Социально-экономические науки

УДК 51:378

Е. С. Трефилова

ИЗУЧЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СТУДЕНТАМИ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

В статье обсуждаются некоторые вопросы изучения методов решения систем линейных уравнений: матричный метод, методы Гаусса и Крамера. Проведен анализ некоторых учебников и учебных пособий по математике для студентов гуманитарных направлений, показана аналогия между «школьными» и «вузовскими» способами решения систем линейных уравнений. В статье большая часть уделяется методу Гаусса решения систем линейных уравнений, для него выделены некоторые затруднения, возникающие у решающих системы данным методом, приведена схема его изучения, апробированная на занятиях со студентами гуманитарных и экономического направлений.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Гаусса, метод алгебраического сложения, метод подстановки.

Тема «Решение систем линейных уравнений» является одной из основных при изучении линейной алгебры для любого направления подготовки. Традиционно изучаются следующие вопросы: понятие и виды систем линейных уравнений (СЛУ), понятие решения системы и способы их нахождения (метод Крамера, матричный метод (метод обратной матрицы) и метод Гаусса).

Рассмотрим некоторые учебники и учебные пособия, рекомендуемые для нематематических направлений подготовки высшей школы. В пособии [1] рассмотрены только два метода решения СЛУ – матричный метод и метод Крамера для систем с двумя и тремя переменными. В учебниках [2] рассмотрены все три метода решения СЛУ с двумя и тремя переменными, а в [3] приведены примеры СЛУ с четырьмя переменными. Таким образом, во всех рассмотренных учебниках предлагаются методы Крамера и матричный, и только в двух из них приведен метод Гаусса. Все методы применяются в основном для решения систем с двумя и тремя переменными. Заметим, что в данных учебниках практически отсутствуют системы с четырьмя и более переменными, малое количество примеров (раздел для самостоятельной работы, сборники упражнений) несовместных систем и систем, имеющих бесконечно много решений.

Опыт преподавания показывает, что метод Крамера и матричный метод усваиваются студентами намного быстрее, чем метод Гаусса. Одна из причин плохого усвоения метода Гаусса заключается в том, что у данного метода, в отличие от других нет четкого алгоритма его применения.

Поясним сказанное на примере. Пусть нам дана, например, система, содержащая четыре линейных уравнения с четырьмя неизвестными. Решение такой системы методом Крамера сводится к вычислению пяти определителей четвертого порядка (существует четкий алгоритм их вычисления) и нахождению их отношения. Применение матричного метода также алгоритмизировано: нахождение обратной матрицы и применение матричного умножения. При использовании данных методов каждый шаг алгоритма определен однозначно. Вариация же возможна только в способе вычисления определителя (разложение по строке или столбцу) или нахождении обратной матрицы (по формуле или приписыванием единичной матрицы). Приведенные выше учебники и сборники упражнений содержат в основном задания для решения данными методами систем с двумя и тремя переменными, что связано, прежде всего, с трудностями вычисления определителей и нахождением обратной матрицы. Однако решение некоторых практических задач приводит к СЛУ с большим количеством переменных. Поэтому при решении таких систем могут быть использованы табличные редакторы офисных пакетов, например, Microsoft Excel с рядом встроенных функций, которые позволяют свести вычислительные трудности к минимуму, при этом решение СЛУ удобнее находить матричным методом (в этом случае применяется только две операции – нахождение обратной матрицы и умножение матриц).

Применение схем для метода Гаусса, рекомендуемых авторами некоторых учебников [4 и другие], приводит к результату разными путями, поэтому у студентов возникают затруднения в применение этого метода, например, часто они не видят, что можно переставить строки, что привело бы к более быстрому получению решения или к более простым вычислениям. Поясним сказанное на примерах.

Рассмотрим, например, такую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad\quad 6x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

В первом уравнении системы отсутствует слагаемое с переменной x_1. Поэтому при применении схемы метода Гаусса возникает вопрос: какое уравнение поставить первым. У решающего возможно два пути – поставить второе или третье уравнение системы на первое место. Таким образом, уже на первом шаге применения схемы возможна вариация в последовательности применения преобразований, и только в конце решения можно сравнить полученные результаты. При этом в случае бесконечного числа решений возможно также различие и в полученных результатах, т.к. выбрать свободные и главные переменные можно по-разному

В процессе решения методом Гаусса может возникнуть и такая ситуация. Пусть на некотором шаге применения метода Гаусса получена матрица:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Возникает вопрос: какое преобразование следует провести, чтобы коэффициенты при x_2 в третьем и следующих уравнениях обратились в нуль (во втором столбце ниже второй строки получить нулевые элементы?). Если с четвертой строкой все просто (коэффициенты пропорциональны), то с третьей строкой у некоторых студентов возникают сложности, т. к. коэффициенты непропорциональны – необходимо использовать их наименьшее общее кратное.

