the solution of the problem into separate, explicit and intuitive stages for the student. Using a specific example of one USE problem, four main steps of solving are illustrated: understanding the problem statement (analysis of input data and the desired value), searching for a solution algorithm (building an ideal drawing), implementing a plan, looking back.

When working with a drawing, it is recommended to use computer mathematics systems, Geogebra and "Living Geometry" programs, as they allow you to perform dynamic drawings.

The given method of solving problems, despite its effectiveness, is in principle quite simple, universal and can be easily adapted for use both in other academic subjects and for solving arbitrary problems in general.

Keywords: method of solving geometric problems, how to solve the problem.

References

1. Poya D. *Kak reshat' zadachu* [How to solve the problem]. M. State Academic and Pedagogical Publishing house of the Ministry of Education of the RSFSR. 1959. 207 p.
2. Potoskuev E. V. *O roli geometrii i problemah pri ee izuchenii v srednej i vysshej shkole* [On the role of geometry and problems in its study in secondary and higher schools] // *Matematika* – Mathematics. 2010. No. 21. Pp. 3–7.
3. *Sdam GIA: reshu EGE* – I will pass the GIA: I will solve the Unified State Exam. Available at: <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=525120> (date accessed: 30.06.2022).
4. Yashchenko I. V. *Metodicheskie rekomendacii dlya uchitelej, podgotovlennye na osnove analiza tipichnyh oshibok uchastnikov EGE 2021 goda po matematike* [Methodological recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes of participants of the Unified State Exam 2021 in mathematics]. M. 2021. P. 31.

Реальный мир сквозь призму физики, математики и информатики

М. В. Шабанова¹, Л. А. Шестакова²

¹доктор педагогических наук, профессор, заместитель начальника отдела,
Московский центр качества образования. Россия, г. Москва;
профессор кафедры экспериментальной математики и информатизации образования,
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова.
Россия, г. Архангельск. ORCID: 0000-0002-5043-0960. E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru
²ведущий специалист, Институт цифровой трансформации образования.
Россия, г. Мытищи. ORCID: 0000-0001-6148-369X. E-mail: la.shestakova@gmail.com

Аннотация. Учебный план современной школы включает в себя целый набор учебных предметов, освоение которых призвано подготовить ученика к продолжению образования на профессиональном уровне, к самостоятельному решению жизненных задач. При множестве достоинств предметный подход к организации обучения вызывает все больше нареканий. Они сводятся к признанию ограниченных возможностей предметного обучения в формировании у учащихся целостного представления о реальном мире, умений использовать весь комплекс полученных в школе знаний для решения жизненных проблем. Ограниченность предметного обучения позволяет преодолеть конвергентный подход к образованию, который уже внедрен в ряд национальных и региональных образовательных систем: событийное обучение (Event-Based Learning) в США, проблемно-центрированное обучение (Problem-centered learning) в Сингапуре, обучение на основе феноменов (Phenomenon-based learning) в Финляндии. Наибольшую популярность во всем мире приобрела STEAM технология, которая внедряется сегодня и в систему предпрофессионального образования в России (Москва). Конвергентный подход не отвергает предметного обучения. Он лишь открывает границы для переноса объектов изучения, знаний, умений и способов деятельности из одного учебного предмета в другой, для перехода от одного вида образовательной деятельности к другому. В статье эти возможности конвергентного подхода представлены на конкретном примере вовлечения учащихся основной и старшей школы в научный анализ эффектов, получаемых при фотосъемке сквозь призму.

Ключевые слова: конвергентный подход в образовании, геометрическая оптика, сечения многогранников плоскостью, геометрические преобразования, динамическое моделирование в среде GeoGebra, компьютерные эксперименты.

Термин «конвергентный» происходит от латинского слова *convergo*, что означает «сближаться», «сходиться в одной точке». Конвергенция рассматривается сегодня как одна из ведущих идей, обеспечивающих возможность решения сложных научно-технических проблем. Она определяется в международном сообществе как глубокая интеграция знаний, методов и опыта из различных дисциплин и формирование новых структур для стимулирования научных открытий и инноваций [12].

А. М. Кондаков и И. С. Сергеев [4] отмечают, что происходящая в настоящее время конвергенция наук и технологий является ведущим вызовом для системы образования, содержание которого традиционно строится на основе дидактического принципа научности. Они указывают, что «образование, адекватное целостному восприятию конвергентной реальности, требует отказа от традиционной «чересполосицы» слабо связанных между собой дидактических единиц и учебных предметов, изолированных друг от друга видов деятельности обучающегося, множества автономно функционирующих «учебных», «воспитательных», «развивающих», «поддерживающих» и иных процессов».

В зарубежной и российской педагогике конвергентный подход реализуется путем применения различных технологий обучения и форм организации познавательной деятельности учащихся на основе межпредметной и надпредметной интеграции.

В США получила распространение технология событийного обучения (Event-Based Learning) – за основу интеграции учебных предметов и образовательной деятельности, как учебной, так и внеучебной, принимаются события: исторические (относящиеся к истории школы, местности, в которой она расположена, стране, планете, миру в целом); новостные (происходящие в настоящее время и освещаемые средствами массовой информации, в том числе интернет-сайтами: научные открытия, происшествия, погодные явления, технические достижения, политические, культурные события); планируемые (предстоящие школьные, муниципальные мероприятия, национальные и международные праздники, олимпиады) [13]. Примером реализации данной технологии является сайт Event-Based Science, созданный в рамках одноименного проекта, финансируемого The National Science Foundation (NSF) США в период с 1995 по 2007 гг. для поддержки естественно-научного об-

разования. На сайте размещена не только стартовая информация о природных явлениях и научных открытиях, но и приведены задания, которые включают учащихся в деятельность поиска дополнительной информации об этих событиях, а также полезные ссылки на интервью, фотографии, веб-страницы и исследования для выполнения этих заданий.

В системе математического образования Сингапура широко распространено проблемно-центрированное обучение (Problem-centered learning) [15], достоинством которого является создание условий для формирования компетенций учащихся в области решения проблем. Обучение начинается не с традиционного изложения теории, а с постановки перед учащимися практически значимой проблемы. Выработка индивидуального или коллективного решения проблемы базируется на коллективном обсуждении, моделировании, опыте обмена знаниями, оценке и ликвидации дефицитов своих предметных знаний.

В Финляндии с 2016 г. реализуется обучение на основе феноменов (Phenomenon-based learning) [14]. Основу обучения составляет подготовка учащихся к жизни, к решению реальных задач. Феномены (Балтийское море, изменение климата, планета Земля) как объект изучения выбираются совместно с учениками и рассматриваются комплексно на основе установления межпредметных связей. Поощряется обсуждение, которое выстраивается вокруг вопросов и интересов учеников.

Наибольшую популярность во всем мире приобрела STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics) технология, которая направлена на вовлечение учащихся в проектную деятельность, требующую комплексного применения методов естественных наук и математики для выработки творческих инженерно-конструкторских решений и их реализации средствами компьютерных технологий.

В России с 2012 г. по инициативе Департамента образования города Москвы и Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» в школах города реализуется проект «Курчатовский центр непрерывного междисциплинарного образования» (Курчатовский проект), цель которого, по мнению В. М. Ковальчука, сформировать на школьном уровне – на уровне «начальных знаний» – принципиально новый тип мышления – сформировать системные представления об окружающем мире. Для этого необходимо совершенствовать образовательную среду путем междисциплинарной интеграции не только на уровне урочных занятий, но и на уровне интеграции урочной и внеурочной деятельности, на уровне взаимодействия с профильными вузами [8].

В целях ранней профориентации и осмысленного выбора профессии с 2015 г. предпрофильное (8–9 классы) и профильное образование (10–11 классы) дополнено программами предпрофессионального образования, которые реализуются за счет установления партнерских связей общеобразовательных школ с вузами, учреждениями среднего профессионального образования и производственными предприятиями. Это открывает старшеклассникам возможность участия в мероприятиях, направленных на развитие исследовательских и предпрофессиональных компетенций (экскурсии на предприятия и в лаборатории вузов, исследовательские и проектные работы, профессиональные пробы).

На уровне урочных занятий точками конвергенции чаще всего выступают метапредметные понятия, которые, как правило, определяют тему конвергентных уроков/дней/событий. Проведение конвергентных образовательных мероприятий требует согласования предметных учебных программ и совместной разработки сценариев этих мероприятий.

Для демонстрации возможностей конвергентного подхода в образовании выберем в качестве точки конвергенции художественные эффекты, которые позволяет получить фотосъемка сквозь призму из оптического стекла (см. рис. 1).

Предъявление учащимся подобных эффектов призвано вызвать у них любопытство и стремление к поиску научных объяснений. Такую возможность в школьном курсе физики предоставляет изучение явления (феномена) преломления света на границе двух сред.

В 8 классе преломление света вводится как «изменение направления распространения света на границе раздела двух прозрачных сред при переходе света из одной среды в другую» [10, с. 207]. Теоретические знания учащихся о преломлении света формируются в рамках геометрической оптики. При этом направление распространения света определяется углом падения (α) и углом преломления (β), образованными падающим и преломленным световыми лучами соответственно и перпендикуляром, восстановленным в точке падения к границе раздела сред I и II.

Зависимость угла преломления от угла падения описывается законом, открытым в 1621 г. голландским физиком, математиком и астрономом Виллебрордом Снеллиусом. В учебнике физики 8 класса закон преломления описывается следующим образом: «Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела двух сред из точки падения луча, лежат в одной плоскости. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления для двух данных сред есть величина постоянная» [10, с. 208]. Обозначим ее *const*.



А. Использование призмы



Б. Эффект сближения



В. Эффект клонирования



Г. Эффект переворачивания

Рис. 1. Эффекты при фотосъемке сквозь призму

Начальных представлений учащихся о синусах острых углов прямоугольного треугольника, полученных в курсе геометрии 8 класса [3], достаточно для решения (с использованием таблиц Брадиса или инженерных калькуляторов) расчетных задач, позволяющих делать выводы о характере связи величин: «Для данного угла падения, чем больше относительный показатель преломления, тем меньше угол преломления, и наоборот» [10, с. 208]. Также в 8 классе с опорой на результаты экспериментов этой константе дается имя «относительный показатель», а также вводится определение оптически плотной среды: «Среду, в которой скорость распространения света меньше, называют оптически более плотной. Если свет идет из среды оптически менее плотной в среду оптически более плотную, то угол преломления меньше угла падения» [10, с. 208].

