

УДК 62-233.21/.22

А. В. Алешкин, Б. Л. Тимофеев, Е. В. Шалагинова

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО ЛОПАСТИ РОТОРНОГО ИЗМЕЛЬЧИТЕЛЯ

В статье представлено теоретическое исследование технологического процесса совместной работы лопасти треугольного сечения и частиц в роторном измельчителе сыпучих материалов, рассматриваются дифференциальные уравнения движения материальной точки по поверхности нестационарной односторонней связи. Исследуется численное решение системы дифференциальных уравнений с неопределенным множителем Лагранжа. На основе решения системы дифференциальных уравнений представлен динамический анализ скольжения частиц по призматическим лопастям треугольного сечения роторного измельчителя с определением нормальной реакции при различных углах установки лопастей на диск ротора для обеспечения интенсивной сепарации и одновременно эффективного ударного воздействия. Расчет проводился по оригинальной алгоритмической программе на основе численного метода «усредненного ускорения» решения дифференциальных уравнений, с последующим построением и анализом графиков движения.

Ключевые слова: множитель Лагранжа, относительное ускорение, уравнение плоскости, измельчитель, уравнение движения.

В измельчителях сыпучих материалов проблема экспериментального изучения технологического процесса затруднена отсутствием возможности визуального наблюдения за отдельной частицей, в силу существенных скоростей движения рабочих органов и интенсивностью механического воздействия на материал.

Однако скольжение частиц по лопастям роторного измельчителя после соударения определяет возможность последующего их разгона для повторного удара о неподвижные элементы камеры устройства. Или наоборот, если задан-

ная степень измельчения достигается за одно соударение, то выбором установки поверхности лопасти можно обеспечить отскок частицы после удара без относительного скольжения. Поэтому динамический анализ перемещения частицы по лопасти ротора измельчителя с определением нормальной реакции выбран целью исследования.

На схеме (Рис. 1) изображена плоскость диска ротора, вращающегося в вертикальной плоскости вокруг оси y и закрепленная на ней призматическая лопасть треугольного сечения. По одной из граней призмы движется материальная точка под действием сил тяжести, нормальной реакции и трения. Уравнения составляются в неинерциальной системе отсчета, поэтому вводятся переносная и кориолисова силы инерции.

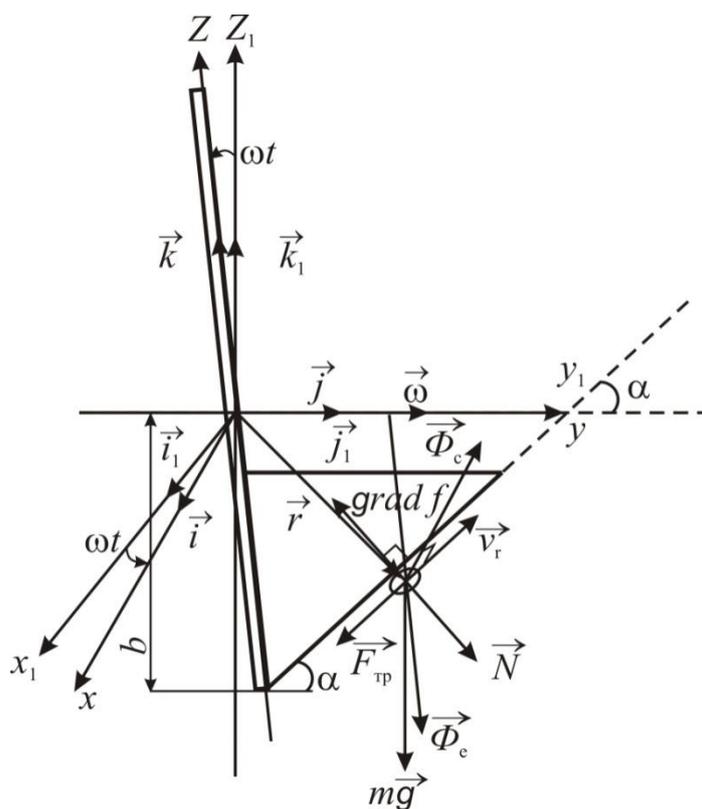


Рис. 1. Схема сил, действующих на частицу материала при движении по лопасти
(z_1, x_1, y_1 – неподвижные оси, z, x, y – подвижные оси)

Уравнение плоскости движения, параллельной оси x , в подвижных осях

$$z = ky - b, \quad (1)$$

где $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент плоскости.