Приведенные выше затруднения при решении систем – это только малая часть тех трудностей, которые возникают у студентов, применяющих метод Гаусса. Поэтому остается открытым вопрос об изучении метода Гаусса студентами гуманитарных направлений.

Отметим, что ни в одном из перечисленных выше учебников не упоминаются «школьные» методы решения систем – метод подстановки (в случае использования подстановки, во всех уравнениях, кроме одного исключается одна из переменных – один из шагов метода Гаусса) и метод сложения. При этом не проведена аналогия с решением системы уравнений методом сложения (алгебраического сложения), изучаемого в школьном курсе математики 7 класса общеобразовательной школы. Приведем схему применения метода сложения при решении систем:

«1) умножить почленно уравнения системы, подбирая множителя так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решают получившееся уравнение с одной переменой;

4) находят соответствующее значение второй переменной» [5].

Проанализировав данную схему метода, получаем, что метод Гаусса – непосредственное обобщение метода сложения на случай трех и более переменных. Поэтому предложим следующую схему изучения метода Гаусса, опробованную на практике при обучении математике студентов направления подготовки «Социология».

1. Напомнить студентам метод сложения при решении системы из двух уравнений с двумя переменными.

2. Предложить решить методом сложения систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

3. Попросить выделить преобразования, которые использовались для решения системы:

   а) умножение уравнения на число;

   б) перестановка уравнений местами;

   в) сложение или вычитание уравнений;

   г) совместное применение а) и в).

4. Ввести понятие расширенной матрицы, по аналогии с преобразованиями уравнений элементарные преобразования, которые могут быть выполнены над строками расширенной матрицы. Показать решение системы с помощью применения расширенной матрицы и элементарных преобразований строк матрицы.

5. Рассмотреть графическое решение систем из двух уравнений с двумя переменными, у которых имеется простая геометрическая интерпретация – каждое уравнение системы задает на плоскости прямую. При этом можно проиллюстрировать системы, имеющие одно или бесконечно много решений, и системы, не имеющие решений (геометрически: одна точка пересечения, совпадение прямых и параллельность прямых).

6. Предложить решить систему, имеющую бесконечно много решений, сначала размерности nxn, а затем системы с меньшим или большим числом уравнений, чем переменных.

7. Предложить найти решение несовместной системы.

8. Сравнить условия применимости метода Крамера и матричного метода, используемых только для решения систем размерности nxn с отличным от нуля определителем основной матрицы, дающих решение только в случае его единственности и метода Гаусса, который можно применим для решения любых систем.

При изучении других учебных дисциплин иногда возникают задачи, приводящие к решению систем методом Гаусса, например, при математическом моделировании некоторых социальных процессов. Приведем пример.

Имеется социальная группа из четырех человек. Из них первый не прислушивается ни к чьему мнению, второй и третий с одинаковым вниманием прислушиваются как к своему мнению, так и к мнению четвертого, а для четвертого в одинаковой мере важны мнения всех, в том числе и свое. Определить придут ли они к единому мнению.

Решение предложенной задачи сводится к составлению и решению системы из пяти уравнений с четырьмя неизвестными, которая может быть решена только методом Гаусса.

Как показал опыт использования предложенной схемы, студенты легче усваивают тему «Решение систем линейных уравнений», исчезает разрыв между «школьными» и «вузовскими» способами решения систем, им проще применять полученные навыки при решении задач других разделов математики и учебных дисциплин, например, таких как «Аналитическая геометрия», «Векторные пространства» и др.

Список литературы

1. *Баврин И. И.* Высшая математика: Учеб. для студ. естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – 6-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2007; *Шипачев В. С.* Высшая математика: Учеб. для вузов. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 1998; *Шипачев В. С.* Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006.

2. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н. Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010; *Жолков С. Ю.* Математика и информатика для гуманитариев: Учебник. – М.: Гардарики, 2002.

3. *Жолков С. Ю.* Указ. соч.

4. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н. Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010; *Жолков С. Ю.*Указ. соч.

5. Алгебра: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Нешков, С. Б. Суворова] / Под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. С. 205.

ТРЕФИЛОВА Елена Сергеевна – старший преподаватель кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: elenaoshueva@mail.ru