Потенциальная возможность объяснения художественных эффектов, представленных на рис. 1 путем построения хода световых лучей при различных взаимных положениях объекта, фотокамеры и призмы, практически реализуется в ограниченном числе случаев, в связи со значительной трудоемкостью проведения подобных построений с помощью транспорта, линейки, карандаша и бумаги. Решение этой задачи обуславливает потребность в создании динамической компьютерной модели средствами GeoGebra или любой другой системы динамической математики. Что может являться предметом междисциплинарного учебного проекта.

В рамках этого проекта учащиеся создают двумерную модель оптической призмы с моделями четырех лучей света (в случае треугольной призмы), для моделирования ситуаций всего многообразия взаимного расположения на плоскости двух лучей и призмы друг относительно друга (рис. 2). Выбор планиметрической модели обусловлен традиционным использованием двумерного изображения призмы при изучении элементов геометрической оптики в школе.

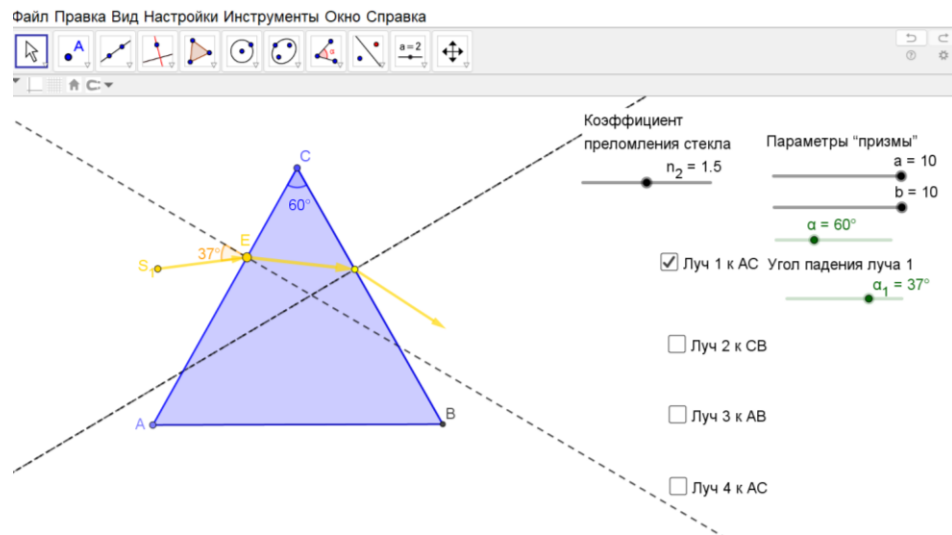


Рис. 2. Электронный ресурс «Двумерная модель прохождения лучей сквозь призму» с QR кодом для перехода к нему [1]

Одним из математико-технических решений, которое может быть реализовано учащимися в ходе проекта, является построение стационарной модели треугольника, задаваемой тремя параметрами (двумя сторонами и углом между ними). Относительно сторон треугольника перемещаются векторные цепи, изображающие направления хода четырех световых лучей. Положение каждого луча задается точкой падения светового луча на сторону треугольника и углом наклона этого луча к прямой, перпендикулярной стороне треугольника. Компьютерное моделирование хода луча в треугольной призме требует опережающего изучения понятия арксинус для острых углов прямоугольного треугольника.

В ходе моделирования учащиеся сталкиваются с проблемой «невывисимости», то есть отсутствия в некоторых случаях расчетного угла преломления при переходе светового луча в оптически менее плотную среду. Математическое объяснение требует опережающего развития знаний о содержании понятия относительного показателя преломления среды (отнесенного к курсу физики 9 класса). Учащиеся должны узнать, что относительный показатель преломления ($const$) – это отношение абсолютных показателей преломления сред II и I: $const = \frac{n_2}{n_1}$, где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления сред [11].

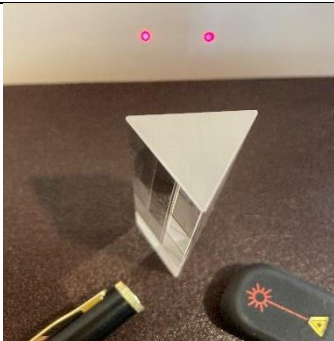
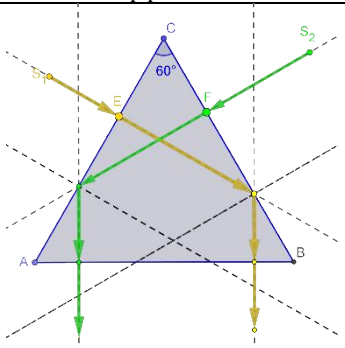
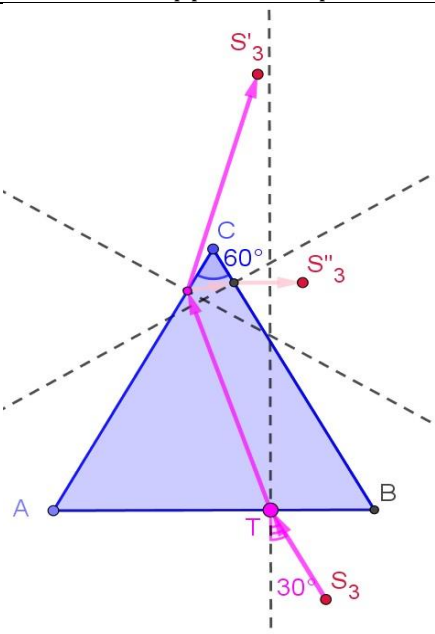
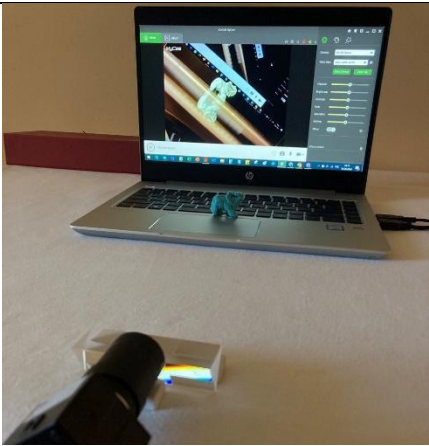
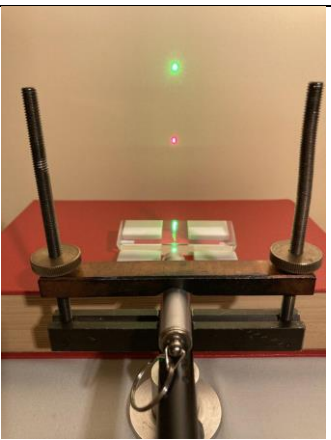
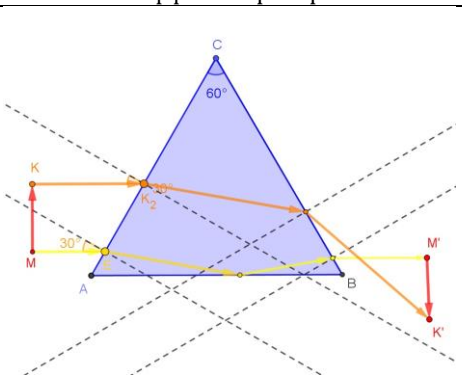
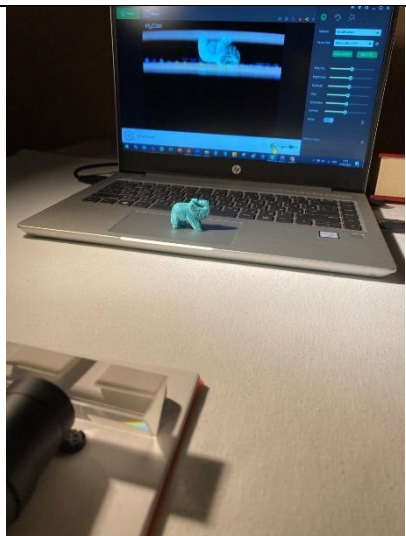
Пусть $n_1 = 1$ (коэффициент преломления воздуха в нормальных условиях с точностью до тысячных равен 1,000), $n_2 \in [1,4; 2,2]$ – показатели преломления промышленных оптических стекол для желто-зеленых лучей [5], следовательно, $\sin(\beta_2) = n_2 \cdot \sin(\alpha_2)$, где β_2 – угол преломления луча света, выходящего из линзы. Так как $-1 \leq \sin(\alpha_2) \leq 1$, $n_2 > 1$, то $-n_2 \leq n_2 \cdot \sin(\alpha_2) \leq n_2$. Значит, существуют такие значения углов α_2 , для которых $n_2 \cdot \sin(\alpha_2) > 1$ и для них не существует $\sin(\beta_2)$. Следовательно, построение выходящего из призмы луча невозможно.

Продолжение моделирования требует объяснения «исчезновения угла преломления», что приводит к необходимости введения понятия предельного угла преломления и изучения феномена полного внутреннего отражения.

В учебнике физики этот феномен описывается следующим образом: «Пусть внутри оптически более плотной среды находится точечный источник света, испускающий лучи во все стороны. При увеличении угла падения лучей на границу раздела сред угол преломления будет также увеличиваться и при некотором угле падения, который называют предельным углом, окажется равным 90° . В этом случае преломленный луч пойдет вдоль границы раздела двух сред. Если же угол падения взять еще большим, то есть $\alpha > \alpha_0$, то преломленного луча не будет, а останется только отраженный <...> описанное явление и называют полным внутренним отражением» [10, с. 209].

Созданная учащимися динамическая модель хода луча в треугольной призме в сочетании с классическими средствами проведения физического эксперимента (источник, призма из оптического стекла, экран, камера) и программным приложением MyCam позволили дать научное объяснение рассматриваемым художественным эффектам при фотосъемке сквозь призму. В таблице представлены этапы и результаты проведенной работы (см. табл.).