Полагаем $\vec{w}_r = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – относительное ускорение частицы.

$$m\vec{w}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \quad (2)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части. $m\vec{g}$ – сила тяжести,

$$m\vec{g} = \vec{i}_1 \cdot 0 + \vec{j}_1 \cdot 0 + \vec{k}_1 \cdot (-mg);$$

Её проекции на вращающиеся оси равны:

$$\begin{cases} mg_x = mg \sin(\omega t) \\ mg_y = 0 \\ mg_z = (-mg) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3)$$

\vec{N} – нормальная реакция плоскости движения. Определим ее пропорциональной вектору-градиенту к плоскости связи:

$$\vec{N} = \lambda \text{grad}f$$

$$\begin{cases} N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (4)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа [1].

Уравнение поверхности связи запишем из уравнения (1) в виде

$$f = z - ky + b = 0 \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -k \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_x = 0 \\ N_y = -k\lambda \\ N_z = \lambda \end{cases} \quad (6)$$

Модуль нормальной реакции равен

$$|N| = \sqrt{k^2\lambda^2 + \lambda^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{k^2 + 1} \quad (7)$$

$\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения о плоскость движения с коэффициентом трения $f_{\text{тр}}$ противоположна относительной скорости движения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -|N|f_{\text{тр}} \frac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}.$$

Проекции относительной скорости определим как производные по времени от уравнений движения:

$$\begin{cases} v_{rx} = \dot{x}; \\ v_{ry} = \dot{y}; \\ v_{rz} = \dot{z}; \end{cases}$$

А её модуль

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Тогда с учетом нормальной реакции по выражению (7) получим

$$\begin{cases} F_{\text{тр}x} = -|\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ F_{\text{тр}y} = -|\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ F_{\text{тр}z} = -|\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

$\vec{\Phi}_e$ – центробежная переносная сила инерции

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Составляющие угловой скорости и радиус-вектора по направлениям подвижных осей:

$$\vec{\omega} = 0\vec{i} + \omega\vec{j} + 0\vec{k};$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

Тогда, в соответствии с аналитическим определением векторного произведения [1] запишем:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{i} \cdot \omega z + \vec{k}(-\omega x) + \vec{j} \cdot 0;$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{i}\omega^2 x + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k}(-\omega^2 z).$$

Проекции центробежной переносной силы инерции примут вид

$$\begin{cases} \Phi_{ex} = +m\omega^2 x \\ \Phi_{ey} = 0 \\ \Phi_{ez} = +m\omega^2 z \end{cases} \quad (9)$$

$\vec{\Phi}_c$ – сила инерции Кориолиса

$$\vec{\Phi}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Аналогично переносной силе, используем аналитическое определение векторного произведения, с учетом направления угловой скорости по одной оси z получим

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{i}(\omega\dot{z}) + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k}(-\omega\dot{x})$$

И проекции силы инерции Кориолиса на подвижные оси равны:

$$\begin{cases} \Phi_{cx} = -2m\omega\dot{z} \\ \Phi_{cy} = 0 \\ \Phi_{cz} = 2m\omega\dot{x} \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя силы в исходное дифференциальное уравнение (2), в проекциях на оси (x, y, z) получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \omega t - |\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + m\omega^2 x - 2m\omega\dot{z}; \\ m\ddot{y} = -k\lambda - |\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ m\ddot{z} = -mg \cos(\omega t) + \lambda - |\lambda|\sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тр}} \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + m\omega^2 z + 2m\omega\dot{x}; \end{cases} \quad (11)$$

С учетом уравнения связи в подвижных осях

$$z - ky + b = 0.$$

Дополняя данные уравнения начальными условиями, например, частица покоится на половине радиуса диска по оси x :

$$x(0) = R/2; \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$z(0) = -b; \quad \dot{z}(0) = 0;$$

$$\lambda(0) = \lambda_0.$$

Получим условия для решения задачи Коши.

Дифференциальные уравнения Лагранжа первого рода (11) необходимо подготовить к численному решению. Из уравнения связи получим

$$\begin{cases} z = ky - b; \\ \dot{z} = k\dot{y}; \\ \ddot{z} = k\ddot{y}; \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений (11) выразим множитель λ как функцию времени, полагая $m=1$ (это равносильно сокращению на массу левой и правой частей).

$$\ddot{y} = -k\lambda + F_{\text{тp}y}$$

$$\ddot{z} = k\ddot{y} = -k^2\lambda + kF_{\text{тp}y}$$

$$-k^2\lambda + kF_{\text{тp}y} - \lambda = -g \cos \omega t + F_{\text{тp}z} + \omega^2 z + 2\omega\dot{z}$$

$$-\lambda(1 + k^2) = -kF_{\text{тp}y} + F_{\text{тp}z} - g \cos \omega t + \omega^2 z + 2\omega\dot{z}$$

$$\lambda = \frac{1}{(1+k^2)} (-F_{\text{тp}z} + kF_{\text{тp}y} + g \cos \omega t - \omega^2 z - 2\omega\dot{z}),$$

Первые два слагаемых в скобках второго сомножителя

$$-F_{\text{тp}z} + kF_{\text{тp}y} = -\frac{|\lambda| \cdot \sqrt{k^2 + 1} \cdot f_{\text{тp}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (-\dot{z} + k\dot{y}) = 0,$$

так как $-\dot{z} + k\dot{y} = 0$.