**Этапы поиска научного объяснения художественных эффектов фотографирования
сквозь оптическую призму**

I. Определение условий появления эффекта	II. Визуализация хода луча в призме посредством компьютерного эксперимента	III. Воспроизведение эффекта в контролируемых условиях
Эффект сближения		
		 Примечание: объектив камеры направлен на боковую грань призмы
Эффект клонирования		
		 Примечание: объектив камеры направлен на боковое ребро призмы под углом в 45°
Эффект переворачивания		
 Примечание: источник красного света находится над источником зеленого света		 Примечание: объектив камеры направлен на боковое ребро призмы

Дальнейшее развитие знаний учащихся о преломлении света в курсе физики, переход к изучению стереометрии в старших классах общеобразовательной школы и изучение трехмерной графики и 3D моделирования в курсе информатики позволяют вернуться к вопросу о компьютерном моделировании хода луча сквозь оптическую призму в рамках второго междисциплинарного проекта (рис. 3).

Традиционно обучение 3D моделированию в курсе информатики осуществляется на базе профессиональных пакетов программ (*Cinema4D*, *AutoCAD*, *Blender* и др.). Они уже содержат набор готовых объектов (примитивов) и инструментов для их преобразования. При этом математические основы 3D моделирования целесообразно раскрыть в программе GeoGebra, используемой учащимися на уроках математики.

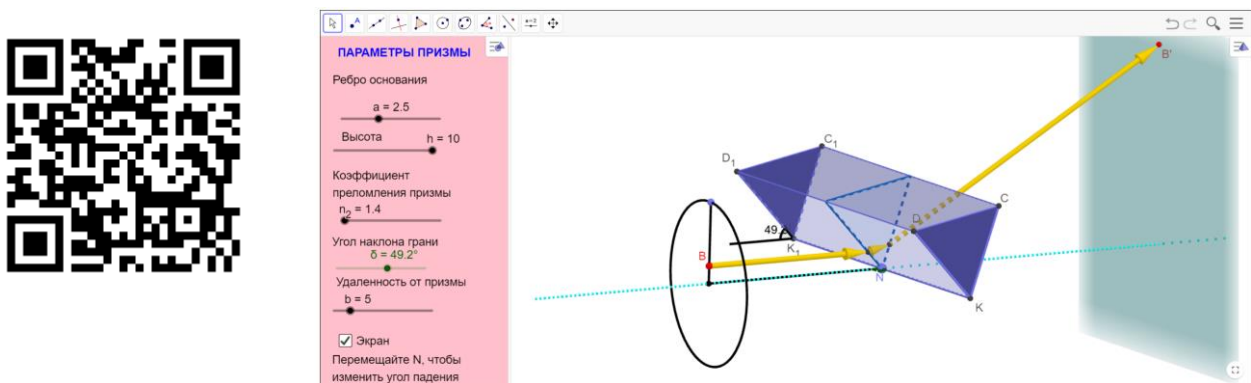


Рис. 3. Электронный ресурс «Трехмерная модель прохождения лучей сквозь призму» с QR кодом для перехода к нему [2]

Выполнение этого проекта дает новый импульс развитию знаний учащихся о феноменах преломления и отражения светового луча. Так, учащиеся по-новому осмысливают закон Снеллиуса, обращая внимание на ту его часть, в которой утверждается, что луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела двух сред из точки падения луча, лежат в одной плоскости. При использовании этого утверждения учащиеся обнаруживают, что планиметрическое описание хода луча сквозь призму возможно лишь при условии принадлежности угла падения главному сечению призмы, то есть сечению, перпендикулярному преломляющему (боковому) ребру [9]. В остальных случаях, как показывает рис. 4, процесс моделирования требует обращения к нескольким плоскостям, задаваемым прямой, содержащей падающий на грань луч, и перпендикуляром к этой грани, восстановленным в точку падения луча.

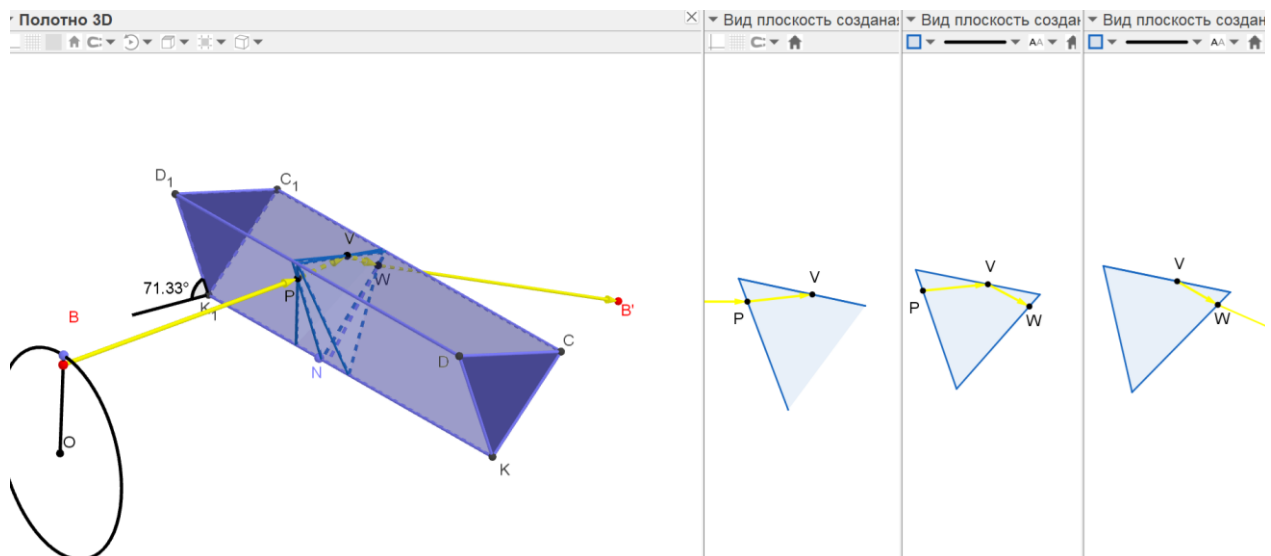


Рис. 4. Пространственный ход луча сквозь оптическую призму (3D-модель)

Следующий шаг в повышении наглядности компьютерной модели может быть сделан за счет привлечения эффекта дополненной реальности (рис. 5).

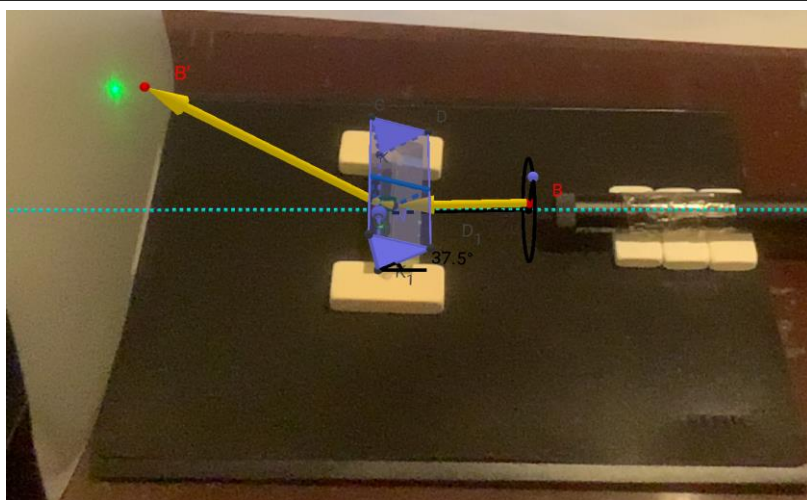


Рис. 5. Совмещение компьютерного и лабораторного эксперимента средствами технологии дополненной реальности

Трехмерная динамическая модель, представленная в дополненной реальности, позволяет собрать в единое целое результаты теоретического и чувственного познания, так как «окружающий нас мир мы воспринимаем и познаем прежде всего благодаря свету и нашим зрительным ощущениям» [7, с. 366].

Задачу на 3D моделирование хода светового луча сквозь призму предпочтительнее ставить перед учащимися предпрофессиональных классов, так как эта работа носит проориентационный характер – она закладывает необходимую основу для изучения оптических систем с пространственным ходом светового луча, которые изучаются в вузовском курсе прикладной оптики [6].

Приведенный нами пример реализации конвергентного подхода показывает его непротиворечивость предметному подходу к организации обучения. Он лишь требует согласованности действий учителей разных предметов. Точек конвергенции не должно быть много, но они должны быть, и найти их несложно, достаточно посмотреть на реальный мир сквозь призму своей предметной области. В то же время присутствие точек конвергенции в системе общего образования дает возможность учащимся объединить методы и средства различных наук для решения практических задач, что по нашему опыту вызывает вовлеченность учащихся в учебный процесс и повышает их мотивацию.

Список литературы

1. Геометрическая оптика (планиметрия) // [Персональная страница М. В. Шабановой]: сайт GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/m/kyesku8> (дата обращения: 02.07.2022).
2. Геометрическая оптика (стереометрия) // [Персональная страница М. В. Шабановой]: сайт GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/m/q8quexnj> (дата обращения: 02.07.2022).
3. Геометрия: 7–9 классы : учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. М. : Просвещение, 2022. 383 с.
4. Кондаков А. М., Сергеев И. С. Образование в конвергентной среде: постановка проблем // Педагогика. 2020. № 12. С. 5–22.
5. Оптическое стекло // АО «Лыткаринский завод оптического стекла». URL: <http://lzos.ru/upload/iblock/818/818322c0e82195aba7b3c9b1441649b9.pdf> (дата обращения: 20.06.2022).
6. Прикладная оптика : учебное пособие / Е. М. Гоголева, Е. П. Фарафонтова. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. 184 с.
7. Теория и методика обучения физике в школе: Частные вопросы : учебное пособие для студ. пед. вузов / под ред. С. Е. Каменецкого. М. : Академия, 2000. 384 с.
8. Фещенко Т. С., Шестакова Л. А. Конвергентный подход в школьном образовании – новые возможности для будущего // МНИЖ. 2017. № 11–2 (65). URL: <https://research-journal.org/pedagogy/konvergentnyj-podhod-v-shkolnom-obrazovanii-novye-vozmozhnosti-dlya-budushhego/> (дата обращения: 05.07.2022).
9. Федосов И. В. Геометрическая оптика : учебное пособие для студентов высших учебных заведений. Саратов : САТЕЛЛИТ, 2008. 92 с.
10. Физика: 8-й класс : учебник / И. М. Перышкин, А. И. Иванов. М. : Просвещение, 2021. 255 с.
11. Физика: 9 кл. : учебник / А. В. Перышкин, Е. М. Гутник. М. : Дрофа, 2018. 319 с.
12. Convergence Research at NSF. URL: <https://www.nsf.gov/od/oia/convergence/index.jsp> (дата обращения: 29.06. 2022).
13. Event-Based Learning: Educational and Technological Perspectives Sebastian de la Chica Computer Science Department, UCB 430 University of Colorado at Boulder Boulder, Colorado 80309-0430 USA. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/7927/af96698421c6881c3bd5c3e694a0956bc205.pdf> (дата обращения: 15.06.2022).

14. Halinen I. The new educational curriculum in Finland / M. Matthes, L. Pulkkinen, C. Clouder, B. Heys (Eds.) // Improving the Quality of Childhood in Europe. Brussels, Belgium : Alliance for Childhood European Network Foundation, 2018. Pp. 75–89.

15. Mathematical problem solving for everyone. URL: <http://math.nie.edu.sg/mprose> (дата обращения: 15.06.2022).

The real world through the prism of physics, mathematics and computer science

M. V. Shabanova¹, L. A. Shestakova²

¹Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Deputy Head of the Department, Moscow Center for Education Quality. Russia, Moscow; Professor of the Department of Experimental Mathematics and Informatization of Education, M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University.

Russia, Arkhangelsk. ORCID: 0000-0002-5043-0960. E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

²leading specialist, Institute of Digital Transformation of Education.

Russia, Mytishchi. ORCID: 0000-0001-6148-369X. E-mail: l.a.shestakova@gmail.com

Abstract. The curriculum of a modern school includes a whole set of academic subjects, the development of which is designed to prepare the student to continue education at a professional level, to independently solve life problems. With many advantages, the subject approach to the organization of training causes more and more complaints. They come down to the recognition of the limited possibilities of subject-based learning in the formation of students' holistic view of the real world, the ability to use the full range of knowledge acquired at school to solve life problems. The limitations of subject-based learning make it possible to overcome the convergent approach to education, which has already been implemented in a number of national and regional educational systems: Event-based learning in the USA, problem-centered learning in Singapore, phenomenon-based learning in Finland. STEAM technology has gained the greatest popularity all over the world, which is being introduced today into the system of pre-professional education in Russia (Moscow). The convergent approach does not reject subject-based learning. It only opens the boundaries for the transfer of objects of study, knowledge, skills and methods of activity from one academic subject to another, for the transition from one type of educational activity to another. In the article, these possibilities of the convergent approach are presented on a concrete example of involving primary and high school students in the scientific analysis of the effects obtained when photographing through a prism.

Keywords: convergent approach in education, geometric optics, sections of polyhedra by plane, geometric transformations, dynamic modeling in GeoGebra environment, computer experiments.

References

1. *Geometricheskaya optika (planimetriya)* – Geometric optics (planimetry) // [Personal page of M. V. Shabanova]: GeoGebra website. Available at: <https://www.geogebra.org/m/kyesku8> (date accessed: 02.07.2022).
2. *Geometricheskaya optika (stereometriya)* – Geometric optics (stereometry) // [Personal page of M. V. Shabanova]: GeoGebra website. Available at: <https://www.geogebra.org/m/q8qyexnj> (date accessed: 02.07.2022).
3. *Geometriya: 7–9 klassy : uchebnik* – Geometry: Grades 7–9th grades : textbook / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2022. 383 p.
4. Kondakov A. M., Sergeev I. S. *Obrazovanie v konvergentnoj srede: postanovka problem* [Education in a convergent environment: problem statement] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2020. No. 12. Pp. 5–22.
5. *Opticheskoe steklo* – Optical glass // JSC "Lytkarinsky Optical Glass Plant". Available at: <http://lzos.ru/upload/iblock/818/818322c0e82195aba7b3c9b1441649b9.pdf> (date accessed: 20.06.2022).
6. *Prikladnaya optika : uchebnoe posobie* – Applied optics : textbook / E. M. Gogoleva, E. P. Farafontova. Yekaterinburg. Ural University Publishing House. 2016. 184 p.
7. *Teoriya i metodika obucheniya fizike v shkole: Chastnye voprosy : uchebnoe posobie dlya stud. ped. vuzov* – Theory and methodology of teaching physics at school: Private issues : textbook for students of pedagogical universities / edited by S. E. Kamenetsky. M. Akademiya (Academy). 2000. 384 p.
8. Feshchenko T. S., Shestakova L. A. *Konvergentnyj podhod v shkol'nom obrazovanii – novye vozmozhnosti dlya budushchego* [Convergent approach in school education – new opportunities for the future] // MNIZh. 2017. No. 11–2 (65). Available at: <https://research-journal.org/pedagogy/konvergentnyj-podhod-v-shkolnom-obrazovanii-novye-vozmozhnosti-dlya-budushchego/> (date accessed: 05.07.2022).
9. Fedosov I. V. *Geometricheskaya optika : uchebnoe posobie dlya studentov vysshih uchebnykh zavedenij* [Geometric optics : a textbook for students of higher educational institutions]. Saratov. SATELLITE. 2008. 92 p.
10. *Fizika: 8-j klass : uchebnik* – Physics: 8th grade : textbook / I. M. Peryshkin, A. I. Ivanov. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2021. 255 p.
11. *Fizika: 9 kl. : uchebnik* – Physics: 9th grade : textbook / A. V. Peryshkin, E. M. Gutnik. M. Drofa (Bustard). 2018. 319 p.
12. Convergence Research at NSF. Available at: <https://www.nsf.gov/od/oia/convergence/index.jsp> (date accessed: 29.06.2022).

13. Event-Based Learning: Educational and Technological Perspectives Sebastian de la Chica Computer Science Department, UCB 430 University of Colorado at Boulder Boulder, Colorado 80309-0430 USA. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/7927/af96698421c6881c3bd5c3e694a0956bc205.pdf> (date accessed: 15.06.2022).

14. *Halinen I.* The new educational curriculum in Finland / M. Matthes, L. Pulkkinen, C. Clouder, B. Heys (Eds.) // Improving the Quality of Childhood in Europe. Brussels, Belgium : Alliance for Childhood European Network Foundation, 2018. Pp. 75–89.

15. Mathematical problem solving for everyone. Available at: <http://math.nie.edu.sg/mprose> (date accessed: 15.06.2022).

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 371.15

DOI 10.25730/VSU.0536.22.029

Насреддин Туси о правилах этикета для учителей и учеников

М. Д. Марданов¹, Р. М. Асланов²

¹доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент, Институт математики и механики Национальной академии наук. Азербайджан, г. Баку. E-mail: misirmardanov@yahoo.com

²доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Институт математики и механики Национальной академии наук. Азербайджан, г. Баку. E-mail: r_aslanov@list.ru

Аннотация. Статья описывает систему школьного образования в Азербайджане, существовавшую в средние века и основанную на принципах крупнейшего ученого и мыслителя Насреддина Туси. Развитие образования в Азербайджане берет свое начало с древних времен. Великие мыслители XIII века создали ряд ценных научных трудов, дошедших до нашего времени. Ученый-энциклопедист Мухаммед Насреддин Туси, получивший мировую славу, оставил ценное и богатое наследие в области математики, астрономии, педагогики и этики. Он вошел в историю науки и культуры Азербайджана как крупнейший ученый и мыслитель, внесший неоценимый вклад в составление современных научных трудов по естествознанию.

В данной статье особое внимание уделено вопросам, связанным с учебными программами в медресе, правами и обязанностями учителей, а также правилами поведения учащихся, которые отражены в трудах Насреддина Туси.

Ключевые слова: образование, развитие, медресе, математика, школа, ученик, учитель.

История школьного образования конца XIX и начала XX в. изучена мало. Образование играло важную роль на всех этапах развития общества. Развитие и состояние образования любой страны зависит от развития математического образования. Развитие образования в Азербайджане берет свое начало с древних времен. Еще в X в. живший в городе Тебризе великий ученый Тебризи написал ряд ценных трудов. Великие мыслители XII в.: Абульгасан Бахманяр ибн Марзбан и Хатиб Тебризи, врач и ятрохимик Омар Османоглы, выдающийся астроном Фаридаддин Али ибн Абдул Карим Ширвани, известный инженер, ученый Амираддин Масуд Нахчивани, искусный зодчий Аджмеи Нахчивани, врач и философ Афзалатдин Абдулмалик Хунджи создали ряд ценных научных трудов, дошедших до нашего времени. Ученый-энциклопедист Мухаммед Насреддин Туси, поэты, получившие мировую славу, такие как, Ширвани Хагани, Низами Гянджеви, Имадеддин Насими, Мухаммед Физули и другие личности, ставшие гордостью азербайджанского народа. Среди них почетное место занимает Н. Туси, который оставил ценное и богатое наследие в области математики, астрономии, педагогики и этики. Н. Туси вошел в историю науки и культуры Азербайджана как крупнейший ученый и мыслитель, внесший неоценимый вклад в составление современных научных трудов по естествознанию.

В эпоху Ренессанса в Европе не было такого ученого, который бы прямо или иным путем не обогатил свои знания наследием Насреддина Туси [1]. Примером могут послужить имена ученых: немецких – Иоганн Мюллер Региомонтана (1436–1476), Иоганн Генрих Ламберти (1728–1777), польского – Николай Коперник (1473–1543), английских – Джон Валлиса (1616–1703), Исаак Ньютон (1642–1727), итальянского – Джироламо Саккери (1667–1733), французского – Адриен Мари Лежандр (1752–1833).