И окончательно:

$$\lambda = \frac{1}{(1+k^2)} (g \cos \omega t - \omega^2 z - 2\omega\dot{z}); \quad (12)$$

Отметим, что $\vec{N} = \lambda \text{grad } f$, и при $\lambda < 0$ нормальная реакция лопасти $N > 0$.

То есть, чтобы материальная точка двигалась по лопасти без отрыва, λ должна быть меньше нуля.

Из системы дифференцированных уравнений (11) возьмем первые два уравнения, а третье заменим уравнением (12), которое замыкает систему.

Координату $z(t)$ определим по уравнению связи (1). Таким образом, для численного решения имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \sin \omega t - |\lambda| \sqrt{k^2 + 1} f_{\text{тр}} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + \omega^2 x - 2\omega \dot{z}; \\ \ddot{y} = -kx - |\lambda| \sqrt{k^2 + 1} f_{\text{тр}} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ \lambda = \frac{1}{(1+k^2)} (g \cos \omega t - \omega^2 (ky - b) - 2\omega \dot{x}); \end{cases} \quad (13)$$

с заданными начальными условиями для системы (11).

Результаты решения получены по программе, написанной на языке C# в среде MS Visual Studio, реализующей численный метод «усредненного ускорения» решения дифференциальных уравнений [3]. Пример экранных форм представлен на Рис. 2 и 3.

Метод усредненного ускорения

Начальные условия и вычисления | График

Решение

	x(0)	y(0)	z(0)	xst(0)	yst(0)	zst(0)	lambda(0)	omega	dt	Число шагов n	Число итераций m
▶	0,25	0	0,1	0	0	0	-100	300	0,0001	50	5

*
k= 1 fтр= 0,1 b= -0,1

Сохранить в файл

Результат вычислений

Nr	t	X	Y	Z	Xst	Yst	Zst	Lamda	Xstst	Ystst	Zstst	Угол поворота ротора
▶ 0	0	0,25	0	0,1	0	0	0	-100	22500	0	8990,19	0
1	0,0001	0,250110944...	1,107980653...	0,100011079...	2,218886172...	0,221596130...	0,221596130...	-4495,095	21877,72343...	4431,922800...	4431,922800...	1,719745222929...
2	0,0002	0,250442075...	5,693768974...	0,100005637...	4,403742359...	0,695661533...	0,695661533...	-5161,26165...	21819,40030...	5047,385254...	5047,385254...	3,439490445893...
3	0,0003	0,250991451...	0,000153281...	0,100153281...	6,583774185...	1,231306373...	1,231306373...	-5818,78873...	21781,23580...	5667,511542...	5667,511542...	5,159235668789...
4	0,0004	0,251758689...	0,000306305...	0,100306305...	8,760975215...	1,829178519...	1,829178519...	-6477,14475...	21762,78519...	6289,931380...	6289,931380...	6,878980891719...
5	0,0005	0,252743604...	0,000522231...	0,100522231...	10,93732479...	2,489335401...	2,489335401...	-7137,20657...	21764,20631...	6913,206266...	6913,206266...	6913,2062666913,20626643909
6	0,0006	0,253946210...	0,000807291...	0,100807291...	13,11481073...	3,211868574...	3,211868574...	-7799,84791...	21785,51259...	7537,457198...	7537,457198...	10,31847133757...
7	0,0007	0,255366722...	0,001167729...	0,101167729...	15,29542041...	3,996903825...	3,996903825...	-8465,94557...	21826,68099...	8163,247811...	8163,247811...	12,03821656050...
8	0,0008	0,257005550...	0,001609806...	0,101609806...	17,48113866...	4,844631371...	4,844631371...	-9136,37672...	21887,68409...	8791,303113...	8791,303113...	13,75796178343...
9	0,0009	0,258863304...	0,002139804...	0,102139804...	19,67394795...	5,755317365...	5,755317365...	-9812,01848...	21968,50151...	9422,416771...	9422,416771...	15,47770700636...
10	0,001	0,260940793...	0,002764035...	0,102764035...	21,87582926...	6,729308938...	6,729308938...	-10493,7482...	22069,12482...	10057,41468...	10057,41468...	17,19745222929...
11	0,0011	0,263239023...	0,003488852...	0,103488852...	24,08876349...	7,767036621...	7,767036621...	-11182,4444...	22189,55976...	10697,13896...	10697,13896...	18,91719745222...
12	0,0012	0,265759197...	0,004320655...	0,104320655...	26,31473285...	8,869015587...	8,869015587...	-11878,9870...	22329,82750...	11342,44035...	11342,44035...	20,63694267515...
13	0,0013	0,268502720...	0,005265898...	0,105265898...	28,55572249...	10,03584633...	10,03584633...	-12584,2587...	22489,96525...	11994,17463...	11994,17463...	22,36668288908...