В XII–XIV вв. азербайджанская наука получила мощный толчок к развитию [2]. На крепком фундаменте, заложенном Н. Туси, дали благодатные всходы астрономия, математика, история и педагогика [3]. Свои педагогические идеи Н. Туси высказывал, главным образом, в ряде произведений – педагогических памятников под названием «Ахлаг-и Насир» («Мораль Насира») и «Адаб-ульму-таааллимин» («Поведение учащихся», или «Адаб-и Моталлимин-велмохасселин» («Правила этикета учителей и учеников»)) [4].

История культурного развития нашего народа – одна из самых ярких страниц социокультурной истории Ближнего Востока [5]. Учитывая значение воспитательной работы в культурном развитии общества, понятно, насколько интересна история культурно-просветительской организации [6,7].

Согласно историческим документам, наряду со многими положительными сторонами прошлого состояния образования нашего народа были и недостатки. В средние века в Азербайджане существовало два типа школ:

I. Начальная школа.

II. Средняя-высшая школа.

I. Начальная школа называлась просто «школа» (школа-письмо – это место, где происходит обучение, и это форма конверта слова «катбун» (письмо) на арабском языке). Детей в школе называли учениками или куттабом.

II. Среднюю-высшую школу называли медресой, учителей – мударрис, а учеников называли туллабом. В некоторых медресе учащиеся получали только среднее образование. При успешном окончании главных медресе в столицах и первоклассных городах (например, медресе Сурхаб в Тебризе и медресе Дарулишрад в Ардебиле) студенты могли получить дипломы о высшем образовании и даже ученые степени.

Школы сначала устраивались при мечетях, а позже, в XVI в., по мере расширения образования открывали как можно больше школ в домах, лавках, караван-сараях, но не пытались строить для школы специальные здания. Эти здания не подходили для занятий. Студенты сидели на ковре, половике или циновке, которые они приносили из дома. Учитель сидел на матрасе чуть выше тротуара, держа палки, приготовленные им для наказания провинившихся детей. В школу принимали детей (6–7 лет), которые могли сами делать уборку.

В отличие от школ для медресе строились отдельные здания. В этих корпусах были классная комната, аптека, небольшие комнаты для студентов (двух- и трехместные кельи (худжра)), столовая, мечеть возле медресе и другие постройки. Примерами таких медресе являются медресе Талибия в Тебризе, медресе Сурхаб, медресе Мирза Садиг и медресе Дарул-Иршад в Ардебиле. Медресе Ардабиль значительно развилось в период Сефевидов и воспитало великих ученых.

При нем была построена школа для подготовки учеников медресе. Учащиеся этой школы обучались под руководством медресе. Эти школы были 4–5-летними, и ученики, окончившие их, сначала поступали в медресе, прежде чем заканчивать другие школы.

В одних медресе учащиеся получали стипендии, а в других медресе учащиеся обеспечивались и стипендией, и жильем, и бытовым инвентарем, а также 2–3-разовым питанием.

Азербайджанский ученый XIV в. Ахвади Марагай (1274–1338) в своем труде «Джаме-Джам» восхвалял обильно благословенный стол Сурхабского медресе Тебриза.

По праздникам и религиозным церемониям богатые города коллективно развлекали студентов. Часть домашних заданий студенты выполняли с сотрудниками медресе, а остальные делали сами.

Все расходы медресе распределялись на село, кахриз, караван-сарай, поле и т. д., они были обеспечены за счет доходов. Министр финансов жертвовал много денег медресе Мирзы Садыга в Тебризе. Школы под эгидой медресе, а тоже при мечетях также использовали доходы фонда. В таких случаях школа предоставляла бесплатное образование детям-сиротам и детям из бедных семей.

В школах с детей бралась небольшая плата. Когда ученик заканчивал определенную «суру» или книгу, его родители посылали одежду (награду) или делились с учителем. Однако учитель стал писать молитвы, смотреть на судьбу и использовать детей в своих интересах.

Школьный учитель, как правило, был неграмотным и не мог учить ребенка более 4–5 лет. Его не уважали в обществе. Дворяне считали недостойным посылать детей в школу и учили их дома.

В отличие от школьных учителей, учителя медресе часто были самыми уважаемыми и знающими учеными в стране. Будучи исследователями религиозной теории со средневековой идеологией, они консультировали глав правительств и даже королей в управлении страной. Некоторые учителя завоевали такое уважение среди своих учеников и общества, что после их смерти их могилы в знак уважения превращали в святыни.

В школах внедрялись индивидуальные методы обучения. То есть каждый ученик должен был прийти к учителю индивидуально, ответить урок и взять новый урок. Ученики читали уроки, гармонично двигая телами и покачиваясь. Этот тип урока был очень шумным, но он улучшал навыки чтения и разговорной речи детей. Хотя движение тела учащихся во время подготовки к урокам считалось своего рода недисциплинированностью, неприличием, при этом улучшалось кровообращение и движения мышц у маленьких детей.

Учитель назначал помощников из старших и более образованных детей, чтобы они внимательно следили за учениками и готовили уроки. Этих помощников называли «халифами». Каждый

день «халифы» сначала сами отвечали урок, затем готовили к урокам других учеников и приводили их по очереди к учителю для ответа их урока. Таким образом, каждый ученик должен был ежедневно приходить к учителю и отвечать урок. Его не отпускали домой, пока он не ответил свой урок.

В медресе, в отличие от школ, занятия проводились коллективно и в форме лекций. Число студентов иногда достигало 200–500 человек. В таких случаях, кроме учителя, имелись также заместитель учителя и помощник учителя.

Учитель сидел на троне и учил вслух. Заместитель учителя и ассистент стояли на соответствующих местах в классе, повторяли сказанное учителем и передавали это ученикам, сидящим далеко.

Важнейшим трудом в области методики обучения в средние века в нашей стране является книга «Адабол-Моталлиминвелмохасселин» («Правила этикета учителей и учеников») азербайджанского ученого, основателя Марагинской обсерватории Насреддина Туси (1201–1274). Эта работа, написанная в XIII в., была «дополнена в период Сефевидов» (1502–1736) и некоторые священнослужители добавили ряд своих соображений. Добавленные религиозные слова настолько отличаются от научно-методических заметок в произведении и личного мировоззрения Насреддина Туси и научных соображений в других его произведениях, что их можно легко выделить из исходного текста произведения.

Например, в первой главе книги астрономия описывается как вредная наука. Однако самым искусным астрономом был сам Насреддин Туси. Он любил эту науку и не раз говорил, что получает удовольствие от своих астрономических открытий. Он также восхвалял эту тему в своей книге «Мадхали-нукум». Поэтому мысль о том, чтобы представить астрономию как вредный предмет, безусловно, противоречит автору, и ясно, что она будет добавлена в работу позже. Труд состоит из 12 глав:

В главе I обсуждается важность науки и образования для мальчиков и девочек. Автор отмечает, что «главной задачей науки является изучение необходимых и насущных вопросов».

В главе II говорится, что «студенты должны учиться, чтобы искоренить невежество и «возродить религию».

Глава III утверждает, что необходимо изучить сначала науку о религии, а затем одну из (точных) наук, необходимых для жизни. Далее в этой главе говорится:

«Студенты должны выбрать ученого, вежливого, доброго и авторитетного учителя. Когда студент приезжает в город учиться, ему не следует спешить с выбором учителя. Когда ученик начинает занятия, он не должен без причины менять свое медресе и учебник. Он должен выбрать себе компаньона из числа самых чистых и воспитанных учеников. Во время урока ученик должен внимательно слушать учителя, уважать его, сидеть на расстоянии от него».

В главе IV говорится: «Чтобы получить образование, нужно быть деятельным и прилежным. Студент должен определить, когда начинать занятия утром и когда заканчивать вечером. Ученик должен воздерживаться от слишком большого количества еды и питья и следить за собой, чтобы не вздремнуть во время занятий».

В главе V изначально предлагается, что «ученик должен начинать новые темы и книги в среду, потому что Бог сотворил свет в этот день» (что, конечно, было добавлено к работе Туси позже). Он должен отказаться преподавать темы, которые ученик не может понять. В противном случае ученик ничего не получит от урока и его время будет потрачено впустую. Чем меньше объем урока и больше повторяется урок, тем лучше ученик усвоит предмет. Помимо ежедневных занятий ученик должен повторять предыдущие уроки.

В главе VI мы читаем: «Необходимо быть последовательным и настойчивым в обучении. Все получают огромное удовольствие от исследования сложного и непонятного научного вопроса».

Насреддин Туси, приводя собственный опыт, говорит: «Когда я решаю научную задачу ночью, я получаю от этого такое удовольствие, что князья не имеют возможности наслаждаться ею».

Глава VII гласит: «Срок обучения не ограничен. Человека можно воспитывать от колыбели до могилы. Но самый подходящий период для воспитания – юность. Утро и вечер – хорошее время для занятий. Если студент чувствует усталость при чтении одной темы, он должен начать другую тему. Ссылаясь на собственный опыт, Насреддин Туси говорит: «Когда мне надоедает заниматься научной работой, я брызгаю на лицо холодной водой».

В главе VIII говорится: «Учитель должен быть добр к ученикам и ревниво относиться к обучению. Он должен постараться сделать своего ученика одним из великих ученых в будущем».

В главе IX говорится: «Когда ученик приходит к учителю, он должен принести бумагу, перо и чернила и записывать слова учителя, потому что написанное не будет уничтожено. Ученик не должен лстыть, но и не должен забывать ласково говорить со своим учителем».

В главе X говорится, что «учащиеся не должны есть рыночную пищу. Ему следует меньше есть, молиться и читать Коран. Ему следует прислушиваться к словам своих близких друзей и отвергать приглашение плохих друзей».

В главе XI читаем: «Для укрепления ума и познания учащийся должен есть в день продукты, смешанные с медом или сахаром и 21 красной изюминой (крупным изюмом). Потому что эти продукты уменьшают желчь и мокроту. Мокрота и желчь повреждают разум».

Глава XII посвящена увеличению пропитания и жизни, но здесь нет научных слов, и эта глава позже была добавлена к работе.

Следует отметить интересный факт, что методические идеи Насреддина Туси, положенные в основу его книг, а также структура, содержание терминов очень разнятся.

После этого религиозного мнения автор приводит правильные методические указания: «Учитель должен учить на уровне соответствующем».

Насреддин Туси требует от каждого отца и матери с пониманием их ответственности относиться к воспитанию детей. Он в своих трудах поднимает проблему безнадзорности, размышляет о судьбе детей, лишенных родительской ласки и внимания, попадающих под дурное влияние улицы. Вместе с тем забота о детях, отмечает Н. Туси, не должна носить характер слепой любви. Она должна быть разумной: заботясь о дальнейшей судьбе ребенка, нужно помнить о его умственном, нравственном и физическом воспитании. Туси подчеркивает, что родители должны обратить внимание на среду, которая окружает их детей, знакомить их с естественными и общественными явлениями, будить в них любовь к науке, образованию, школе и к учителю.

Насреддин Туси сказал:

– Если отец и мать желают счастья своему ребенку, хотят, чтобы он вырос настоящим человеком, они обязаны заботиться о воспитании и обучении его, быть действительными помощниками учителя и школы;

– Для правильного воспитания ребенка родители должны поддерживать и соблюдать предъявляемые учителем требования;

– Если родители будут глушить тягу детей к знаниям, выступая против требований учителя, школа не сможет выполнить свою миссию.

Одним из методических трудов, разработанных в Азербайджане в средние века, является «Муниятул-мурид фи абадул-морифвальмустафид» («Назначение мюрида в правилах этикета, полезных и используемых»). Произведение написано шейхом Зейнадином Амели в 1547 г., и многие религиозные слова имеют не менее ценные методические рекомендации.

В книге сказано, что «учитель должен быть вежлив, сдержан и опрятно одет. Но он не должен носить роскошную одежду. Он должен выбрать самый простой способ объяснить ученику и объяснить урок простым языком. В конце урока учитель должен дать ученику возможность задать вопрос и прояснить вопросы, которые он не понимает или с которыми испытывает затруднения».

В книге учителю предлагается относиться к ученику с уважением и искренностью: «Если вопросы ученика неуместны, над ним нельзя смеяться или оскорблять его. Сначала все ученые были невежественны. Когда учитель не знает ответа на вопрос ученика, он не должен скрывать от ученика, что он не знает и затрудняется ответить на вопрос. Это не унижает учителя, наоборот, повышает его ценность. Студенты не должны довольствоваться полученными знаниями и повышать свой интерес к науке».

Об уважении ученика к своему учителю написано: «Ученик должен уважать своего учителя и брать с него пример нравственности и порядочности. Он не должен стесняться задавать вопросы учителю. Ему подходит для заучивания уроков утро, для письма день, а для чтения – вечер. Студент должен записывать важные вопросы во время учебы. Регистрировать знание – значит поработать его».

В Средние века в школах не было определенной программы. Однако существовали установленные правила в виде традиции, которые ни один учитель или воспитатель не мог придумать, чтобы эту традицию нарушить.

В медресе изучение тех или иных учебников происходило поочередно, насколько это было возможно, являлось своего рода учебной программой.

Для оправдавших себя и заслуживших выпуск учеников учитель писал своей рукой на страницах своих ценных книг разрешение. Он подсчитывал количество учителей, от которых он получил знания и количество учителей своих учителей до тех пор, пока не стал всемирно известным ученым (например, Ибн Сина, Насреддин Туси, Касим Анвара, Ахвади Марагаи и другие). Затем учитель отмечал свои известные произведения. И наконец, он написал рекомендательное письмо и информацию о степени подготовки студента.

Можно еще перечислять имена многих ученых, педагогов, писателей, композиторов, художников и философов Азербайджана конца XIX – начала XX в., оставивших ценные пособия, учебники,

а также уникальные труды по образованию, обучению и воспитанию. В Республиканском рукописном фонде Национальной академии наук Азербайджана хранится целый ряд рукописей азербайджанских педагогов на арабском, фарсидском и азербайджанском языках.

Список литературы

1. Асланов Р. М. О научном наследии Насиреддина Туси // Научные труды математического факультета МПГУ : сборник к 100-летию. М. : Прометей, 2000. С. 44–57.
2. Ахмедов Г. Н., Исаев И. Н. История педагогики Азербайджана : учебное пособие. Баку, 1991. 95 с.
3. Eyvazov F. N. Tusinin etik görüşləri. Bakı, 1976. 182 s.
4. Hüseynov V. Tusinin eimi-pedaqoji irsinin Azərbaycanda pedaqoji fikri inkişafına təsiri. Namizədlik dissertasiyası. Bakı, 2003. 165 s.
5. İsayev İ. N. Tusinin məənəviyyat haqqında fikirləri // Pedaqoji tədqiqatlar. Bakı, 2000. № 2 (9). S. 9.
6. İsayev İ. N. Nəsirəddin Tusinin məənəvi dəyərlər dünyasında bəzi ümumiləşdirmələr (1və 2 məqalələr) ABU // Xəbərlər (pedaqoji-psixoloji elmlər seriyası). Bakı, 2007. № 1. S. 72–80. № 3. S. 63–68.
7. Misir C. Mardanov, Ramiz M. Aslanov, Iramin N. Isaev Moral and Spiritual Values in Works of Nasireddin Tusi // Proceedings IFTE-2020, 0159-0169. DOI: 10.3897/ap.2.e0159.

Nasreddin Tusi on the rules of etiquette for teachers and students

M. D. Mardanov¹, R. M. Aslanov²

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, corresponding member,
Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences.
Azerbaijan, Baku. E-mail: misirmardanov@yahoo.com

²Doctor of Pedagogical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor,
Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences.
Azerbaijan, Baku. E-mail: r_aslanov@list.ru

Abstract. The article describes the school education system in Azerbaijan that existed in the Middle Ages and was based on the principles of the greatest scientist and thinker Nasreddin Tusi. The development of education in Azerbaijan dates back to ancient times. The great thinkers of the XIII century created a number of valuable scientific works that have come down to our time. The world-renowned encyclopedic scientist Muhammad Nasreddin Tusi has left a valuable and rich legacy in the fields of mathematics, astronomy, pedagogy and ethics. He entered the history of science and culture of Azerbaijan as the largest scientist and thinker who made an invaluable contribution to the compilation of modern scientific works on natural science.

In this article, special attention is paid to issues related to the curricula in madrasas, the rights and duties of teachers, as well as the rules of student behavior, which are reflected in the writings of Nasreddin Tusi.

Keywords: education, development, madrasah, mathematics, school, student, teacher.

References

1. Aslanov R. M. O nauchnom nasledii Nasireddina Tusi [On the scientific heritage of Nasireddin Tusi] // Nauchnye trudy matematicheskogo fakul'teta MPGU : sbornik k 100-letiyu – Scientific works of the Faculty of Mathematics of the Moscow Pedagogical State University : collection for the 100th anniversary. M. Prometei (Prometheus). 2000. Pp. 44–57.
2. Ahmedov G. N., Isaev I. N. Istoriya pedagogiki Azerbajdzhana : uchebnoe posobie [History of pedagogy of Azerbaijan : textbook]. Baku. 1991. 95 p.
3. Eyvazov F. N. Tusinin etik görüşləri. Bakı. 1976. 182 p.
4. Hüseynov V. Tusinin eimi-pedaqoji irsinin Azərbaycanda pedaqoji fikri inkişafına təsiri. Namizədlik dissertasiyası. Bakı. 2003. 165 p.
5. İsayev İ. N. Tusinin məənəviyyat haqqında fikirləri // Pedaqoji tədqiqatlar. Bakı. 2000. No. 2 (9). P. 9.
6. İsayev İ. N. Nəsirəddin Tusinin məənəvi dəyərlər dünyasında bəzi ümumiləşdirmələr (1və 2 məqalələr) ABU // Xəbərlər (pedaqoji-psixoloji elmlər seriyası). Bakı. 2007. No. 1. Pp. 72–80. No. 3. Pp. 63–68.
7. Misir C. Mardanov, Ramiz M. Aslanov, Iramin N. Isaev Moral and Spiritual Values in Works of Nasireddin Tusi // Proceedings IFTE-2020, 0159-0169. DOI: 10.3897/ap.2.e0159.

Математика и проблемы образования: 41-й семинар Мордковича в Кирове

Е. М. Вечтомов¹, В. И. Варанкина²

¹доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

²кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.

Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются научно-содержательная и событийная составляющие 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, состоявшегося 22–24 сентября 2022 г. в Кирове на базе Вятского государственного университета.

Ключевые слова: семинар Мордковича, математика, математическое образование.

Введение. 22–24 сентября 2022 г. в городе Кирове был проведен XLI (41-й) Международный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (далее просто Семинар) на базе Вятского государственного университета. Семинару Мордковича, как его традиционно называют, исполнилось 35 лет; первые два заседания прошли в 1987 г. в Москве. Киров принял Семинар третий раз, до этого XXV – в 2006 г. [3] и XXXIII – в 2014 г. [4].

Заметим, что начиная с 1998 г., математиками Кирова проведено уже 9 научно-методических форумов всероссийского уровня по проблемам математического образования.

Для проведения Семинара сформирована рабочая группа под руководством декана факультета компьютерных и физико-математических наук, канд. пед. наук, доцента *Н. А. Бояринцевой*. Канд. физ.-мат. наук, доцент *В. И. Варанкина* как обычно выполняла функции ученого секретаря оргкомитета и координатора Семинара.

К началу работы 41-го Семинара вышел в свет сборник материалов [2]. Материалы Семинара, его Программа, видеозапись пленарного заседания, фотографии и другая информация размещены на сайте ВятГУ: mathconf.vyatsu.ru, разработанном доцентом кафедры фундаментальной математики *Р. В. Марковым*. Опубликованы материалы 120 докладов 159 авторов из 40 городов 6 государств (Азербайджан, Беларусь, Донецкая народная республика – теперь РФ, Казахстан, Россия, Таджикистан). Сборник включает в себя 15 материалов пленарных докладов (реально сделано 14 докладов), 8 по математике и компьютерным наукам (сделано 6), 56 по вузовской методике (сделано 13) и 41 по школьной методике (сделано 10). Отобрано 30 статей участников Семинара для публикации в ближайших номерах научного журнала «Математический вестник Вятского государственного университета».