Рис. 2. Начальные условия и результат расчетов

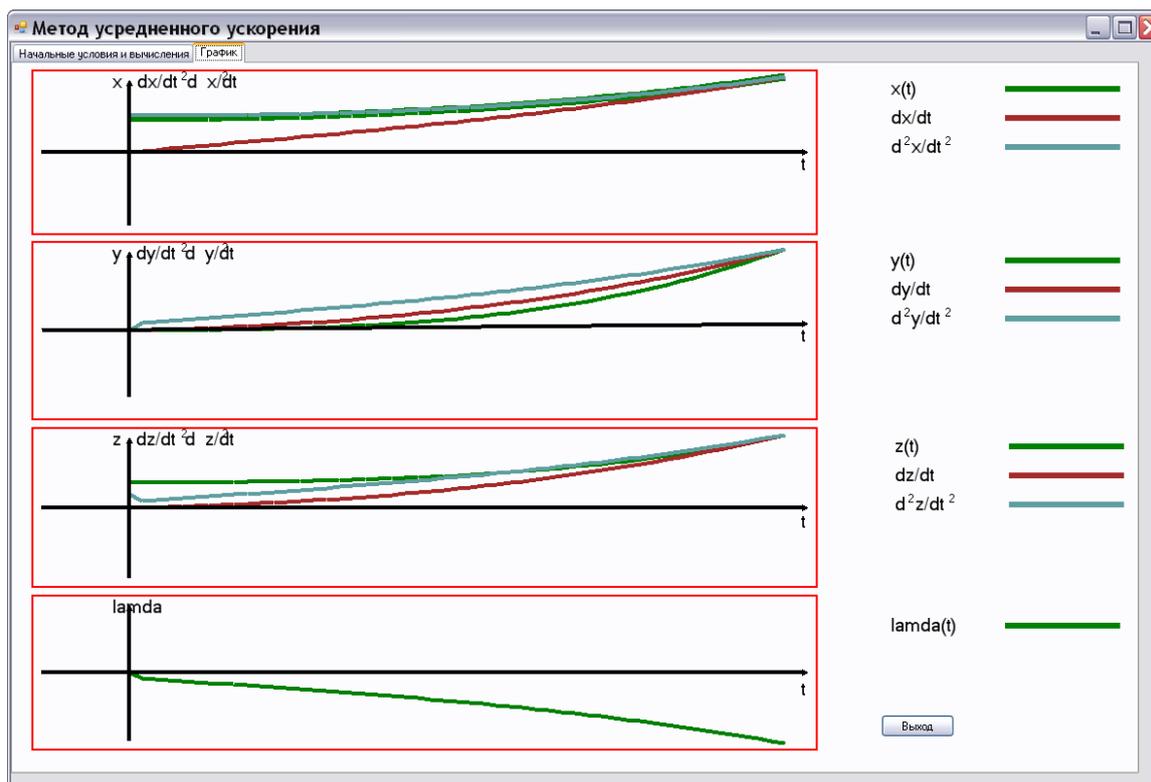


Рис. 3. Графики характеристик движения

В результате анализа результатов вычисления, при диаметре ротора 0,5...0,6 м и угловой частоте вращения 300 рад/с, рекомендована установка лопасти на диск с коэффициентом $k = 0,9 \dots 1,05$, что обеспечит относительное движение к боковой неподвижной поверхности камеры измельчения (по оси y) для интенсивной сепарации и одновременно эффективное ударное воздействие. При необходимости обеспечить относительное движение по лопасти с целью разгона частиц и последующий интенсивный удар о неподвижную деку коэффициент b в уравнении связи (5) рекомендуется брать отрицательным ($b = -0,1$). Для менее прочного обрабатываемого материала и при нежелательности явления переизмельчения рекомендуем $b = 0,1 \dots 0,2$.

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 870 с.
2. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 536 с.

3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

АЛЕШКИН Алексей Владимирович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00008@vyatsu.ru

ТИМОФЕЕВ Борис Львович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и строительной механики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00008@vyatsu.ru

ШАЛАГИНОВА Елена Витальевна – старший преподаватель кафедры строительного производства, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: usr00008@vyatsu.ru