В непосредственном проведении Семинара помимо преподавателей и лаборантов кафедры фундаментальной математики и членов рабочей группы были задействованы в качестве волонтеров бакалавры 1-го курса направления подготовки «Математика и компьютерные науки».

Пленарное заседание. Работу очередного 41-го Семинара открыл председатель оргкомитета *Е. М. Вечтомов*. Сначала взял слово научный руководитель Семинара, д-р. пед. наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ *Александр Григорьевич Мордкович* (Москва), впервые принявший участие не в очном формате, а дистанционно. Он пожелал всем участникам семинара плодотворной работы, произнес «Я с вами!».

Участников Семинара приветствовало руководство ВятГУ в лице проректора по науке и инновациям доцента *С. Г. Литвинца*, заместителя директора института математики и информационных систем *А. В. Земцова*. Они отметили фундаментальную роль математики в науке, образовании и производстве, а также значение научно-методических школ в обучении студентов и школьников; подчеркнули важное место Семинара в жизни математико-педагогического сообщества.

Е. М. Вечтомов передал участникам Семинара приветственные слова президента ВятГУ профессора *В. Т. Юнзблюда* и зачитал приветственное письмо генерального директора института математики и механики НАН Азербайджана, профессора *М. Д. Марданова*. Далее ведение семинара перешло в руки одного из руководителей семинара д-ра пед. наук, профессора *А. В. Ястребова* (Ярославль).

В этом году Александр Григорьевич, оставаясь научным руководителем семинара, назначил двух новых руководителей семинара: *А. В. Ястребова* и д-ра. пед. наук, профессора *Ю. А. Дробышева* (Калуга).

Пленарные доклады¹. Всего было сделано 14 пленарных докладов: 9 офлайн плюс 5 онлайн. Рассмотрим их в порядке выступлений.

Д-р. физ.-мат. наук, профессор *Е. М. Вечтомов* и канд. физ.-мат. наук, доцент *В. И. Варанкина* (Киров) описали 70-летнюю эволюцию Кировской научно-методической школы по математическому образованию от ее возникновения до современного состояния ([2, С. 4–8], см. также [1]).

Неподдельный интерес вызвал доклад д. т. н., доцента *Е. В. Котельникова* (Киров) «Современные нейросетевые языковые модели» по теории распознавания образов, посвященный машинным методам выявления эмоциональной составляющей в текстах.

В докладе д-ра физ.-мат. наук, профессора *М. Р. Марданова* и д-ра пед. наук, профессора *Р. М. Асланова* (Баку) представлена деятельность выдающегося азербайджанского мыслителя Насреддина Туси в сфере просвещения.

Канд. физ.-мат. наук, доцент *Г. М. Полотовский* (Нижний Новгород) описал деятельность выдающихся нижегородских математиков. Отметим, что в данном докладе и в упомянутом докладе *В. И. Варанкиной*, *Е. М. Вечтомова* проявляется нечто общее: активная академическая жизнь, формирование научных школ, связь с фундаментальной математикой.

Д-р физ.-мат. наук, профессор *П. В. Семёнов* (Москва) рассматривает следующую задачу: «Какова вероятность того, что случайно выбранный треугольник окажется остроугольным?». Оказывается, ответ зависит от способа «построения случайного» треугольника. Автор приводит восемь способов построения и соответственно восемь различных вероятностей. Такой результат непривычен для студентов и преподавателей, поэтому систематический поиск ситуаций такого типа представляет собой интересную задачу из области педагогики математики.

В своем докладе д-р пед. наук, профессор *М. В. Шабанова* и *Л. А. Шестакова* (Москва) «Реальный мир сквозь призму физики, математики и информатики» рассматривают конвергентный подход в применении к различным объектам изучения. В частности, авторы анализируют преломление и отражения света с различных точек зрения: физики, математики, информатики и экспериментирования с системами динамической математики.

В докладе д-ра пед. наук, профессора *А. В. Ястребова* «Житейский опыт школьников как источник исследовательских задач» отражен его опыт руководства научной работой школьников. Основная идея состоит в том, чтобы поставить школьника в задачную ситуацию, когда научное исследование оказывается порожденным обычными житейскими наблюдениями. Эта идея применяется к житейским представлениям о расстоянии от точки до геометрической фигуры, например, к расстоянию от пловца (точка) до берега (фигура). При этом школьники осваивают непростое определение, что облегчает самостоятельную постановку учащимися исследовательских задач.

В докладе д-ра пед. наук, профессора *Г. Е. Сенькиной* (Смоленск) речь идет о профессиональной подготовке учителя математики с применением цифровых платформ. Основная мысль автора заключается в том, что многие современные проблемы в системе подготовки и повышения квалификации учителей математики могут быть решены с помощью разрабатываемой цифровой платформы Smartteacher.

Мировоззренческий характер носит полемический доклад д-ра пед. наук, профессора *В. А. Тестова* (Вологда) «О некоторых методологических проблемах цифровой трансформации математического образования».

Во второй половине первого дня работы Семинара в дистанционном режиме (онлайн) были сделаны следующие пленарные доклады.

Нестандартный и оригинальный метод контроля в системе математического образования описан в докладе д-ра пед. наук, доцента *В. Г. Ермакова* (Гомель).

В докладе д-ра пед. наук, доцента *И. В. Игнатушиной* (Оренбург) и *Р. М. Асланова* (Баку) ставится вопрос мировоззренческого характера: «Нужна ли история математики в подготовке будущих учителей математики?» Хотя каждый культурный человек знает, что ответ на этот вопрос является утвердительным, для читателя будет интересна аргументация авторов, подробная, искуссная, достаточно полная.

Выступление д-ра пед. наук, профессора *В. И. Игошина* (Саратов) «Аксиоматический метод для школьников и их учителей математики» было посвящено проблемам обучения математической логике бакалавров и магистрантов математического профиля педагогического направления подготовки.

В докладе канд. физ.-мат. наук, профессора *С. В. Ларина* и *С. В. Шуманского* (Красноярск) «Об использовании анимационных рисунков на уроках тригонометрии» предложена адекватная визуализация того, что раньше приходилось доносить словами и/или непосредственно рисовать.

¹ Подробнее о содержании докладов см. Материалы Семинара [4].

В докладе д-ра пед. наук, профессора Ю. А. Дробышева и д-ра пед. наук, профессора И. В. Дробышевой (Калуга) «Интернет-ресурсы истории математики для преподавателей математики» представлен подробный обзор существующих интернет-ресурсов по истории математики.

Секционные заседания. Второй день работы Семинара, 23 сентября, был посвящен секционным заседаниям. В оснащенных аудиториях Инженериума функционировали три секции.

Секция 1 «Математика и компьютерные науки». Руководители: д-р техн. наук, доц. Е. В. Котельников, д-р физ.-мат. наук, доц. В. В. Чермных (Сыктывкар). Сделано 6 докладов.

1. Е. М. Вечтомов, А. А. Петров (Киров) «Мультипликативно идемпотентные полукольца с дополнительными условиями».

2. С. И. Калинин, Ю. И. Макарова, Н. С. Протасов (Киров) « r -выпуклые функции в вопросе обобщения классических неравенств».

3. Г. М. Полотовский (Нижний Новгород) «Топология распадающихся вещественных алгебраических кривых».

4. В. И. Звонилов (Нижний Новгород) «Распространение формулы Рохлина для комплексных ориентаций на случай гиперповерхности».

5. А. А. Олехов (Пермь) «Применение школьной математики в задачах компьютерного зрения».

6. З. Я. Якупов (Казань) «RBHM: некоторые нерешенные проблемы в приложениях матриц Адамара».

Наибольший интерес вызвало выступление Г. М. Полотовского по теории плоских алгебраических кривых. Полотовский принадлежит нижегородской школе профессора А. Д. Громова, решившего 16-ю проблему Гильберта о классификации неособых плоских алгебраических кривых 6-го порядка. В своем 40-минутном докладе Григорий Михайлович изложил историю решения проблемы и сформулировал ряд новых результатов о плоских алгебраических кривых более высоких порядков, полученных им и его аспирантами.

Секция 2 «Методика обучения математике и информатике в вузе». Руководители: д-р пед. наук, проф. Р. М. Асланов (Баку), д-р пед. наук, проф. С. И. Калинин (Киров). На секции сделано 11 очных докладов.

1. Р. М. Асланов, В. В. Сушков (Сыктывкар) «Об исторических путях развития теории функций комплексного переменного как отрасли науки и учебной дисциплины».

2. Е. А. Богданова, П. С. Богданов, С. Н. Богданов (Самара) «Включение основ стереографических изображений в курс геометрии педагогических университетов».

3. Л. Н. Евелина, О. М. Кечина (Самара) «Оптимизационные задачи в системе подготовки будущего учителя математики».

4. М. Ф. Гильмуллин (Елабуга) «Университетская школа» как модель резильентной школы».

5. О. С. Кипяткова (Ярославль) «Реализация принципа фундаментальности при изучении математики в высшей школе».

6. О. В. Макеева (Ульяновск) «Обучение будущих учителей математики решению математических задач как освоение аналитических эвристик».

7. Г. М. Полотовский (Нижний Новгород) «Сведения по истории математики в курсах конкретных математических дисциплин: зачем, что и как сообщать учащимся».

8. Н. И. Попов, Е. В. Яковлева (Сыктывкар) «Использование технологии гарантированного обучения при изучении студентами элементов комбинаторики».

9. М. Е. Сангалова (Арзамас) «Ассистирование при подготовке учителей математики».

10. О. А. Холшевникова (Брянск) «Исследование функций с учетом познавательных стилей».

11. Ю. С. Шатрова (Самара) «Геометрия города Самары» или некоторые аспекты организации проектной деятельности будущих учителей математики».

Также были заслушаны доклады Ю. Б. Мельникова, А. А. Суетина (Екатеринбург) «Стратегия моделирования на занятиях по математике» и Л. Н. Латышевой, А. Ю. Скорняковой, Е. Л. Чермных (Пермь) «Об учебно-исследовательской работе студентов и магистрантов на математическом факультете в педвузе» в дистанционном формате. Всего на секции состоялось 13 докладов. Можно выделить выступления Г. М. Полотовского о сведениях из истории математики в курсах математических дисциплин и Ю. С. Шатровой по «геометрии города Самары». В работе секции приняла участие д-р пед. наук, доц. О. А. Сотникова, ректор Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина, которая активно участвовала в обсуждении докладов.

Секция 3 «Методика обучения математике и информатике в школе». Руководители: д-р пед. наук, доц. М. В. Езупова (Москва), канд. пед. наук, доц. Е. В. Разова (Киров). Было заслушано 10 очных докладов.

Наиболее интересными оказались следующие доклады.

В выступлении *Н. И. Заводчиковой, И. А. Быковой* (Ярославль) «Управление познавательной деятельностью учащихся при изучении программирования на уроках информатики» на примере использования платформы *Sterik* рассмотрены различные с точки зрения характера обратной связи варианты управления познавательной деятельностью учащихся.

В докладе *Е. В. Безенковой* (Пермь) «Цифровые технологии при работе с элементами истории математики в школе» дан обзор цифровых платформ, которые могут быть использованы при формировании историко-математического знания, проиллюстрированы приемы работы с ними.

Е. О. Новикова (Пермь) в своем сообщении «Проектная задача как средство развития универсальных учебных действий формирования математической грамотности» рассмотрела вопросы проектирования проектной задачи и работы с ней во внеурочной деятельности по математике.

В докладе *М. С. Фроловой* (Брянск) «Особенности обучения математике кадетов на уровне среднего общего образования» рассмотрен опыт разработки и применения рабочих тетрадей по математике, использование которых способствует развитию самостоятельности при решении задач и овладению логикой обоснования своих рассуждений и выводов.

Кроме того, в рамках семинара в сентябре–октябре 2022 г. в ВятГУ было заслушано 16 докладов на студенческой секции «Математика и информатика», руководимой канд. пед. наук, доц. *Н. А. Бояринцевой* и д-м физ.-мат. наук, проф. *Е. М. Вечтомовым*. Тематика докладов: 5 докладов по функциональной алгебре (н. р. – *Е. М. Вечтомов*), 1 доклад по теории полуколец (н. р. – канд. физ.-мат. наук *А. А. Петров*), 2 доклада по методике обучения математике (н. р. – канд. пед. наук, доцент *Н. А. Зеленина*), 3 доклада по машинному обучению (н. р. – *Е. В. Котельников*), 5 докладов по методике обучения информатике (н. р.: *Н. А. Бояринцева, Е. В. Разова*).

Подводя итоги научной части Семинара, можно отметить весьма широкий спектр обсуждаемых вопросов, появление новой перспективной тематики, связанной с развитием исследовательских, экспериментальных, проектных и IT-методик и подходов к обучению математике как в вузе, так и в школе.

Выставка книг. В первый день работы Семинара развернулась выставка учебных пособий и монографий его участников. Естественно, большинство работ было предложено коллегами из ВятГУ. Представлено 75 книг, опубликованных за последние 20 лет преподавателями кафедры фундаментальной математики и кафедры прикладной математики и информатики ВятГУ, помимо Кирова, в издательствах Дрофа, МЦНМО, Бином. Лаборатория знаний, Московский лицей, Лань, Юрайт и других. Многие книги от кафедры фундаментальной математики просто раздавались всем желающим. Между участниками Семинара состоялся обмен собственными научными и методическими трудами.

Мастер-классы. Параллельно с работой Семинара на базе кировского Института развития образования проводились круглый стол и мастер-классы, организованные в рамках деятельности «Лаборатории А. Г. Мордковича», что нашло отражение в Программе Семинара. Модератором выступила канд. пед. наук, доцент *Е. Л. Мардахаева* (Москва), спикеры: учитель математики, методист *Л. А. Александрова* (Москва), д-р пед. наук, профессор *А. Г. Мордкович* (онлайн), д-р физ.-мат. наук, профессор *П. В. Семёнов* (Москва), канд. пед. наук, доцент *Н. Б. Тихонова* (Пенза).

Культурная программа. Гостям Семинара по сложившейся традиции была предложена культурная программа. Вечером 22 сентября организована пешая экскурсия по историческому центру города Кирова (Вятки), ведомая знатоком Вятского края, экологом, доцентом *А. А. Хохловым*. А вечером 23 сентября в одном из старинных зданий города состоялся товарищеский ужин. Для гостей на вечере звучали песни в исполнении фольклорного ансамбля «Горенка», лауреата многих международных и всероссийских конкурсов. В субботу 24 сентября был выезд в село Великорецкое, которое принимает знаменитый Великорецкий крестный ход вот уже на протяжении 625 (!) лет. Было организовано посещение храмов церковного комплекса села Великорецкое, подъем на колокольню, спуск к реке Великая, дегустация сыров местных производителей. В дни проведения Семинара желающие смогли посетить Кировский областной ордена Трудового Красного Знамени драматический театр имени С. М. Кирова, в котором проходили гастроли Чувашского государственного театра оперы и балета, художественный музей имени братьев Васнецовых, Кировский областной краеведческий музей, другие музеи и выставочные залы города Кирова.

Мнения. Как всегда, на Семинаре царила атмосфера взаимопонимания, дружбы, уважения и открытости. Было много разговоров на профессиональные темы, по вопросам культуры и истории России, ее будущего.

Все участники Семинара сошлись во мнении о необходимости сохранения и всемерного развития высшего предметного педагогического образования. Нужны принципиальные перемены в управлении российским образованием на всех его уровнях. На взгляд авторов, государством были совершены три кардинальные ошибки в этой сфере. Первая – перевод обучения учителей всех

предметов в общее педагогическое направление (при этом выхолащивается предметная подготовка учителя). Вторая – подушевое финансирование, что привело к падению качества образования (сохранение вузами необучаемых студентов). Третья – разделение единого Минобра на Министерство науки и высшего образования и Министерство просвещения (при этом нарушается связь школы – вуз). Для формирования и воспитания современного учителя математики и информатики, как и раньше, в первую очередь необходимо знание математики и информатики. Специально подчеркнем, что большинство участников Семинара имеют базовое педагогическое образование, в их дипломах записано: специальность – математика, квалификация – учитель математики средней школы.

Российская Федерация представляет собой огромную по территории, с богатейшей природой и недрами, с талантливым народом, мощную Державу, для сохранения и процветания которой критически необходимы:

- единое образовательное пространство (по государственным учебным планам и образовательным программам дисциплин, по распределению выпускников, по достойным зарплатам преподавателей и прочее);
- адекватное финансирование образования и науки, отвечающее стоящим перед страной целям и задачам;
- экономика государственного, общенародного капитализма;
- правда и социальная справедливость.

Итоги. В работе очно участвовало более 80 специалистов, в том числе 52 человека из других городов. Помимо постоянных участников семинара в Киров приехали новые люди – коллеги из Казани, Москвы, Перми, Смоленска, Сыктывкара, Томска.

Всего в 41-м Семинаре приняло участие (очно, заочно, онлайн) около 200 человек, в том числе 40 докторов и 95 кандидатов наук (педагогических, физико-математических, технических). Опубликованы Материалы Семинара [4]. Заслушано 43 доклада: 14 пленарных и 29 секционных.

Мы надеемся, что результаты работы Семинара послужат заметным и полезным вкладом в подготовку будущих учителей математики и информатики, в дело российского математического образования.

В Кирове было объявлено о двух будущих заседаниях семинара Мордковича. Следующий, 42-й семинар, пройдет в Смоленском государственном университете в 2023 г., а 43-й семинар – в Сыктывкарском государственном университете имени Питирима Сорокина в 2024 г.

Список литературы

1. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Первая кафедра математики на Вятской земле // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 1. С. 39–56.
2. Математика и проблемы образования : мат-лы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, 22–24 сентября 2022 г. Киров : ВятГУ, ООО «ВЕСИ», 2022. 292 с.
3. Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах : мат-лы XXV Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, 20–22 сентября 2006 г. Киров, М. : ВятГГУ, МГПУ, 2006. 300 с.
4. Тенденции и перспективы развития математического образования : мат-лы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, посвященного 100-летию ВятГГУ, 25–27 сентября 2014 г. Киров : ВятГГУ ; Радуга-ПРЕСС, 2014. 392 с.

Mathematics and Problems of Education: Mordkovich's 41st Seminar in Kirov

E. M. Vechtomov¹, V. I. Varankina²

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-4166-1182. E-mail: veravarankina@gmail.com

Abstract. The article considers the scientific, substantive and event components of the 41st International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Computer Science of universities and pedagogical universities, held on September 22–24, 2022 in Kirov on the basis of Vyatka State University.

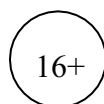
Keywords: Mordkovich seminar, mathematics, mathematical education.

References

1. Varankina V. I., Vechtomov E. M. *Pervaya kafedra matematiki na Vyatskoj zemle* [The first Department of Mathematics on Vyatka land] // *Matematicheskij vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical herald of Vyatka State University. 2021. No. 1. Pp. 39–56.
2. *Matematika i problemy obrazovaniya : mat-ly 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov, 22–24 sentyabrya 2022 g.* – Mathematics and problems of education : materials of the 41st International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer science of universities and pedagogical universities, September 22–24, 2022. Kirov. VyatSU, LLC "VESI". 2022. 292 p.
3. *Problemy podgotovki uchitelya matematiki k prepodavaniju v profil'nyh klassah : mat-ly XXV Vserossijskogo seminara prepodavatelej matematiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov, 20–22 sentyabrya 2006 g.* – Problems of preparing a mathematics teacher for teaching in specialized classes : materials of the XXV All-Russian seminar of mathematics teachers of universities and pedagogical universities, September 20–22, 2006. Kirov, Moscow. VyatSHU, MSPU, 2006. 300 p.
4. *Tendencii i perspektivy razvitiya matematicheskogo obrazovaniya : mat-ly XXXIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov, posvyashchennogo 100-letiyu VyatGGU, 25–27 sentyabrya 2014 g.* – Trends and prospects for the development of mathematical education : materials of the XXXIII International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer science of universities and pedagogical universities dedicated to the 100th anniversary of VyatSHU, September 25–27, 2014. Kirov. VyatSHU: Raduga-PRESS. 2014. 392 p.

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 3 (26) (2022)



Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964